

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله پنجم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۰۴/مهر/۱۴۰۴

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

ویژگی‌های برنامه راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۱۴۰۴-۰۵

پایه	مرحله	اول ۲۰ تیر	دوم ۳ مرداد	سوم ۲۴ مرداد	چهارم ۱۴ شهریور	پنجم ۴ مهر
دهم		-	✓	✓	✓	✓
یازدهم		✓	✓	✓	✓	✓
دوازدهم		-	-	✓	✓	-

- ۱- دوره دروس پایه دهم
- ۲- دوره دروس پایه یازدهم
- ۳- مطالعه بخشی از دروس پایه دوازدهم
- ۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

- با توجه به موارد فوق دفتر چه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۲ قسمت تشکیل شده است.
- هر دو مطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پل کار بری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.
- آزمون مرحله پنجم (همین دفتر چه ای که در دست دارید) آزمون جمع بندی دروس پایه است.
- تمامی سرفصل‌های دوازدهم، مجدداً در مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - سوگند روشنی - علی شهبابی - محمد گودرزی - سروش موئینی - محمدسجاد نقیه کارشناس علمی: فرشاد حسن زاده	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - سید محمدرضا حسینی فرد - حمید گلزاری - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: مریم نظری	حمید گلزاری
آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - سروش موئینی کارشناس علمی: فرزانه خاکپاش	مصطفی دیداری
فیزیک	طراحان: رضا سبزمیدانی - نوید شاهی کارشناس علمی: امین امینی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: علی رفیعی - یاسر عبداللہی - امیر قاسمی پور - محمد قهرمانی نژاد - امیرحسین مسلمی - سیدعلی ناظمی عرفان نریمانی - مرتضی نصیرزاده کارشناس علمی: محمدمهدی کریمیان	یاسر عبداللہی - مرتضی نصیرزاده

سرپرست محتوای آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت‌سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفتر چه سوالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.



پایه دهم

چنان چه پایه دهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده اید، به سؤالات این دفتر چه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه	ریاضی (۱) فصل ۱ تا ۵ صفحه ۱ تا ۱۱۷
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه	هندسه (۱) کل کتاب صفحه ۹ تا ۹۶
فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۳۰ دقیقه	فیزیک (۱) کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۴۹
شیمی	۱۵	۵۱	۶۵	۲۰ دقیقه	شیمی (۱) کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۲
مجموع	۶۵ سؤال			۱۰۰ دقیقه	—

آزمون آزمایشی خیلی سبز — رشته ریاضی

پایه دوازدهم — مرحله پنجم — مهر ۱۴۰۴

ریاضی دهم

۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$ و $y = |t+3| - |t-1|; t \in A'$ باشد، مجموع مقادیری که y می‌تواند بپذیرد، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) صفر (۴) ۲

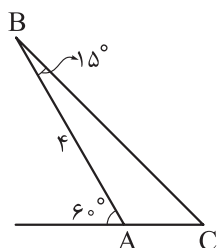
۲- تعداد اعضای مجموعه‌های غیرتهی $A \cap B$ ، $A - B$ ، $B - A$ و $(A \cup B)'$ در مجموعه مرجع U با همین ترتیب تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ می‌دهند. اگر $n(U) \leq 200$ باشد، تعداد اعضای مجموعه $A \cap B$ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۳- جمله a_n ام یک دنباله حسابی غیرثابت است. اگر a_3, a_6, a_{10} با همین ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار m در تساوی $a_m = 2a_5$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

۴- در شکل زیر محیط مثلث کدام است؟



(۱) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2$

(۲) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2$

(۳) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 4$

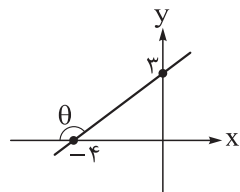
(۴) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + 4$

۵- اگر $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

- (۱) ۷۲۹ / ۰ (۲) ۷۲۸ / ۰ (۳) ۷۲۵ / ۰ (۴) ۷۲۴ / ۰

۶- حاصل عبارت $A = \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 2^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \cot 89^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۴۴ (۲) ۴۴ / ۵ (۳) ۴۵ (۴) ۴۵ / ۵



۷- با توجه به نمودار مقابل، مقدار $\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۸- اگر اعداد $x + 44$ و $x - 45$ مربع کامل باشند، مجموع ارقام عدد طبیعی x کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۹- اگر در تساوی $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{72})(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{71}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{72})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{71}) = \frac{m}{n}$ اعداد طبیعی m و n نسبت به هم اول باشند، حاصل $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۷۱ (۲) ۷۲ (۳) ۷۳ (۴) ۷۴

۱۰- معادله $x^2 + \frac{1}{x^2} = x + \frac{1}{x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۱- اگر محور تقارن سهمی $y = g(x)$ بر رأس سهمی $f(x) = x^2 - 4x - 3$ منطبق است. اگر سهمی $y = g(x)$ محور y را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند، طول نقطه دیگر برخورد این سهمی با خط $y = -3$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{129}{40}$ (۲) $\frac{117}{80}$ (۳) $\frac{201}{40}$ (۴) $-\frac{57}{80}$

۱۲- رأس سهمی $y = g(x)$ بر رأس سهمی $f(x) = x^2 - 4x - 3$ منطبق است. اگر سهمی $y = g(x)$ محور y را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند، طول نقطه دیگر برخورد این سهمی با خط $y = -3$ برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳- اگر جدول تعیین علامت تشکیل شده برای حل نامعادله $\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + x + b^2 + 1} < a$ به صورت زیر باشد، حاصل $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$+\infty$
		$\frac{5}{5}$	
	+	-	

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۵ (۴) -۵

۱۴- فرض کنید $f(\sin \alpha + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}) = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} - \sin \alpha$ باشد. اگر $f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{3}) + f(m) = 4/7$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۵- اگر $f(x) = (ax + 1)(b - 3x) + 6x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، مساحت سطح محصور به نمودار تابع $g(x) = -bx + 1$ و محورهای مختصات کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

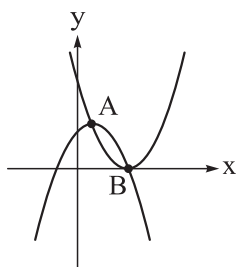
۱۶- اگر برد تابع $f(x) = a - (x - b)^2$ بازه $(-\infty, 4]$ باشد و نمودار آن نیز از نقطه $(2, 3)$ عبور کند، برد تابع

$$g(x) = |x - a| - \frac{b}{3} \quad \text{کدام است؟ } (b > 1)$$

$$(1) [1, +\infty) \quad (2) [-1, +\infty)$$

$$(3) [3, +\infty) \quad (4) [-3, +\infty)$$

۱۷- در شکل زیر نقاط A و B رئوس سهمی‌ها هستند. اگر معادله سهمی‌ها $y = -2x^2 + 4x + 6$ و $y = ax^2 + bx + c$ باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟



$$(1) 32$$

$$(2) 30$$

$$(3) 34$$

$$(4) 28$$

۱۸- با استفاده از ارقام ۸، ۷، ۵، ۳، ۲، ۰ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و بزرگ‌تر از ۳۵۰۰ می‌توان ساخت؟

$$(1) 204 \quad (2) 192 \quad (3) 216 \quad (4) 180$$

۱۹- با حروف کلمه SABZ چند کلمه ده‌حرفی می‌توان ساخت که دو حرف S و B مجاور نباشند، دو حرف A و Z هم مجاور نباشند و هیچ دو حرف مجاوری هم یکسان نباشد؟

$$(1) 210 \quad (2) 211 \quad (3) 212 \quad (4) 214$$

۲۰- از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ سه عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع ۳ عدد انتخاب‌شده بر ۳ بخش‌پذیر است؟

$$(1) 3/0 \quad (2) 35/0 \quad (3) 55/0 \quad (4) 62/0$$

هندسه دهم

۲۱- از دوران یک دوزنقه قائم الزاویه، حول ضلع عمود بر قاعده‌های آن، چه شکلی ایجاد می‌شود؟

(۱) یک استوانه و یک مخروط قائم که در قاعده مشترک‌اند.

(۲) دو مخروط قائم که در قاعده مشترک‌اند.

(۳) یک استوانه که مخروط قائمی از آن جدا شده است.

(۴) یک مخروط قائم که مخروط قائم دیگری از آن جدا شده است.

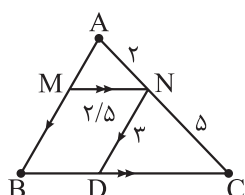
۲۲- چند لوزی با محیط ۱۶ می‌توان رسم کرد که قطر بزرگ آن دو برابر قطر کوچک باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

۲۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، دو ضلع AB و AC با هم برابرند و عمود منصف ضلع AB ، ضلع AC را در نقطه P قطع می‌کند. اگر $\hat{ABC} = \hat{BPC}$ ، آنگاه زاویه حاده A چند درجه است؟

(۱) ۳۶ (۲) ۳۰ (۳) ۲۴ (۴) ۴۲

۲۴- اگر در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $ND \parallel AB$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



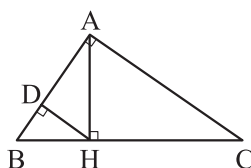
(۱) ۱۸ / ۴۵

(۲) ۱۹ / ۴۵

(۳) ۱۸ / ۹۵

(۴) ۱۹ / ۹۵

۲۵- در شکل زیر با فرض $AB = ۳$ و $AC = ۴$ ، نسبت محیط مثلث BDH به محیط مثلث ABC کدام است؟



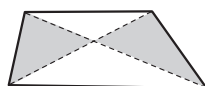
(۱) ۲۷ / ۰

(۲) ۳۶ / ۰

(۳) ۳ / ۰

(۴) ۴ / ۰

۲۶- در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه ۲ به ۳ است. مساحت قسمت رنگ شده چند درصد مساحت دوزنقه است؟



(۲) ۴۰

(۱) ۳۶

(۴) ۵۲

(۳) ۴۸

۲۷- نقطه A ، یکی از رأس‌های یک پانزده ضلعی محدب است. چه تعداد از قطرهای این پانزده ضلعی، از رأس A نمی‌گذرند؟

(۱) ۷۸ (۲) ۷۷ (۳) ۷۶ (۴) ۷۵

۲۸- در یک مستطیل به اضلاع ۲ و ۵ از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی، چهارضلعی $ABCD$ و از وصل کردن وسط‌های

اضلاع، چهارضلعی $MNOP$ حاصل می‌شود. مساحت $ABCD$ چند برابر مساحت $MNOP$ است؟

(۱) $\frac{9}{10}$ (۲) $\frac{10}{9}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۹- در مثلثی به طول اضلاع ۱۳، ۱۳ و ۱۰، فاصله نقطه همرسی میانه از نزدیک ترین ضلع، کدام است؟

۳ (۴)

$\frac{10}{3}$ (۳)

$\frac{40}{13}$ (۲)

۴ (۱)

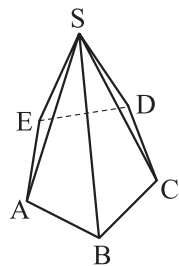
۳۰- در هرم شکل مقابل، یال DE با چند یال از این هرم، متناظر است؟

یک (۱)

دو (۲)

سه (۳)

چهار (۴)



فیزیک دهم

۳۱- ارتفاع هواپیمایی که در فاصله ۳۰۰۰۰ پا (فوت) از سطح آزاد دریاها در حال پرواز است، بر حسب کیلومتر کدام است؟
($1 \text{ in} = 2.5 \text{ cm}$, $1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$)

- (۱) $3/6$ (۲) ۹ (۳) ۳۶ (۴) ۹۰

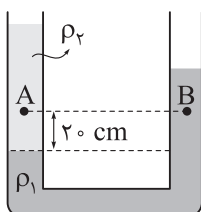
۳۲- شعاع کره‌ای توپر، ۲ برابر شعاع سطح مقطع یک مخروط توپر و جرم کره، ۴ برابر جرم مخروط است. اگر چگالی کره، ۲ برابر چگالی مخروط باشد، ارتفاع مخروط چند برابر شعاع سطح مقطع آن است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۳۳- یک زیردریایی در عمق ۸ متری دریا در حال حرکت است. اندازه نیروی عمودی وارد بر سطح خارجی پنجره این زیردریایی که دایره‌ای به قطر ۱ m است، برابر چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، چگالی آب دریا 1 g/cm^3 و فشار هوا 1 bar است).

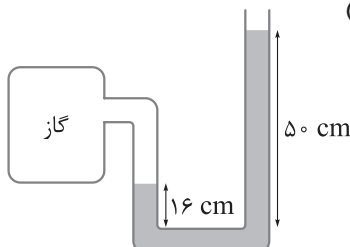
- (۱) $4/5\pi \times 10^4$ (۲) $2/25\pi \times 10^4$ (۳) $8\pi \times 10^4$ (۴) $9\pi \times 10^4$

۳۴- دو مایع به چگالی‌های $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_2 = 0.8 \text{ g/cm}^3$ در لوله U شکل زیر در تعادل هستند. اگر فشار دو نقطه A و B به ترتیب برابر P_A و P_B باشد، $P_A - P_B$ برابر چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) ۰/۴
(۲) -۰/۴
(۳) ۰/۸
(۴) -۰/۸

۳۵- در شکل زیر، اگر فشار گاز درون مخزن 80 cmHg و فشار هوا 102 kPa باشد، چگالی مایع درون لوله چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و چگالی جیوه 13.6 g/cm^3 است).



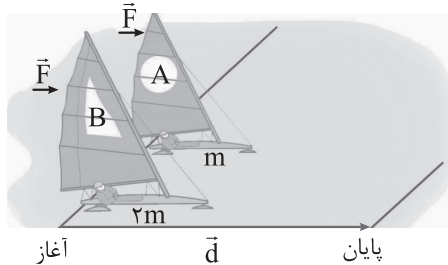
- (۱) ۰/۸
(۲) ۱
(۳) ۱/۸
(۴) ۲

۳۶- در شکل زیر، آب به صورت پیوسته در لوله افقی جاری است. اگر قطر مقطع بخش A دو برابر قطر مقطع بخش B باشد، کدام یک از موارد زیر درست است؟



- (الف) تندی آب در بخش B، ۲ برابر تندی آب در بخش A است.
(ب) تندی آب در بخش B، ۴ برابر تندی آب در بخش A است.
(پ) آهنگ شارش آب در بخش B، ۴ برابر آهنگ شارش آب در بخش A است.
(ت) فشار آب در بخش A، بیشتر از فشار آب در بخش B است.
- (۱) الف - پ (۲) الف - ت (۳) ب - پ (۴) ب - ت

۳۷- در شکل زیر، دو قایق بادبانی مخصوص حرکت روی سطوح یخزده A و B، دارای جرم‌های m و $2m$ روی دریاچه افقی بدون اصطکاک قرار دارند و نیروی ثابت، یکسان و افقی $\vec{F}$ با وزیدن باد به هر دو وارد می‌شود. هر دو قایق از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و پس از جابه‌جایی $\vec{d}$ ، از خط پایان می‌گذرند. به ترتیب از راست به چپ، تندی و انرژی جنبشی قایق A در لحظه عبور از خط پایان، چند برابر تندی و انرژی جنبشی قایق B در لحظه عبور از خط پایان است؟



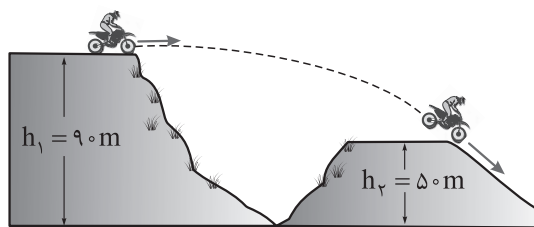
(۱) ۱، ۲

(۲) $\frac{1}{2}$ ، ۲

(۳) $1, \sqrt{2}$

(۴) $\frac{1}{4}, \sqrt{2}$

۳۸- در شکل زیر، جرم موتورسوار با موتورش 150 kg است. این موتورسوار، پرشی با تندی اولیه $v_1 = 10 \text{ m/s}$ انجام می‌دهد و با تندی v_2 روی تپه بعدی فرود می‌آید. به ترتیب از راست به چپ، v_2 چند متر بر ثانیه است و در این جابه‌جایی کار نیروی وزن چند کیلوژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است).

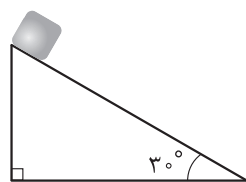

(۱) $6, 20\sqrt{2}$

(۲) $60, 20\sqrt{2}$

(۳) $6, 30$

(۴) $60, 30$

۳۹- در شکل زیر، جسمی به جرم 4 kg از بالای سطح شیب‌داری به طول 4 m رها می‌شود و با تندی 5 m/s به پایین سطح شیب‌دار می‌رسد. اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)


(۱) $7/5$

(۲) 15

(۳) $22/5$

(۴) $27/5$

۴۰- پمپی با بازده ۳۴ درصد، در هر دقیقه 50 m^3 نفت را با تندی ثابت از عمق ۶۰۰ متری سطح زمین تا سطح زمین بالا می‌آورد. توان ورودی این پمپ چند مگاوات است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و چگالی نفت 0.85 g/cm^3 است).

(۴) 750

(۳) 125

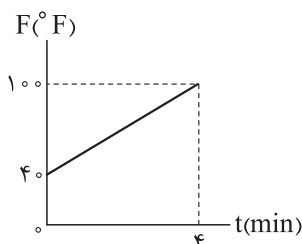
(۲) 75

(۱) $12/5$

۴۱- یک بزرگراه از بخش‌های بتونی به طول ۲۵ m ساخته شده است. این بخش‌ها در دمای 10°C ، بتون‌ریزی و عمل آورده شده‌اند. برای جلوگیری از تاب برداشتن بتون در دمای 50°C ، مهندسان باید فاصله چند سانتی‌متری را بین این قطعه‌ها در نظر بگیرند؟ ($\alpha_{\text{بتون}} = 14 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$)

- ۱/۴ (۱) ۲/۱ (۲) ۱۴ (۳) ۲۱ (۴)

۴۲- یک گرمکن 250°C واتی به طور کامل درون ۳ kg از مایعی قرار دارد. اگر نمودار دمای این مایع بر حسب زمان به شکل زیر باشد، گرمای ویژه آن در SI کدام است؟



- ۶۰۰ (۱)
۱۰۸۰ (۲)
۱۸۰ (۳)
۳۲۴۰ (۴)

۴۳- چند کیلوژول گرما لازم است تا ۶۰۰ g آب با دمای 30°C در فشار ۱ atm، به جوش آمده و $\frac{1}{3}$ از آن تبخیر شود؟

$$\left(L_v = 2256 \text{ J/g}, c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}} \right) \text{ و تبخیر سطحی ناچیز است.}$$

- ۴۵/۱۲ (۱) ۶۲/۷۶ (۲) ۴۵۱/۲ (۳) ۶۲۷/۶ (۴)

۴۴- ۱۰۰ g آب درون گرماسنجی به ظرفیت گرمایی $980 \text{ J/}^{\circ}\text{C}$ وجود دارد و دمای مجموعه 0°C است. قطعه فلزی به جرم ۵۰۰ g و دمای 80°C را در گرماسنج قرار می‌دهیم. پس از ایجاد تعادل گرمایی، دمای مجموعه به چند درجه سلسیوس می‌رسد؟ (گرمای ویژه آب و فلز به ترتیب $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ و $400 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ است و مجموعه با محیط، گرما مبادله نمی‌کند.)

- ۵ (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

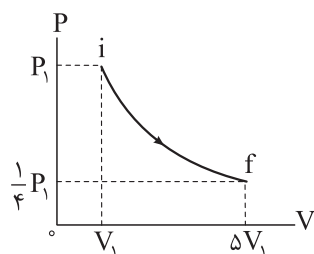
۴۵- در کدام مورد، سازوکار انتقال گرما با سایر موارد متفاوت است؟

- (۱) گرم شدن آب درون قابلمه روی شعله (۲) گرم شدن هوای داخل اتاق توسط بخاری
(۳) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن (۴) سیستم گرم‌کننده مرکزی در ساختمان‌ها

۴۶- فشار پیمانه‌ای مقدار معینی گاز کامل برابر ۲ atm است. اگر در طی فرایندی در فشار ثابت، حجم گاز ۵ L کاهش یابد، کار انجام شده توسط گاز در این فرایند چند کیلوژول است؟ ($P_0 = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۱/۵ (۳) -۱/۵ (۴)

۴۷- نمودار $P - V$ مقدار معینی گاز کامل که در طی فرایندی ایستاوار از حالت i به حالت f می‌رود، به شکل زیر است.

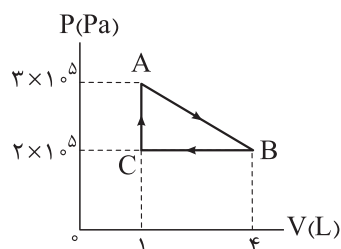


کدام مورد دربارهٔ این فرایند الزاماً درست است؟

- (۱) این فرایند، هم‌دما است.
- (۲) این فرایند، بی‌دررو است.
- (۳) در این فرایند، گاز گرما دریافت کرده است.
- (۴) در این فرایند، گاز گرما از دست داده است.

۴۸- نمودار $P - V$ مقدار معینی گاز کامل، در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. اگر انرژی درونی گاز در نقطهٔ A برابر 600 J

باشد، به ترتیب از راست به چپ، گرمای دریافتی گاز در فرایند AB و کار انجام‌شده روی گاز در چرخه، چند ژول است؟



- (۱) $150, 250$
- (۲) $-150, 250$
- (۳) $150, 1750$
- (۴) $-150, 1750$

۴۹- در چرخهٔ ماشین بنزینی، کدام فرایندها، فرایند بی‌دررو در نظر گرفته می‌شوند؟

- (۱) ضربهٔ مکش، ضربهٔ خروج گاز
- (۲) ضربهٔ مکش، ضربهٔ قدرت
- (۳) ضربهٔ تراکم، ضربهٔ خروج گاز
- (۴) ضربهٔ تراکم، ضربهٔ قدرت

۵۰- یک ماشین گرمایی درون‌سوز، در هر چرخه 8 kJ گرما از سوزاندن سوخت دریافت می‌کند و 2 kJ کار تحویل

می‌دهد. اگر ماشین در هر ثانیه 40 چرخه را بپیماید، به ترتیب توان ماشین بر حسب کیلووات و بازدهٔ ماشین کدام است؟

- (۱) $0/2, 50$
- (۲) $0/2, 80$
- (۳) $0/25, 50$
- (۴) $0/25, 80$

شیمی دهم

۵۱- کدام مورد درست است؟

- (۱) همه ایزوتوپ‌های طبیعی اورانیم، به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار می‌روند.
- (۲) پاسخ‌دادن به این سؤال که «پدیده‌های طبیعی چرا و چگونه رخ می‌دهند؟» با کمک علم تجربی امکان‌پذیر است.
- (۳) با انجام واکنش‌های هسته‌ای در ستاره‌ها، عنصرهای سبک از عنصرهای سنگین پدید می‌آیند.
- (۴) یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن، فاقد ایزوتوپ پرتوزا است.

۵۲- عنصر لوتسیم (${}^{175}_{71}\text{Lu}$)، متعلق به کدام دسته از جدول دوره‌ای است و اگر عنصر ${}^{137}_{54}\text{Xe}$ با لوتسیم هم‌دوره و در خانه مجاور و قبل از آن قرار گرفته باشد، تفاوت شمار نوترون‌های این دو اتم کدام است؟

- (۱) d, ۳۷ (۲) p, ۲۳ (۳) p, ۳۷ (۴) d, ۲۳

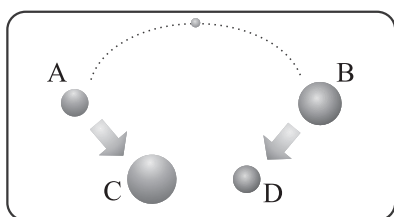
۵۳- جرم اتمی میانگین عنصر A دارای ایزوتوپ‌های ${}^2_0\text{A}$ و ${}^{24}_{11}\text{A}$ ، برابر $23/2 \text{ amu}$ است. به منظور غنی‌سازی ایزوتوپ سبک‌تر، مقداری از ایزوتوپ‌های سنگین‌تر را از مخلوط خارج می‌کنیم. به تقریب چند درصد از این ایزوتوپ‌ها باید خارج شوند تا جرم اتمی میانگین $1/6$ واحد تغییر کند؟ (جرم هر پروتون و نوترون را به تقریب 1 amu فرض کنید).

- (۱) ۸۳ (۲) ۵۰ (۳) ۴۰ (۴) ۳۳

۵۴- اگر مجموع $(n + l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم یک عنصر از گروه ۱۷ برابر ۲۶ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) در اتم این عنصر، ۱۳ الکترون با $l = 1$ وجود دارد.
- (۲) گازی بی‌رنگ است که برای ضدعفونی کردن محیط کاربرد دارد.
- (۳) عدد اتمی آن، $25/4$ برابر عدد اتمی اولین عنصر گروه دوم جدول است.
- (۴) با هیدروژن، یک ترکیب یونی به فرم HX تشکیل می‌دهد.

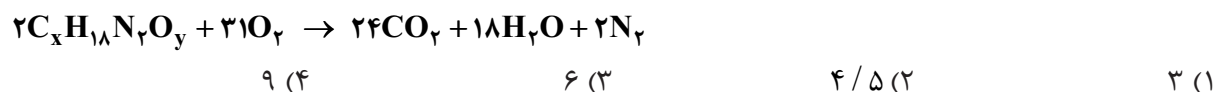
۵۵- با توجه به شکل زیر که واکنش بین سدیم و کلر و تشکیل سدیم کلرید را نشان می‌دهد، کدام گزینه درست است؟



- (۱) A و B به ترتیب سدیم و کلر و جهت حرکت الکترون از A به سمت B است.
- (۲) با دادوستد الکترون، A و B به ترتیب به آرایش گاز نجیب قبل و بعد از خود می‌رسند.
- (۳) نسبت شمار الکترون‌های دارای عدد کوانتومی فرعی $l = 0$ در D به شمار الکترون‌های دارای عدد کوانتومی فرعی $l = 1$ در C، برابر $25/0$ است.
- (۴) نسبت مجموع اعداد کوانتومی فرعی الکترون‌های آخرین لایه اشغال شده D به مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های آخرین زیرلایه اشغال شده C، برابر $1/4$ است.

۵۶- کدام مورد درست است؟

- (۱) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، نسبت جرم به حجم هوا کاهش می‌یابد.
 - (۲) تغییرات فشار در هواکره را می‌توان دلیلی بر لایه‌ای بودن آن دانست.
 - (۳) آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم‌های گازی که برای سردکردن قطعات الکترونیکی دستگاه MRI استفاده می‌شود، مشابه با این آرایش در اتم عنصرهای گروه دوم جدول است.
 - (۴) اوزون استراتوسفری از واکنش گازهای O_2 و NO_2 حاصل می‌شود.
- ۵۷- معادله موازنه‌شده سوختن کامل ترکیبی با فرمول $C_xH_{18}N_2O_y$ به صورت زیر است. نسبت جرم کربن به اکسیژن در این ترکیب کدام است؟ ($C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

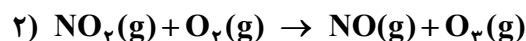
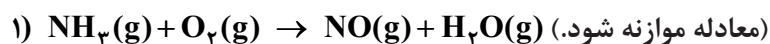


- ۵۸- شمار نوترون‌های موجود در $^{90}_{28}X$ برابر ۱۳/۸ مول است. اگر جرم مولی این یون برابر ۱۲۸ گرم باشد، نسبت شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار این یون به q ، کدام است؟ (در ساختار لوویس XO_4^q ، همه پیوندها یگانه هستند و همه اتم‌ها به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند.)



۵۹- کدام مورد درست است؟

- (۱) اکسید فلزهای گروه اول برخلاف اکسیدهای عنصرهای گروه ۱۶، خاصیت اسیدی داشته و رنگ کاغذ pH را به رنگ قرمز درمی‌آورند.
 - (۲) میل ترکیبی هموگلوبین به کربن مونواکسید، حدود 2×10^4 برابر اکسیژن است.
 - (۳) اگر واکنش $2NaNO_3(s) \rightarrow 2NaNO_2(s) + O_2(g)$ ، در ظرف دربسته انجام شود، جرم مخلوط واکنش در طی انجام واکنش به اندازه جرم اکسیژن تولیدی کاسته می‌شود.
 - (۴) به ازای تولید برق یکسان، مقایسه میزان کربن دی‌اکسید تولیدشده از منابع مختلف به صورت «نفت خام < انرژی خورشیدی < گرمای زمین < باد» است.
- ۶۰- با توجه به واکنش‌های زیر که در دو ظرف دربسته جداگانه (با حجم یکسان) به طور کامل انجام می‌شوند، اگر بعد از اتمام واکنش‌ها، فشار واردشده به دیواره هر دو ظرف برابر شد، جرم گاز اکسیژن مصرف‌شده در واکنش (۲)، چند برابر جرم این گاز در واکنش (۱) است؟ (دمای هر دو ظرف در موقع اندازه‌گیری فشار برابر است.)



۶۱- در چه تعداد از موارد زیر، فرمول شیمیایی و نام ارائه شده با یکدیگر مطابقت دارد؟

الف) آمونیوم سولفید: NH_4S

ب) روی نیترات: Zn_2NO_3

پ) اسکاندیم (III) فسفید: ScP

ت) آلومینیم کربنات: $\text{Al}_2(\text{CO}_3)_3$

ث) گالیم کلرید: GaCl_2

ج) کبالت (III) سولفات: $\text{CO}_3(\text{SO}_4)_3$

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۶۲- مقداری اتانول به ۲۵۲ میلی لیتر آب اضافه می شود تا محلول ۴۰ درصد جرمی اتانول در آب به دست آید. با فرض این که حجم محلول با مجموع حجم دو ماده برابر باشد، حداقل چند میلی لیتر دیگر اتانول باید به محلول اضافه شود تا طبق تعریف حلال، جای حلال و حل شونده در محلول عوض شود؟ (چگالی آب و اتانول به ترتیب ۱ و ۰/۸ گرم بر میلی لیتر است و $\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16: \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) ۸۰ (۲) ۶۰۵ (۳) ۵۹۶ (۴) ۴۴۸

۶۳- انحلال پذیری پتاسیم نیترات در دمای 40°C به تقریب سه برابر انحلال پذیری آن در دمای 10°C است. اگر ۲۰۰ گرم از محلول سیر شده این نمک را از دمای 40°C تا 10°C سرد کنیم، ۵۰ گرم رسوب تشکیل می شود. انحلال پذیری پتاسیم نیترات در دمای 40°C ، چند گرم در ۱۰۰ گرم آب است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

۶۴- کدام مورد درست است؟

(۱) با افزایش دما، مخلوط ناهمگن یخ در آب، به مخلوط همگن تبدیل می شود.
(۲) اگر ۲۵ گرم نمک پتاسیم نیترات را به مقداری آب با دمای 20°C اضافه کنیم، بعد از انحلال کامل، دمای محلول بالاتر از 20°C خواهد شد.

(۳) اگر در دمای اتاق، ماده A در آب نامحلول باشد، به یقین در تینر حل می شود.
(۴) با افزایش دما (بدون تغییر مقدار آب)، محلول سیر شده پتاسیم کلرید به محلول سیر نشده آن تبدیل می شود.

۶۵- کدام مورد، مفهوم علمی جمله زیر را به درستی کامل می کند؟

«با n برابر شدن، به برابر مقدار اولیه می رسد.»

(۱) دمای آب - انحلال پذیری گاز O_2 - $\frac{1}{n}$ (۲) فشار گاز CO - انحلال پذیری آن - n

(۳) دمای آب - انحلال پذیری نمک KCl - n (۴) فشار گاز N_2 - انحلال پذیری آن - $\frac{1}{n}$

پایه یازدهم

چنان چه پایه یازدهم را در پیل کاربری خود انتخاب کرده اید، به سوالات این دفتر چه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه بندی دروس
حسابان و ریاضیات پایه	۱۰	۶۶	۷۵	۱۵ دقیقه	حسابان (۱) کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۵۱
هندسه	۱۰	۷۶	۸۵	۲۰ دقیقه	هندسه (۲) کل کتاب صفحه ۹ تا ۷۵
آمار و احتمال	۱۰	۸۶	۹۵	۲۰ دقیقه	آمار و احتمال کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۱ ریاضی (۱) فصل ۶ و ۷ صفحه ۱۱۸ تا ۱۷۰
فیزیک	۲۰	۹۶	۱۱۵	۳۰ دقیقه	فیزیک (۲) کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۳۰
شیمی	۱۵	۱۱۶	۱۳۰	۲۰ دقیقه	شیمی (۲) کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۳
مجموع	۶۵ سؤال			۱۰۵ دقیقه	—

حسابان یازدهم

۶۶- طول دو ضلع قائم در مثلث قائم الزاویه‌ای جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند. طول ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث کدام است؟

(۱) $\sqrt{7}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

۶۷- حاصل ضرب جواب‌های معادله $1 = \frac{x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2x}{(x-1)^2}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۸- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{6}{|x-1| + |x-a|}$ برابر ۲ باشد، برد تابع $g(x) = \sqrt{|x-a| - |x+5|}$ شامل چند عدد صحیح است؟ ($a > 1$)

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۶۹- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & ; x > 2 \\ 1 - ax & ; x \leq 2 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۷۰- اگر $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ باشد، با انتخاب کدام ضابطه برای تابع g ، برد تابع $y = (f + g)(x)$ تک‌عضوی است؟

(۱) $g(x) = 3$ (۲) $g(x) = f(-x)$

(۳) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ (۴) $g(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$

۷۱- در بازه $[\alpha, \beta]$ نمودار تابع $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ بالاتر از نیمساز ناحیه اول قرار ندارد. بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۲

۷۲- اگر دامنه تابع $f(x) = \log_7(ax + b)$ بازه $(-\frac{3}{7}, +\infty)$ و $f^{-1}(2) = 3$ باشد، مقدار $f(\frac{3}{7})$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) $1/25$

۷۳- اگر $\tan x = 0/5$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\frac{7\pi}{4} + x) - \cos(x - \frac{11\pi}{4})}{\sin(x - \pi) + \cos^2(2x - \frac{7\pi}{4}) \times \sin(\frac{\pi}{4} - x)}$ کدام است؟ ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$)

(۱) $\frac{25}{7}$ (۲) $-\frac{25}{7}$ (۳) $\frac{5}{24}$ (۴) $-\frac{5}{24}$

۷۴- اگر عبارت $P(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x$ را به صورت $A + B \cos Cx$ بنویسیم، مقدار ABC^2 کدام است؟

(۴) ۱۴

(۳) ۱۳/۷۵

(۲) ۱۳/۵

(۱) ۱۳/۲۵

۷۵- اگر $\lim_{a \rightarrow b} \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3} = 2$ باشد، مقدار b کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

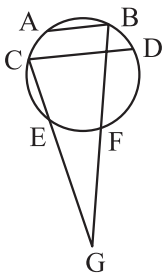
(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) ۳

هندسه یازدهم

۷۶- کدام گزاره درست نیست؟

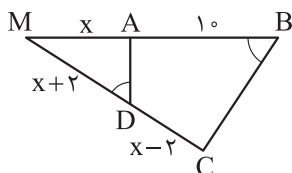
- (۱) در هر دایره، طول یک کمان برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل آن کمان است.
- (۲) دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ و طول خط‌المركزین ۲، مماس درون هستند.
- (۳) تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند.
- (۴) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

 ۷۷- مطابق شکل طول وتر AB با شعاع دایره برابر است و این وتر با CD موازی است. اگر اندازه کمان‌های AC و CE و زاویه G با هم برابر و هر سه نصف اندازه کمان EF باشند، اندازه کمان DF چند درجه است؟


- (۱) ۱۸۵
- (۲) ۱۹۰
- (۳) ۱۹۵
- (۴) ۲۰۰

 ۷۸- زاویه بین مماس‌های مشترک دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۲ و ۵، برابر 60° است. طول مماسی که از مرکز دایره بزرگ بر دایره کوچک رسم می‌شود، کدام است؟

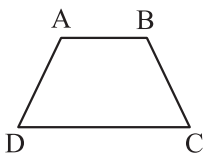
- (۱) $2\sqrt{6}$
- (۲) $4\sqrt{2}$
- (۳) $3\sqrt{3}$
- (۴) $2\sqrt{7}$

 ۷۹- در شکل زیر $AM = x$ ، $AB = 10$ ، $MD = x + 2$ و $CD = x - 2$ است. اگر $\hat{A}DM = \hat{B}$ باشد، مقدار x کدام است؟


- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸

 ۸۰- دو خط L و D در نقطه O متقاطع‌اند و α زاویه بین آن‌ها است به طوری که $\tan \alpha = \frac{7}{24}$. اگر A' تصویر نقطه A واقع بر خط D در بازتاب نسبت به خط L باشد، آنگاه نسبت فاصله A' از خط D به محیط مثلث AOA' کدام است؟

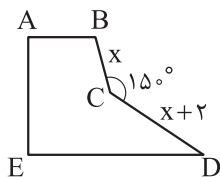
- (۱) $0/18$
- (۲) $0/24$
- (۳) $0/21$
- (۴) $0/2$

 ۸۱- در شکل زیر دوزنقه $ABCD$ متساوی‌الساقین، $AB = 2$ ، $CD = 3$ و ارتفاع دوزنقه برابر ۴ است. اگر پاره خط CD مجانس مستقیم AB باشد، فاصله مرکز تجانس از AB کدام است؟


- (۱) ۸
- (۲) ۹
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۵

محل انجام محاسبات

۸۲- در شکل زیر، بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط چندضلعی، مساحت آن را به کمک بازتاب تا حد ممکن افزایش می‌دهیم. اگر میزان افزایش مساحت ۲۴ واحد مربع باشد، آن گاه مقدار x کدام است؟



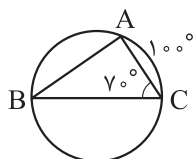
۸ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۶ (۴)

۸۳- مطابق شکل، اگر شعاع دایره $R = 3$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟


 $3\sqrt{3}$ (۲)

۶ (۱)

۵ (۴)

 $2\sqrt{6}$ (۳)

۸۴- در مثلث ABC به طول اضلاع a ، b و c ، اگر $\frac{c^2}{4} = a^2 - b^2$ باشد، آن گاه طول میانه وارد بر ضلع به طول c کدام است؟

 $\frac{b}{2}$ (۴)

 $\frac{a}{2}$ (۳)

 b (۲)

 a (۱)

۸۵- طول اضلاع مثلثی ۳، $\frac{3}{5}$ و ۴ است. طول نیمساز داخلی نظیر زاویه متوسط این مثلث کدام است؟

 $2\sqrt{3}$ (۴)

۳ (۳)

 $\sqrt{7}$ (۲)

 $\frac{2}{5}$ (۱)

آمار و احتمال

۸۶- کدام گزاره درست است؟

$$(1) (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

$$(2) (\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

$$(3) (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

$$(4) (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

 ۸۷- مجموعه توانی مجموعه $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ ، چند زیرمجموعه دارد؟

$$(4) 256$$

$$(3) 63$$

$$(2) 255$$

$$(1) 64$$

 ۸۸- مجموعه‌های X و Y به صورت $X = (A - B)' - (A - B')$ و $Y = A' \cap B$ تعریف شده‌اند. اگر گزاره

$$\forall (x, y); ((x, y) \in X \times Y \Rightarrow (x, y) \in Y \times X)$$
 درست باشد، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

$$(2) B \subseteq A$$

$$(1) A \subseteq B$$

$$(4) A \subseteq B'$$

$$(3) B' \subseteq A$$

 ۸۹- گزاره‌های p و q هر کدام با احتمال $\frac{1}{4}$ درست هستند. با کدام احتمال گزاره $(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow \sim q)$ درست است؟

$$(4) 1$$

$$(3) \frac{1}{4}$$

$$(2) \frac{1}{2}$$

$$(1) \frac{3}{4}$$

۹۰- ۵ نفر در یک مسابقه دو شرکت کرده‌اند.

S	a	b	c	d	e
احتمال	P(a)	P(b)	P(c)	P(d)	P(e)

 احتمال برد افراد از چپ به راست، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهد. اگر $P(e) = 2P(b)$ باشد،

 حاصل $P(\{a, c, e\} | \{c, d, e\})$ کدام است؟

$$(4) \frac{4}{15}$$

$$(3) \frac{2}{3}$$

$$(2) \frac{2}{5}$$

$$(1) \frac{1}{3}$$

۹۱- کیسه‌ای دارای ۳ مهره قرمز، ۲ مهره زرد و ۴ مهره آبی است. ۳ مهره به ترتیب و بدون جای گذاری خارج

می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره دوم زرد نیست، ولی مهره سوم زرد است؟

$$(4) \frac{14}{81}$$

$$(3) \frac{7}{28}$$

$$(2) \frac{7}{36}$$

$$(1) \frac{3}{16}$$

۹۲- نمرات دانش آموزی در آزمون ماهانه به صورت زیر بوده است.

شیمی	فیزیک	ریاضی	درس
x	z	y	نمره
۱	۳	۴	ضریب

در بررسی مجدد برگه‌ها متوجه شده‌ایم که نمره ریاضی او یک نمره کم حساب شده است، ولی نمره فیزیک او یک نمره زیاد شده است. اگر میانگین اول او $۱۶/۲۵$ باشد با اصلاح اشتباهات، میانگین درست نمرات چه قدر است؟

(۱) $۱۶/۷۵$ (۲) $۱۶/۵$ (۳) $۱۶/۳۷۵$ (۴) $۱۶/۳۷$

۹۳- دو دسته عدد داریم که هر کدام شامل ۴ داده یکسان هستند. به یکی از دسته‌ها دو داده که یکی یک واحد بیشتر از میانگین و دیگری یک واحد کم‌تر از میانگین است، اضافه می‌کنیم. با این کار اختلاف واریانس دو دسته برابر $\frac{۳}{۴}$ می‌شود. واریانس دسته با تعداد عضو بیشتر کدام است؟

(۱) ۴ (۲) $\frac{۳}{۳}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{۴}{۵}$

۹۴- برای انتخاب یک نمونه تصادفی به اندازه ۲۰ از بین ۱۰۰ عضو جامعه، جامعه را به ۱۰ گروه ۱۰ تایی تقسیم کرده و دو گروه را به تصادف به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم. نوع روش نمونه‌گیری کدام است؟

(۱) سامان‌مند (۲) طبقه‌ای (۳) تصادفی ساده (۴) خوشه‌ای

۹۵- نمونه $\{۲, ۵, ۴, ۳, ۶\}$ ، میانگین جامعه $۱, ۲, \dots, n$ را بدون خطا برآورد می‌کند. در نمودار احتمال مشاهده با نمونه‌های دوعضوی، ارتفاع بالاترین میله کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۶}$ (۲) $\frac{۱}{۱۲}$ (۳) $\frac{۵}{۳۶}$ (۴) $\frac{۱}{۹}$

فیزیک یازدهم

۹۶- در شکل زیر، دو گوی مشابه به جرم $3/6 \text{ g}$ و بار یکسان q در فاصله 1 cm از هم قرار دارند و گوی بالایی به صورت معلق است. هر یک از گوی‌ها چند الکترون دریافت کنند تا از نظر الکتریکی خنثی شوند؟

$$(g = 10 \text{ N/kg}, e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



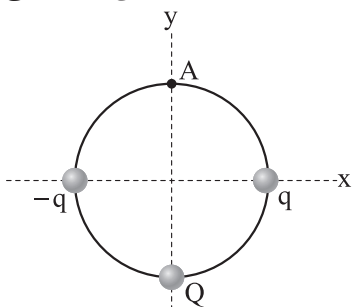
$$(1) 1/25 \times 10^{11}$$

$$(2) 1/25 \times 10^{12}$$

$$(3) 8 \times 10^{11}$$

$$(4) 8 \times 10^{12}$$

۹۷- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی محیط دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه A در SI برابر $\vec{E} = \vec{i} - \vec{j}$ باشد، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



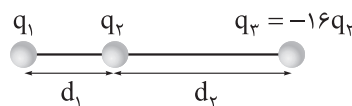
$$(1) \sqrt{2}$$

$$(2) 2\sqrt{2}$$

$$(3) -\sqrt{2}$$

$$(4) -2\sqrt{2}$$

۹۸- در شکل زیر، اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارهای الکتریکی نقطه‌ای برابر صفر باشد، به ترتیب از راست به چپ، $\frac{d_2}{d_1}$ و $\frac{q_2}{q_1}$ برابر کدام است؟



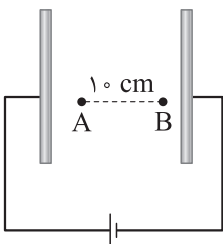
$$(2) \frac{9}{16}, 4$$

$$(4) \frac{9}{16}, 3$$

$$(1) \frac{16}{9}, 4$$

$$(3) \frac{16}{9}, 3$$

۹۹- در شکل زیر، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه 2000 N/C است. اگر پروتونی با تندی $4 \times 10^5 \text{ m/s}$ از نقطه A به سمت نقطه B پرتاب شود، تندی پروتون هنگام عبور از نقطه B چند متر بر ثانیه است؟
($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و جرم پروتون $1/6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است. از نیروی مقاومت هوا و وزن چشم‌پوشی کنید.)



$$(1) 8 \times 10^5$$

$$(2) 2\sqrt{5} \times 10^5$$

$$(3) 2\sqrt{3} \times 10^5$$

$$(4) \text{ صفر}$$

محل انجام محاسبات

۱۰۰- چگالی سطحی بار الکتریکی کره رسانایی برابر $25 \mu C / m^2$ است. بار الکتریکی موجود در ناحیه‌ای به مساحت $4 cm^2$ در سطح این کره، چند نانوکولن است؟

- (۱) ۰/۰۱ (۲) ۰/۱ (۳) ۱ (۴) ۱۰

۱۰۱- یک خازن تخت به باتری بسته شده است. پس از مدتی، خازن را از باتری جدا کرده و سپس فاصله بین صفحه‌های خازن را دو برابر می‌کنیم. کدام موارد زیر درست است؟

(الف) بزرگی میدان الکتریکی میان صفحه‌ها، نصف می‌شود.

(ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، دو برابر می‌شود.

(پ) انرژی ذخیره‌شده در خازن، دو برابر می‌شود.

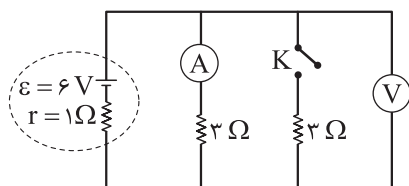
(ت) بار روی صفحه‌ها، نصف می‌شود.

- (۱) الف و پ (۲) الف و ت (۳) ب و ت (۴) ب و پ

۱۰۲- قطر سیمی مسی برابر $2 mm$ است. اگر مقاومت ویژه مس $10^{-8} \Omega \cdot m$ باشد، مقاومت الکتریکی $30 m$ از این سیم برابر چند اهم است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) ۰/۰۴ (۲) ۰/۱۶ (۳) ۰/۴ (۴) ۱/۶

۱۰۳- در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، مقدارهایی که آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب چند آمپر و چند ولت تغییر می‌کند؟



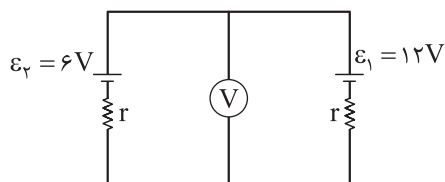
- (۱) ۲/۷, ۰/۳

- (۲) ۰/۹, ۰/۳

- (۳) ۲/۷, ۰/۹

- (۴) ۰/۹, ۰/۹

۱۰۴- در مدار شکل زیر، ولتسنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



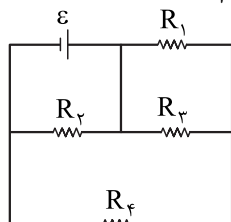
- (۱) ۶

- (۲) ۹

- (۳) ۱۵

- (۴) ۱۸

۱۰۵- در مدار شکل زیر، مقاومت‌ها مشابه‌اند. توان خروجی باتری چند برابر توان مصرفی مقاومت R_1 است؟



- (۱) ۷

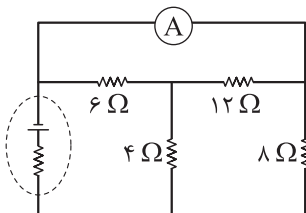
- (۲) ۱۴

- (۳) ۱۵

- (۴) ۱۸

۱۰۶- در مدار شکل زیر، اگر آمپرسنج آرمانی مقدار 1 A را نشان دهد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر

چند ولت است؟



(۱) ۴

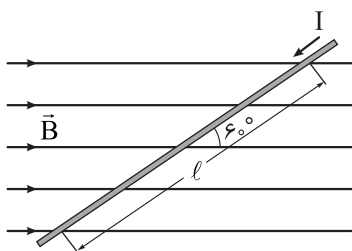
(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

۱۰۷- در شکل زیر، سیم راست حامل جریان $I = 5\text{ A}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 40\text{ G}$ قرار دارد. اگر

$l = 60\text{ cm}$ باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟



(۱) 6×10^{-3} ، $\otimes$

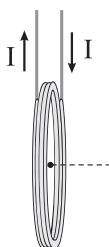
(۲) 6×10^{-3} ، $\odot$

(۳) $6\sqrt{3} \times 10^{-3}$ ، $\otimes$

(۴) $6\sqrt{3} \times 10^{-3}$ ، $\odot$

۱۰۸- در شکل زیر، از پیچۀ مسطحی به شعاع $6/25\text{ cm}$ که از ۲۰۰۰ دور سیم نازک ساخته شده است، جریان 20 mA

می‌گذرد. میدان مغناطیسی در مرکز پیچه چند گاوس و در چه جهتی است؟ ($\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$)



(۱) ۴ ، $\leftarrow$

(۲) ۴ ، $\rightarrow$

(۳) ۴۰ ، $\leftarrow$

(۴) ۴۰ ، $\rightarrow$

۱۰۹- ذره‌ای به جرم 12 g و بار الکتریکی $25\text{ }\mu\text{C}$ را در میدان مغناطیسی یکنواخت 600 G که به سمت شمال است،

در راستای افقی با سرعت $\vec{v}$ پرتاب می‌کنیم و ذره روی خط راست به حرکت خود ادامه می‌دهد. به ترتیب، کم‌ترین

مقدار v چند متر بر ثانیه است و در این حالت ذره در چه جهتی پرتاب شده است؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)

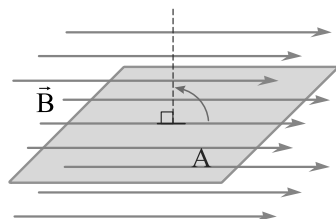
(۲) ۸۰۰ ، غرب

(۱) ۸۰۰ ، شرق

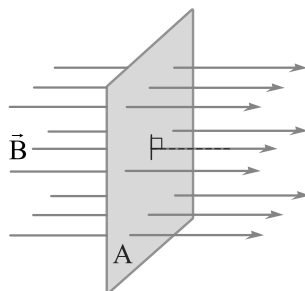
(۴) ۸۰۰۰ ، غرب

(۳) ۸۰۰۰ ، شرق

۱۱۰- در شکل زیر، حلقهٔ رسانایی به مساحت 40 cm^2 ، حول محوری عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0.5 \text{ T}$ می‌چرخد. در بازهٔ زمانی 0.5 ثانیه‌ای که حلقه از حالت (الف) به حالت (ب) می‌رسد، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در حلقه چند میلی‌ولت است؟



(ب)



(الف)

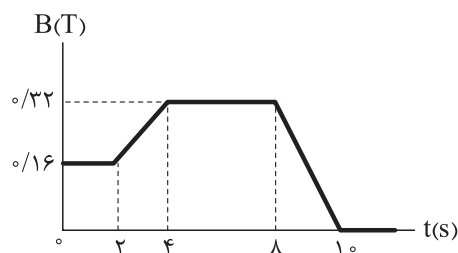
(۱) 0.4

(۲) 0.1

(۳) 4

(۴) 1

۱۱۱- یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع 5 cm و مقاومت الکتریکی 1Ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می‌کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 10 \text{ s}$ چند میلی‌آمپر است؟


(۱) 0.4

(۲) 0.8

(۳) 4

(۴) 8

۱۱۲- طول سیملولهٔ آرمانی و بدون هستهٔ A، ۴ برابر طول سیملولهٔ آرمانی و بدون هستهٔ B است. اگر تعداد حلقه‌های سیملولهٔ A، ۲ برابر تعداد حلقه‌های سیملولهٔ B، و سطح مقطع سیملولهٔ A، ۳ برابر سطح مقطع سیملولهٔ B باشد، ضریب القاوری سیملولهٔ A، چند برابر ضریب القاوری سیملولهٔ B است؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) 3

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

۱۱۳- جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر فرضی 200 A و انرژی ذخیره شده در آن یک کیلووات ساعت است. ضریب القاوری این القاگر چند هانری است؟

(۴) 360

(۳) 180

(۲) 36

(۱) 18

محل انجام محاسبات

۱۱۴- معادله جریان عبوری از یک مولد جریان متناوب در SI به صورت $I = I_0 \sin 100\pi t$ است. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه،

جریان عبوری از مولد برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{200}$ (۲) $\frac{1}{50}$ (۳) $\frac{1}{200}$ (۴) $\frac{1}{500}$

۱۱۵- کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) در سامانه‌های انتقال و توزیع برق از محل تولید تا محل مصرف، از جریان مستقیم استفاده می‌شود.
- (۲) برای انتقال توان الکتریکی در فاصله‌های دور، تا جایی که امکان دارد باید از ولتاژهای بالا و جریان‌های کم استفاده کرد.
- (۳) یکی از مزیت‌های مهم توزیع توان الکتریکی dc بر ac آن است که افزایش و کاهش ولتاژ dc، بسیار آسان‌تر از ac است.
- (۴) قبل از انتقال توان الکتریکی از نیروگاه‌ها، از مبدل‌های کاهنده استفاده می‌شود.

شیمی یازدهم

۱۱۶- A عنصری از دسته s و X و D عنصرهایی از دوره چهارم جدول دوره‌ای می‌باشند. اگر اختلاف شمار الکترون‌های ظرفیتی هر یک از اتم عنصرهای X و D با شمار این الکترون‌ها در اتم عنصر A، برابر ۳ باشد، کدام گزینه نادرست است؟
(۱) مجموع عدد اتمی عنصرهای X و D، عددی زوج است.

(۲) مابین موقعیت X و D در جدول دوره‌ای، به یقین ۹ عنصر فلزی وجود دارد.

(۳) اختلاف عدد اتمی عنصر X با A، می‌تواند برابر ۲ باشد.

(۴) اگر D عنصری از دسته d باشد، X به یقین یک شبه‌فلز است.

۱۱۷- بر پایه واکنش داده‌شده، ۴۰ گرم کلسیم سولفات ناخالص بر اثر حرارت تجزیه می‌شود. اگر تفاوت جرم فراورده جامد با جرم گاز اکسیژن تولیدشده برابر ۸ گرم باشد، درصد خلوص نمونه اولیه کدام است؟ (معادله واکنش موازنه شود و $O = ۱۶, S = ۳۲, Ca = ۴۰ : g.mol^{-1}$)



(۱) ۳۴ (۲) ۴۶

(۳) ۶۸ (۴) ۸۲

۱۱۸- فلز X را در صنعت مطابق واکنش زیر به دست می‌آورند. اگر از واکنش ۱۵ گرم فلز منیزیم با بازده ۶۲/۵ درصد، ۳۷۵/۹ گرم فلز X تولید شود، نسبت جرم مولی فلز X به ظرفیت آن (n) کدام است؟ ($Mg = ۲۴ g.mol^{-1}$)



(۱) ۱۲ (۲) ۲۴

(۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۱۱۹- کدام مورد درست است؟

(۱) ساده‌ترین آلکن، بخش عمده گاز شهری را تشکیل می‌دهد.

(۲) حذف عدد از نام ترکیب‌های ۳- اتیل پنتان و ۳- اتیل هگزان، باعث نادرست شدن نام‌گذاری آن‌ها نمی‌شود.

(۳) اگر یک مول از ترکیبی با فرمول $C_{24}H_{36}$ با ۵ مول برم مایع واکنش دهد، در ساختار آن سه حلقه کربنی وجود دارد.

(۴) هر مول از هیدروکربنی با فرمول C_8H_{18} ، فاقد پیوند سه‌گانه که دارای دو حلقه در ساختار خود می‌باشد، در واکنش با ۷ مول گاز هیدروژن به یک ترکیب حلقوی سیرشده تبدیل می‌شود.

۱۲۰- از سوختن آلکان A در شرایط STP، گازهای CO و CO_۲ با حجم برابر به همراه آب تولید می‌شود. اگر نسبت مجموع حجم این گازها به حجم اکسیژن مصرفی برابر ۷۵/۰ باشد، چند ایزومر ساختاری با فرمول شیمیایی A می‌توان یافت و در چه تعداد از این ایزومرها، فقط یک شاخه فرعی وجود دارد؟

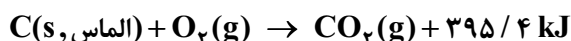
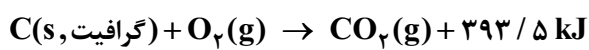
- (۱) ۳ - ۷
(۲) ۲ - ۷
(۳) ۳ - ۵
(۴) ۲ - ۵

۱۲۱- دو نمونه ماده با مشخصات زیر در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند. اگر دمای نهایی پس از تعادل گرمایی برابر با ۵۰°C باشد، گرمای ویژه ماده Y بر حسب J.g⁻¹.°C⁻¹ کدام است؟

نمونه	جرم (g)	دمای اولیه (°C)	گرمای ویژه (J.g ⁻¹ .°C ⁻¹)
X	۲۰۰	۹۰	۰/۳
Y	۲۰۰	۳۰	؟

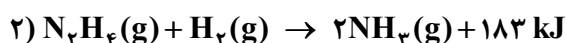
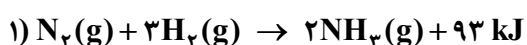
- (۱) ۰/۲
(۲) ۰/۴
(۳) ۰/۶
(۴) ۰/۸

۱۲۲- با توجه به واکنش‌های ترموشیمیایی سوختن آلوتروپ‌های کربن، در تبدیل ۶۰ گرم گرافیت به الماس در شرایط مناسب، چند کیلوژول گرما مبادله می‌شود؟ (C = ۱۲ g.mol⁻¹)



- (۱) ۹/۵
(۲) ۹/۱
(۳) ۱/۹
(۴) ۵/۹

۱۲۳- با توجه به واکنش‌های زیر،



اگر آنتالپی پیوند H—H برابر با ۴۳۶ kJ.mol⁻¹ و آنتالپی پیوند N≡N برابر ۹۴۵ kJ.mol⁻¹ باشد، کدام گزینه به عنوان میانگین آنتالپی پیوند N—N بر حسب کیلوژول بر مول، قابل قبول است؟

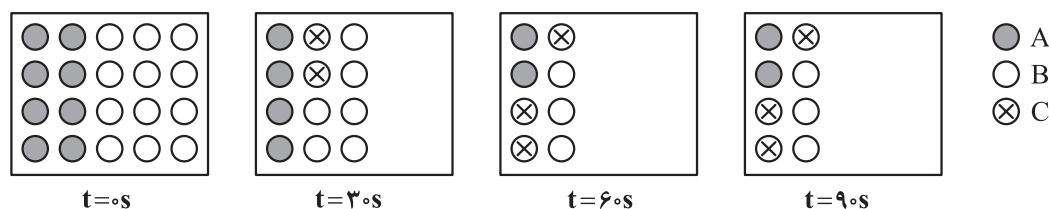
- (۱) ۱۶۳
(۲) ۲۸۹
(۳) ۵۲
(۴) ۴۰۱

۱۲۴- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) ΔH واکنش تشکیل متان از گرافیت و هیدروژن را نمی‌توان به روش تجربی تعیین کرد.
 (۲) فرایند فتوسنتز برخلاف فرایند انحلال کلسیم کلرید در آب، فرایندی گرماگیر است.
 (۳) انرژی حاصل از اکسایش یک گرم کربوهیدرات، کم‌تر از یک گرم چربی است.
 (۴) ارزش سوختی متان از متانول بیشتر، اما از اتن کم‌تر است.
 ۱۲۵- در جدول زیر شرایط انجام چند واکنش آمده است. در این شرایط، سرعت کدام واکنش نسبت به بقیه پایین‌تر است؟

واکنش	شرایط انجام واکنش
۱	واکنش پتاسیم با آب در دمای 10°C
۲	واکنش محلول‌های سدیم کلرید و نقره نیترات در دمای اتاق
۳	واکنش اتن با گاز کلر در حضور آهن (III) کلرید جامد
۴	واکنش پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای 25°C

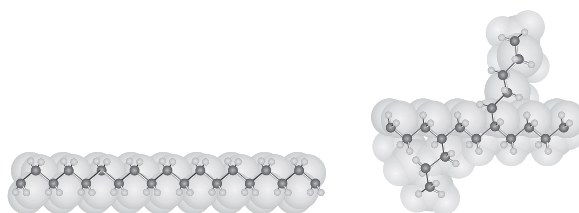
- (۱) واکنش (۱) (۲) واکنش (۲) (۳) واکنش (۳) (۴) واکنش (۴)
 ۱۲۶- دو ماده A و B در دمای ثابت در یک ظرف ۵ لیتری وارد می‌شوند. اگر شکل زیر، تغییرات شمار مول مواد را در واکنش $A + B \rightarrow C$ ، در بازه‌های زمانی متفاوت نشان دهد، کدام مورد درست است؟ (هر ذره معادل 0.5 مول است).



- (۱) اگر همه مواد، گازی باشند، رابطه $\frac{-\Delta[A]}{3\Delta t} = -\frac{\Delta[B]}{2\Delta t} = \frac{\Delta[C]}{\Delta t}$ ، برقرار است.
 (۲) سرعت واکنش برابر با 0.2 مول بر لیتر بر دقیقه است.
 (۳) غلظت فراورده در ثانیه 30 ام برابر 0.2 مولار است.
 (۴) در معادله موازنه‌شده واکنش، مجموع ضرایب مواد برابر ۶ و با یکای ثابت، سرعت واکنش در 30 ثانیه اول با 30 ثانیه دوم برابر است.

۱۲۷- کدام گزینه درست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, F = 19, Cl = 35.5 : g.mol^{-1}$)

- (۱) به تقریب ۱/۴۲ درصد جرم پلی‌وینیل کلرید را کلر تشکیل می‌دهد.
 - (۲) ویتامین D برخلاف ویتامین A یک ترکیب آروماتیک بوده و در ساختار مولکول هر دو ویتامین، گروه عاملی الکلی وجود دارد.
 - (۳) در مونومر تشکیل‌دهنده پلیمر سازنده سرنگ، شمار پیوندهای $C = C$ با شمار پیوندهای $C - C$ برابر است.
 - (۴) اختلاف جرم مولی مونومرهای تشکیل‌دهنده پتو و نخ دندان، برابر جرم مولی ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید است.
- ۱۲۸- کدام گزینه در مورد دو نوع پلی‌اتیلن داده‌شده، درست است؟



(الف)

(ب)

- (۱) (الف) شفاف است و نسبت به (ب) استحکام کمتری دارد.
- (۲) واکنش تولید هر دو پلیمر با کاهش آنتالپی همراه است.
- (۳) چگالی (ب) کمتر از چگالی (الف) است، از این رو (ب) برخلاف (الف)، بر روی آب، شناور می‌ماند.
- (۴) ساختار مونومر سازنده دو پلیمر با یکدیگر تفاوت دارد.

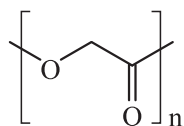
۱۲۹- شمار اتم‌های هیدروژن، در فرمول مولکولی استری یک‌عاملی، غیرحلقوی و سیرشده برابر ۱۸ است. بر این اساس

کدام مورد درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

- (۱) جرم مولی کربوکسیلیک اسید و الکل سازنده آن می‌تواند برابر باشد.
- (۲) اگر کربوکسیلیک اسید سازنده، بیشترین جرم مولی ممکن را داشته باشد، شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اسید برابر ۲۳ است.
- (۳) اگر مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسید سازنده برابر ۱۷ باشد، الکل سازنده استر به هر نسبتی در آب حل می‌شود.
- (۴) اگر نسبت جرم مولی الکل سازنده به کربوکسیلیک اسید سازنده، بیشترین مقدار باشد، اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی آن‌ها برابر ۱۵ است.

۱۳۰- با توجه به شکل زیر که واحد تکرارشونده یک پلیمر را نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



(۱) اگر n برابر $3,000$ باشد، جرم مولی پلیمر برابر 228×10^4 گرم خواهد بود.

(۲) اگر $n = 10^6$ باشد، ضریب استوکیومتری آب در معادله واکنش تولید پلیمر، به تقریب 10^6 است.

(۳) این پلیمر جزء دسته پلی‌استرها بوده و از واکنش الکل دوعاملی و اسید دوعاملی به دست آمده است.

(۴) تفاوت جرم مولی مونومر سازنده آن، با استیک اسید برابر ۱۲ گرم است.



پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

دانشود رایگان تمام آزمون های آزمایشی

در کانال تلگرام ما :

آزمونها آزمایشتی

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

سازمان پیش آموزش شور

حکومت سندھ

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

آکا

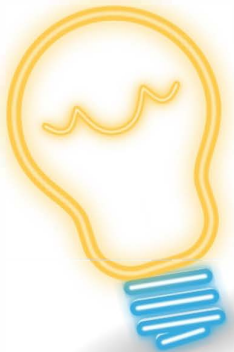
زبعتار

خدیجه
آزمون

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم چی

آزمونهای سراسر
گاج

join us ...



پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله پنجم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۴/مهر/۰۴

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

ویژگی‌های برنامۀ راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۱۴۰۴-۰۵

- ۱- دورۀ دروس پایه دهم
- ۲- دورۀ دروس پایه یازدهم
- ۳- مطالعۀ بخشی از دروس پایه دوازدهم
- ۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه	مرحله	اول ۲۰ تیر	دوم ۳ مرداد	سوم ۲۴ مرداد	چهارم ۱۴ شهریور	پنجم ۴ مهر
دهم	-	-	✓	✓	✓	✓
یازدهم	✓	✓	✓	✓	✓	✓
دوازدهم	-	-	-	✓	✓	-

با توجه به موارد فوق دفتر چه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۲ قسمت تشکیل شده است.

هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پنل کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.

آزمون مرحله پنجم (همین دفتر چه‌ای که در دست دارید) آزمون جمع‌بندی دروس پایه است.

تمامی سرفصل‌های دوازدهم، مجدداً در مهر، در برنامۀ راهبردی دیده شده است.



آزمون آزمائشی خیلی سبز

الناز علی یاری زاده	سرپرست تولید
نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی الهه صفری - زهرا صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی فرد - مهر آسا قدیری - زهرا فرهادی مهر نادره ناز آوری - ساعده نمازی	ویراستاران فنی
مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور	رسام
صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی	صفحه آرایی



پایه دهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - سوگند روشنی - علی شهبازی محمد گودرزی - سروش موئینی - محمدسجاد نقیه
هندسه (۱)	امیرحسین ابومحبوب - سید محمدرضا حسینی فرد - حمید گلزاری - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری
فیزیک (۱)	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی (۱)	علی رفیعی - یاسر عبداللہی - امیر قاسمی پور - محمد قهرمانی نژاد - امیرحسین مسلمی سید علی ناظمی - عرفان نریمانی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	فرشاد حسن زاده	عادل حسینی محمدمهدی حسینی منصور زرکش اصفهانی
هندسه (۱)	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب کیوان صرمی	مریم نظری	ملیحه حاجی بابا سید عباس حسینی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک (۱)	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	امین امینی	امین امینی	مسعود خندانی پوریا علاقه مند مریم گلی حسنلو امیر محمودی انزابی
شیمی (۱)	یاسر عبداللہی	مرتضی نصیرزاده	وحید فارسیان	محمدمهدی کریمیان	بنیامین تجلی یلدا رزاق زاده ماهان فنی فر محمدمهدی کریمیان

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ریاضی دهم

اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$ و $t \in A'$ باشد، $y = |t+3| - |t-1|$ می‌تواند بپذیرد، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (صفر)

۲ (۴-)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اول نمودارش رو رسم کن و بعد دامنه‌اش رو محدود به A' کن!

Hint

درس‌Box

متمم یک مجموعه

اگر مجموعه A زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع U باشد، متمم A (با نماد A') شامل تمام اعضای U است که در A قرار ندارند: $A' = U - A$

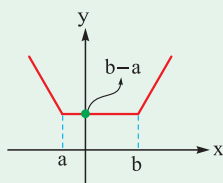
انواع بازه

بازه، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است که تمام اعداد بین دو عدد را شامل می‌شود. فرض کنید $a < b$ باشد، داریم:

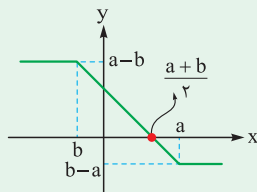
نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
باز	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	

نمودار دو تابع معروف شامل قدرمطلق به صورت زیر است:

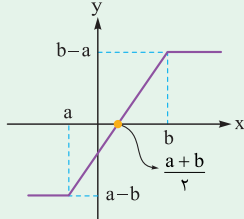
نمودار تابع $f(x) = |x-a| + |x-b|$ به شرط $(a < b)$ به شکل زیر است:



اگر $a > b$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ به صورت زیر است:



اگر $a < b$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ به صورت زیر است:

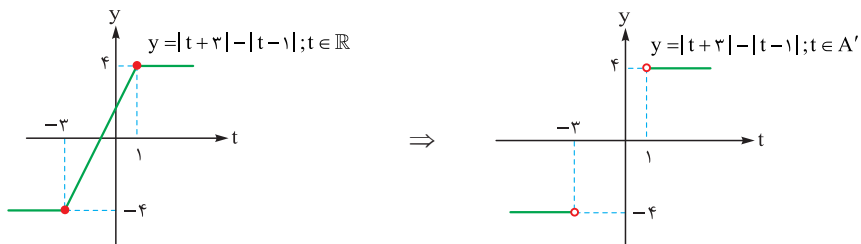


نکته

گام اول: ابتدا با توجه به مجموعه A و مجموعه مرجع یعنی $\mathbb{R}$ ، مجموعه A' را مشخص می‌کنیم:

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ یا } x > 1\} = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

گام دوم: حال نمودار تابع $y = |t+3| - |t-1|$ را ابتدا برای $t \in \mathbb{R}$ رسم کرده و سپس به کمک آن برای $t \in A'$ را مشخص می‌کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار مقادیری که y می‌تواند بپذیرد $\{4, -4\}$ است و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$4 + (-4) = 0$$

تعداد اعضای مجموعه‌های غیر تهی $A \cap B$ ، $A - B$ ، $B - A$ و $(A \cup B)'$ در مجموعه مرجع U با همین ترتیب تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ می‌دهند. اگر $n(U) \leq 200$ باشد، تعداد اعضای مجموعه $A \cap B$ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

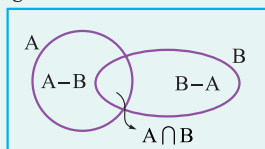
۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه: طبق نمودار ون زیر، $n(A \cup B)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \end{aligned}$$

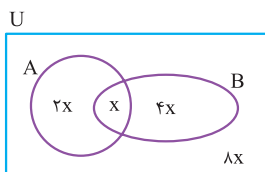
همچنین داریم:

$$\begin{cases} n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \\ n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \end{cases}$$

گام اول: دنباله گفته شده، دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ است. پس اگر جمله اول آن را x (که $n(A \cap B)$ است) در نظر بگیریم، جملات اولیه این دنباله به صورت $x, 2x, 4x, 8x, \dots$ خواهد شد. حال طبق فرض سؤال و روابط درس باکس داریم:

$$\begin{cases} n(A \cap B) = x \\ n(A - B) = 2x \\ n(B - A) = 4x \\ n((A \cup B)') = 8x \end{cases}$$

که می‌توانیم برای سادگی نمودار زیر را در نظر بگیریم:



گام دوم: مجموع هر چیزی که در نمودار بالا می‌بینید، باید برابر $n(U)$ باشد:

$$\Rightarrow n(U) = 2x + x + 4x + 8x = 15x$$

و طبق فرض باید برابر ۲۰۰ یا کوچک‌تر از آن باشد:

$$\Rightarrow 15x \leq 200 \Rightarrow x \leq \frac{200}{15} = \frac{40}{3} \Rightarrow x \leq 13 \frac{1}{3}$$

x عدد طبیعی است و می‌تواند اعداد ۱ تا ۱۳ را بپذیرد که ۱۳ مقدار مختلف است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

a_n جمله n ام یک دنباله حسابی غیر ثابت است. اگر $a_3, a_6, 2a_1$ با همین ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار m در تساوی $a_m = 2a_5$ کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

سه جمله دنباله حسابی که تشکیل دنباله هندسی دهن، یعنی مربع جمله وسطی برابر با حاصل ضرب دو جمله دیگر است. از این رابطه «واسطه هندسی» استفاده کن تا به ارتباط بین جمله اول و قدرنسبت پیدا کنی.

Hint

درسی Box

دنباله حسابی	دنباله هندسی	
تعریف	هر جمله با اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله قبل به دست می آید.	هر جمله با ضرب شدن در یک عدد ثابت در جمله قبل به دست می آید.
مقدار ثابت	قدرنسبت (d) $d = a_{n+1} - a_n$	قدرنسبت (r) $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
جمله عمومی	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
واسطه (میانگین)	اگر a, b, c سه جمله متوالی باشند، b واسطه حسابی است: $b = \frac{a+c}{2}$	اگر a, b, c سه جمله متوالی باشند، b واسطه هندسی (میانگین هندسی) است: $b^2 = ac$

گام اول: فرض کنید d قدرنسبت دنباله حسابی باشد. با توجه به رابطه واسطه هندسی داریم:

$$a_6^2 = 2a_1 \times \frac{1}{2}a_3$$

حالا با توجه به جمله عمومی دنباله حسابی، مقادیر جملات را در این رابطه جای گذاری می کنیم:

$$a_6^2 = (2a_1) \times \left(\frac{1}{2}a_3\right) \Rightarrow a_6^2 = a_1 \times a_3$$

$$\Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 4d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 6a_1d + 8d^2$$

$$\Rightarrow a_1d = 4d^2 \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = 4d$$

گام دوم: حال طبق رابطه به دست آمده و تساوی داده شده داریم:

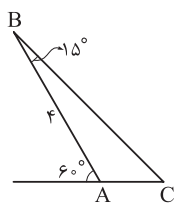
$$a_m = 2a_5 \Rightarrow a_1 + (m-1)d = 2(a_1 + 4d)$$

$$\xrightarrow{a_1=4d} 4d + (m-1)d = 2(4d + 4d)$$

$$\Rightarrow (m+3)d = 16d \xrightarrow{d \neq 0} m+3 = 16 \Rightarrow m = 13$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴ در شکل زیر محیط مثلث کدام است؟



(۱) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2$

(۲) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2$

(۳) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 4$

(۴) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + 4$

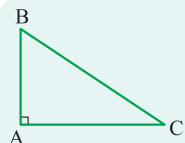
پاسخ: گزینه ۲

با پیدا کردن همه زوایای داخلی مثلث شروع کن. بعدش کشیدن یه ارتفاع کار رو تموم می کنه!

Hint

درس Box

در مثلث قائم الزاویه ABC نسبت های اصلی به صورت زیر تعریف می شوند:



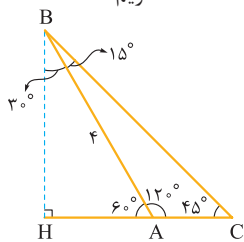
• سینوس: $\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$

• کسینوس: $\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$

• تانژانت: $\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$

• کتانژانت: $\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \Rightarrow \cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$

گام اول: ابتدا با رسم ارتفاع BH، دو مثلث قائم الزاویه BHC و ABH را ایجاد می کنیم و در مثلث ABH داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{4} \Rightarrow BH = 2\sqrt{3}, \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2$$

گام دوم: حال مطابق شکل و زوایا، چون مثلث BHC قائم الزاویه متساوی الساقین است، $CH = 2\sqrt{3}$ و با استفاده از فیثاغورس در مثلث BHC داریم:

$$BH^2 + CH^2 = BC^2 \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 24 \Rightarrow BC = 2\sqrt{6}$$

گام سوم: حال برای محاسبه محیط مثلث ABC داریم:

$$AB + BC + AC = 4 + 2\sqrt{6} + (CH - AH) = 4 + 2\sqrt{6} + (2\sqrt{3} - 2) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵ اگر $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

۰/۷۲۸ (۲)

۰/۷۲۹ (۱)

۰/۷۲۴ (۴)

۰/۷۲۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

 Hint

رابطه اصلی مثلثات، یعنی $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ این جا شاه کلیده. سعی کن از معادله داده شده، سینوس رو بر حسب کسینوس بنویسی و در این رابطه جای گذاری کنی.

 پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا از رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و فرض سؤال می توان نوشت:

$$\sin x = 2 + 2 \cos x \Rightarrow (2 + 2 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 4 + 8 \cos x + 4 \cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 5 \cos^2 x + 8 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow (\cos x + 1)(5 \cos x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 & \text{غیر قابل قبول زیرا مخرج کسر صفر می شود} \\ \cos x = -\frac{3}{5} & \checkmark \end{cases}$$

گام دوم: حال با داشتن مقدار $\cos x$ مقدار $\sin x$ را مشخص کرده و خواسته سؤال را محاسبه می کنیم:

$$\sin x = 2 + 2 \cos x = 2 + \frac{-6}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x - \cos^3 x = \left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{64 + 27}{125} = \frac{91}{125} = \frac{728}{1000} = 0.728$$



۶ حاصل عبارت $A = \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 2^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \cot 89^\circ}$ کدام است؟

۴۵ / ۵ (۴)

۴۵ (۳)

۴۴ / ۵ (۲)

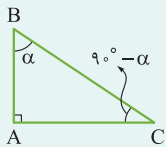
۴۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

جمله اول رو با جمله آخر، و دومی رو با یکی مونده به آخر کنار هم بنذار و ادامه بده! از رابطه کتانژانت زاویه‌های متمم (مثل ۱ و ۸۹ درجه) استفاده کن، به چیز جالبی کشف می‌کنی.

Hint

درس Box



با توجه به تعاریف نسبت‌های مثلثاتی، می‌توان رابطه‌های زیر را بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم برقرار کرد:

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \cot(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$$

$$\cot \alpha = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$$

● اگر دو زاویه، متمم یک دیگر باشند، سینوس هر کدام با کسینوس دیگری برابر است و تانژانت هر کدام با کتانژانت دیگری برابر است.

نکته

● اگر a و b معکوس هم باشند، همواره داریم:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = 1$$

گام اول: ابتدا عبارت داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A = \left(\frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 89^\circ} \right) + \left(\frac{1}{1 + \cot 2^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 88^\circ} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1 + \cot 44^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 46^\circ} \right) + \frac{1}{1 + \cot 45^\circ}$$

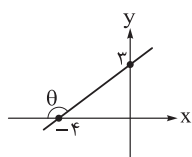
گام دوم: حال با توجه به این که در هر دسته زوایا متمم هم هستند، داریم:

$$\frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 89^\circ} = \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 1^\circ} = \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cot 1^\circ}} = \frac{1}{1 + \cot 1^\circ} + \frac{\cot 1^\circ}{1 + \cot 1^\circ} = 1$$

گام سوم: به طور مشابه حاصل بقیه دسته‌ها نیز برابر ۱ می‌شود و داریم:

$$A = 44 \times 1 + \frac{1}{1 + \cot 45^\circ} = 44 + \frac{1}{2} = 44 \frac{1}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\begin{aligned} & \frac{4}{5} \quad (2) \\ & -\frac{3}{4} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{5} \quad (1) \\ & \frac{3}{4} \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

شیب خط همون تانژانت زاویه‌ایه که خط با جهت مثبت محور X می‌سازه. اول شیب خط رو از روی دو نقطه‌ش حساب کن، بعد از روابط مثلثاتی استفاده کن تا عبارتی که ازت خواسته رو پیدا کنی.

درس‌Box

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

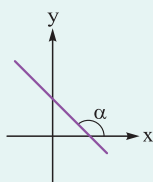
شیب خط (m) برابر است با تانژانت زاویه‌ای (α) که آن خط با جهت مثبت محور X می‌سازد:

$$m = \tan \alpha$$

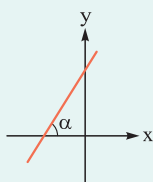
این زاویه α همواره در بازه $(0^\circ, 180^\circ)$ در نظر گرفته می‌شود.

● اگر شیب خط مثبت باشد ($m > 0$)، زاویه α یک زاویه تند خواهد بود ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

● اگر شیب خط منفی باشد ($m < 0$)، زاویه α یک زاویه باز خواهد بود ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).

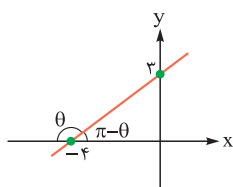


$$m = \tan \alpha < 0$$



$$m = \tan \alpha > 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه با جهت مثبت محور X ها، داریم:



$$\Rightarrow \tan(\pi - \theta) = \frac{3}{4} \Rightarrow -\tan \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

گام دوم: حال با توجه به این‌که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ است، مقدار عبارت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4} \Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \xrightarrow{90^\circ < \theta < 180^\circ} \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \theta = \frac{4}{5}$$

اگر اعداد $x + 44$ و $x - 45$ مربع کامل باشند، مجموع ارقام عدد طبیعی x کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

 Hint

اون دوتا عبارت رو مساوی a^2 و b^2 بذار و بعد دوتا معادله رو از هم کم کن. اتحاد مزدوج این جا به کارت میاد، مخصوصاً که اون طرف تساوی یه عدد اوله.

گام اول: ابتدا فرض می کنیم $x + 44 = b^2$ و $x - 45 = a^2$ که $a, b \in \mathbb{N}$ و $b > a$ در نتیجه به کمک اتحاد مزدوج می توان نوشت:

$$b^2 - a^2 = 89 \Rightarrow (b - a)(b + a) = 89$$

گام دوم: از آن جا که a و b اعداد صحیح هستند، بنابراین $(b - a)$ و $(b + a)$ نیز باید مقسوم علیه های ۸۹ باشند. چون ۸۹ عددی اول است، می توان نوشت:

$$\begin{cases} b + a = 89 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 45, a = 44$$

گام سوم: برای مشخص کردن مجموع ارقام x داریم:

$$x + 44 = b^2 \Rightarrow x + 44 = 45^2 \Rightarrow x = 1981$$

$$x \text{ مجموع ارقام } x: 1 + 9 + 8 + 1 = 19$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۹ اگر در تساوی $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right) = \frac{m}{n}$

اعداد طبیعی m و n نسبت به هم اول باشند، حاصل $m + n$ کدام است؟

۷۴ (۴)

۷۳ (۳)

۷۲ (۲)

۷۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

صورت و مخرج کسرها خیلی شبیه هم هستند. اون قسمت مشترک و تکراری رو به اسم براش بذار (مثلاً A) و عبارت رو بازنویسی کن، می‌بینی چه قدر ساده می‌شه.

 Hint

گام اول: ابتدا برای جلوگیری از نوشتن‌های تکراری، بخش‌های مشترک را با متغیر نشان می‌دهیم و سپس عبارت را بازنویسی می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left(A + \frac{1}{n}\right)(1 + A) - \left(1 + A + \frac{1}{n}\right)(A)$$

گام دوم: حال با ضرب کردن عبارت‌ها داریم:

$$\left(A + A^2 + \frac{1}{n} + \frac{A}{n}\right) - \left(A + A^2 + \frac{A}{n}\right) = \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

گام سوم: طبق فرض سؤال m و n اعداد طبیعی هستند و نسبت به هم اول‌اند، پس $m = 1$ و $n = 72$ و در نتیجه $m + n = 73$ است.

 پاسخ خیلی تشریحی

۱۰ معادله $x^2 + \frac{1}{x^2} = x + \frac{1}{x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۴ (صفر)

۳ (۴)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

از تغییر متغیر استفاده کن. اگر $t = x + \frac{1}{x}$ رو در نظر بگیری، می‌تونی $x^2 + \frac{1}{x^2}$ رو هم برحسب t بنویسی و معادله‌ت خیلی ساده‌تر می‌شه.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک تغییر متغیر $t = x + \frac{1}{x}$ ، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\Rightarrow t^2 - 2 = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ یا } 2$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده برای t داریم:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 & \text{یک جواب} \\ x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 & \text{بدون جواب} \end{cases}$$

در نتیجه معادله اصلی تنها یک جواب دارد.

۱۱ اگر محور تقارن سهمی $y = (m+2)x^2 + (2m-3)x + (1-m)$ خط $x = -\frac{3}{10}$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

- (۱) $-\frac{129}{40}$ (۲) $\frac{117}{80}$ (۳) $\frac{201}{40}$ (۴) $-\frac{57}{80}$

پاسخ: گزینه ۱

Hint اول معادله رو به شکل استاندارد سهمی یعنی $y = \dots$ مرتب کن. بعد از فرمول طول رأس سهمی $(x = -\frac{b}{2a})$ استفاده کن تا مقدار m رو پیدا کنی.

سهمی

نمودار معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ (به شرط $a \neq 0$)، یک سهمی است. جهت دهانه سهمی به علامت a بستگی دارد. بلندترین یا پست‌ترین نقطه در سهمی، رأس آن نامیده می‌شود و خط عمودی گذرنده از آن، محور تقارن است.



رأس و خط تقارن سهمی

برای سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$:

● معادله محور تقارن، خط $x = -\frac{b}{2a}$ است.

● مختصات رأس سهمی، نقطه $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ می‌باشد. (که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ است).

پاسخ خیلی تشریحی گام اول: ابتدا معادله سهمی داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+2)x^2 + (2m-3)x - 6 = (m-1)y$$

$$\Rightarrow y = (\frac{m+2}{m-1})x^2 + (\frac{2m-3}{m-1})x - \frac{6}{m-1} \quad (*)$$

گام دوم: رأس سهمی روی محور تقارن قرار دارد؛ بنابراین:

$$x_s = -\frac{3}{10} \xrightarrow{x_s = -\frac{b}{2a}} \frac{-(2m-3)}{\frac{2(m+2)}{m-1}} = -\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{2m-3}{2m+4} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 20m - 30 = 6m + 12 \Rightarrow 14m = 42 \Rightarrow m = 3$$

گام سوم: حال با جای گذاری مقدار m ضابطه سهمی را می‌نویسیم و با قراردادن طول رأس سهمی، مقدار عرض آن را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(*)} y = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 3 \xrightarrow{x = -\frac{3}{10}} \frac{5}{2} \times \frac{9}{100} - \frac{9}{20} - 3 = \frac{45}{200} - \frac{90}{200} - \frac{600}{200} = -\frac{645}{200} = -\frac{129}{40}$$

رأس سهمی $y = g(x)$ بر رأس سهمی $f(x) = x^2 - 4x - 3$ منطبق است. اگر سهمی $y = g(x)$ محور y را در نقطه‌ای به عرض -3 قطع می‌کند، طول نقطه دیگر برخورد این سهمی با خط $y = -3$ برابر کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

Hint

اول مختصات رأس سهمی f رو پیدا کن. طبق صورت سؤال، این رأس روی سهمی g قرار داره و g از نقطه دیگه‌ای هم می‌گذره. با استفاده از خاصیت تقارن سهمی، می‌تونی نقطه سوم رو به راحتی پیدا کنی.

نکته

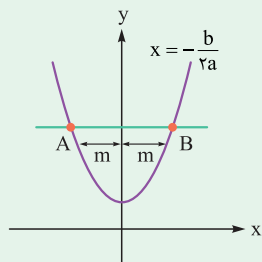
تقارن در سهمی

● محور تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ خط عمودی $x = -\frac{b}{2a}$ است. این خط، نمودار سهمی را به دو قسمت کاملاً قرینه تقسیم می‌کند.

● ویژگی اصلی تقارن این است که نقاطی با عرض (ارتفاع) یکسان، فاصله یکسانی از محور تقارن دارند. به عبارت دیگر، اگر دو نقطه روی سهمی دارای عرض یکسان باشند، طول‌های آن‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - m, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + m$$

که در آن m فاصله هر یک از این نقاط تا محور تقارن است.



گام اول: از روی ضابطه f ، رأس سهمی g را مشخص می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی**

$$x_{S_f} = x_{S_g} = 2 \Rightarrow y_{S_f} = y_{S_g} = 4 - 8 - 3 = -7 \Rightarrow S_g(2, -7)$$

گام دوم: حال با توجه به این که نمودار تابع g محور y را در نقطه $(0, -3)$ قطع می‌کند، برای مشخص کردن طول نقطه دیگر هم عرض طبق نکته داریم:

طول نقطه هم عرض

$$x_s = \frac{0 + x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{0 + x}{2} \Rightarrow x = 4$$



۱۳ اگر جدول تعیین علامت تشکیل شده برای حل نامعادله $\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + x + b^2 + 1} < a$ به صورت زیر باشد، حاصل $a + b$ کدام می تواند باشد؟

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$+\infty$
		+	-
	-۵ (۴)	۵ (۳)	-۴ (۲)
			۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint جدول تعیین علامت فقط یک ریشه داره و مخرج هم همیشه مثبت. این یعنی صورت کسر باید یک عبارت درجه اول باشه (ضریب x^2 صفر نباشه) و ریشهش هم همون عددی باشه که توی جدول اومده.

نکته Box

تعیین علامت عبارت های جبری

(۱) تعیین علامت عبارت درجه اول $(ax + b)$

ابتدا ریشه عبارت را از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آوریم. سپس جدول تعیین علامت را رسم می کنیم. در سمت راست ریشه، علامت عبارت موافق علامت ضریب a و در سمت چپ، مخالف علامت a است.

(۲) تعیین علامت عبارت درجه دوم $(ax^2 + bx + c)$

علامت این عبارت به مقدار دلتا $(\Delta = b^2 - 4ac)$ بستگی دارد:

• اگر $\Delta > 0$ باشد: معادله، دو ریشه حقیقی x_1 و x_2 دارد. علامت عبارت در بازه بین دو ریشه، مخالف علامت a و در خارج از دو ریشه، موافق علامت a است.

• اگر $\Delta = 0$ باشد: معادله، یک ریشه مضاعف x_1 دارد. علامت عبارت در همه جا موافق علامت a است، به جز در خود ریشه که مقدار عبارت صفر است.

• اگر $\Delta < 0$ باشد: معادله، ریشه حقیقی ندارد. علامت عبارت در همه جا و همواره موافق علامت a است.

در حالت $\Delta \leq 0$ عبارت همواره هم علامت با a (یا صفر) است و هرگز علامت مخالف a را به خود نمی گیرد.

(۳) تعیین علامت حاصل ضرب و تقسیم عبارت ها

برای تعیین علامت یک عبارت کسری یا حاصل ضرب چند عبارت، مراحل زیر را طی می کنیم:

(۱) ابتدا ریشه تمام عبارت های موجود در صورت و مخرج را به دست می آوریم.

(۲) جدول تعیین علامت را برای تک تک عبارت ها در سطرها جداگانه رسم می کنیم.

(۳) در نهایت، با در نظر گرفتن علامت ها در هر بازه، علامت عبارت کل را با توجه به قوانین ضرب و تقسیم علامت ها تعیین می کنیم.

(۴) **نکته** در نقاطی که مخرج کسر صفر می شود، کل عبارت تعریف نشده است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا نامعادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + x + b^2 + 1} - a < 0 \Rightarrow \frac{(3-a)x^2 - (2+a)x + 3 - ab^2 - a}{x^2 + x + b^2 + 1} < 0$$

گام دوم: حال با توجه به این که عبارت مخرج همواره مثبت (زیرا Δ ی آن $3 - 4b^2 - 4$ و منفی است) و جدول تعیین علامت دارای یک ریشه است که تغییر علامت در اطراف آن رخ داده، پس عبارت صورت، یک عبارت درجه اول است:

$$3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$$

گام سوم: با جای گذاری a و توجه به این که $x = -\frac{3}{5}$ ریشه آن است، داریم:

$$P(x) = -5x + 3 - 3b^2 - 3 \Rightarrow P(-\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow 3 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \Rightarrow a + b = 4 \\ b = -1 \Rightarrow a + b = 2 \end{cases}$$

۱۴ فرض کنید $f(\sin \alpha + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}) = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} - \sin \alpha$ باشد. اگر $f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{3}) + f(m) = 4/7$ باشد، مقدار m کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{6}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

Hint عبارت داخل پرانتز f رو ببین. اگر در مزدوجش ضرب و تقسیمش کنی، به یه شکل خیلی ساده‌تر می‌رسی و می‌فهمی ضابطه تابع f واقعاً چی بوده.



روش‌های گویا کردن!

● **مخرج تک‌جمله‌ای رادیکالی:** اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم تا توان عبارت زیر رادیکال با فرجه برابر شده و رادیکال حذف شود.

● **مخرج‌های دو جمله‌ای با جذر:** اگر مخرج کسر یکی از حالت‌های $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ یا $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ را داشت، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم، یعنی کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا با استفاده از اتحاد $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ رادیکال‌ها از بین بروند.

● **مخرج‌های دو جمله‌ای با ریشه سوم:** برای مخرج‌هایی مانند $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ ، از اتحاد‌های چاق و لاغر (مجموع و تفاضل مکعبات) کمک بگیرید.

● **مخرج‌های پیچیده‌تر:** در مواردی که مخرج سه جمله یا رادیکال‌هایی با فرجه بالاتر دارد، می‌توان با دسته‌بندی مناسب جملات، از روش اتحاد مزدوج به صورت چندمرحله‌ای استفاده کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با ضرب و تقسیم $\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} - \sin \alpha$ در مزدوج آن داریم:

$$\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \times \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha}$$

گام دوم: با جای‌گذاری عبارت به‌دست‌آمده در ضابطه تابع f داریم:

$$f(\sin \alpha + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

توجه! با توجه به این‌که محدوده عبارت $\sin \alpha + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$ بازه $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$ است، ضابطه تابع f را فقط در این بازه داریم و اطلاعاتی از این تابع در $[-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1]$ نداریم.

گام سوم: با توجه به ضابطه ساده‌شده تابع f برای مشخص کردن مقدار m می‌توان نوشت:

$$f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{3}) + f(m) = 4/7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{m} = 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

$$\xrightarrow{f(x) = \frac{1}{x}} 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{m} = \frac{47}{10} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \Rightarrow m = \frac{5}{6}$$

۱۵ اگر $f(x) = (ax+1)(b-3x) + 6x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، مساحت سطح محصور به نمودار تابع $g(x) = -bx + 1$ و محورهای مختصات کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تابع f ثابت، یعنی ضریب x^2 و ضریب x بعد از ساده سازی باید صفر بشن. از این دو شرط برای پیدا کردن a و b استفاده کن.

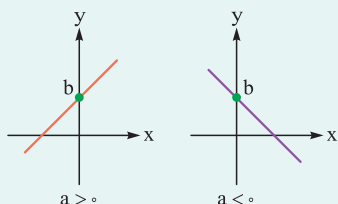
Hint

درس Box

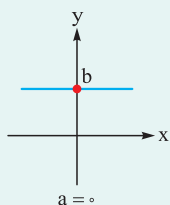
توابع خطی و ثابت

تابعی با ضابطه $f(x) = ax + b$ را تابع خطی می نامند. نمودار این تابع، خطی با شیب a و عرض از مبدأ b است.

• اگر $a \neq 0$: برد تابع مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است.



• اگر $a = 0$: تابع به شکل $f(x) = b$ درآمده و تابع ثابت نامیده می شود. برد این تابع، مجموعه تک عضوی $\{b\}$ است و نمودار آن خطی افقی می باشد.



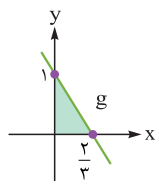
گام اول: ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$f(x) = (ab-3)x - 3ax^2 + b + 6x^2 = (6-3a)x^2 + (ab-3)x + b$$

گام دوم: حال با توجه به این که f تابعی ثابت است، داریم:

$$\begin{cases} 6-3a=0 \Rightarrow a=2 \\ ab-3=0 \Rightarrow 2b-3=0 \Rightarrow b=\frac{3}{2} \end{cases}$$

گام سوم: حال با جای گذاری مقدار b در ضابطه تابع g و رسم نمودار آن، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع g و محورهای مختصات را مشخص می کنیم:



$$S = \frac{1 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۶ اگر برد تابع $f(x) = a - (x - b)^2$ بازه $(-\infty, 4]$ باشد و نمودار آن نیز از نقطه $(2, 3)$ عبور کند، برد تابع

$$g(x) = |x - a| - \frac{b}{3} \quad \text{کدام است؟ } (b > 1)$$

(۲) $[-1, +\infty)$

(۱) $[1, +\infty)$

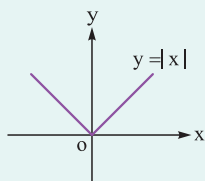
(۴) $[-3, +\infty)$

(۳) $[3, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۲

Hint بُرد یک سهمی رو به پایین، از عرض رأسش شروع می‌شود و تا منفی بی‌نهایت می‌رود. از این نکته و نقطه‌ای که بهت داده شده برای پیدا کردن a و b استفاده کن.

تابع قدرمطلق تابعی است که هر عضو دامنه خود را به مقدار قدرمطلق آن نسبت می‌دهد. نمایش جبری این تابع به صورت $f(x) = |x|$ است. نمودار آن به شکل حرف V انگلیسی است که رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد.



تابع قدرمطلق را می‌توان به صورت یک تابع قطعه‌ای نیز نمایش داد:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

انتقال نمودار توابع

برای رسم نمودارهای جدید، می‌توانیم از نمودار توابع پایه و انتقال آن‌ها استفاده کنیم. با فرض $k > 0$:

انتقال عمودی:

✓ نمودار $y = f(x) + k$ همان نمودار $f(x)$ است که k واحد به بالا منتقل شده است.

✓ نمودار $y = f(x) - k$ همان نمودار $f(x)$ است که k واحد به پایین منتقل شده است.

انتقال افقی:

✓ نمودار $y = f(x - k)$ همان نمودار $f(x)$ است که k واحد به راست منتقل شده است.

✓ نمودار $y = f(x + k)$ همان نمودار $f(x)$ است که k واحد به چپ منتقل شده است.

مثال با استفاده از این قوانین، نمودار تابع $g(x) = |x - 2| + 3$ را می‌توان با انتقال نمودار پایه $f(x) = |x|$ به اندازه دو واحد به راست و سه واحد به بالا رسم کرد.

• اگر نقطه $S(x_s, y_s)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ باشد، می‌توان ضابطه آن را به صورت $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ نوشت.

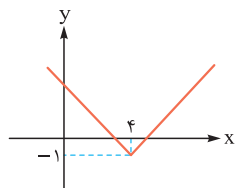
• برد تابع درجه دوم از مقدار عرض رأس سهمی به قبل یا به بعد با توجه به جهت دهانه سهمی می‌باشد.

گام اول: با توجه به برد تابع f و ضابطه آن می‌توان نتیجه گرفت که $a = 4$. همچنین نمودار تابع f از نقطه $(2, 3)$ عبور می‌کند، بنابراین:

$$f(x) = 4 - (x - b)^2 \xrightarrow{(2, 3) \in f} 3 = 4 - (2 - b)^2 \Rightarrow (2 - b)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - b = 1 \Rightarrow b = 1 \\ 2 - b = -1 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \quad \text{طبق فرض سؤال غیر قابل قبول است.} \quad \checkmark$$

گام دوم: حال با دانستن مقادیر b و a ، نمودار تابع g ، یعنی $g(x) = |x - 4| - 1$ را رسم می‌کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار رسم شده، برد تابع g به صورت $[-1, +\infty)$ است.

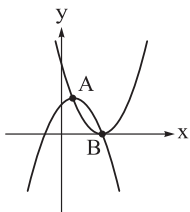
Hint

درس Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر نقاط A و B رئوس سهمی‌ها هستند. اگر معادله سهمی‌ها $y = -2x^2 + 4x + 6$ و $y = ax^2 + bx + c$ باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟



(۱) ۳۲

(۲) ۳۰

(۳) ۳۴

(۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۱



اول تشخیص بده معادله داده شده مال کدام سهمیه (دهانه بالا یا پایین؟). بعد رأس اون (نقطه A) و یکی از ریشه‌هاش (نقطه B) رو پیدا کن. حالا B رأس سهمی دومه و A یه نقطه روی اون. با این اطلاعات معادله سهمی دوم رو بنویس.

درس‌Box

شکل‌های مختلف معادله سهمی

(۱) معادله سهمی با استفاده از رأس (فرم استاندارد)

هر سهمی را می‌توان با معادله $y = a(x - h)^2 + k$ نمایش داد.

● در این حالت، رأس سهمی نقطه (h, k) است.

● خط $x = h$ محور تقارن آن است.

● اگر $a > 0$ رأس پایین‌ترین نقطه و اگر $a < 0$ رأس بالاترین نقطه سهمی است.

(۲) معادله سهمی با استفاده از ریشه‌ها (نقاط برخورد با محور x)

بسته به این‌که سهمی محور x را در چند نقطه قطع کند، معادله آن را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت (به شرط $a \neq 0$):

حالت اول: سهمی محور x را در دو نقطه x_1 و x_2 قطع می‌کند.

● معادله: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

● محور تقارن: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

حالت دوم: سهمی بر محور x در یک نقطه x_1 مماس است.

● معادله: $y = a(x - x_1)^2$

● محور تقارن: $x = x_1$ (در این حالت، رأس سهمی روی محور x قرار دارد).

گام اول: با توجه به این‌که ضریب x^2 در معادله سهمی داده شده منفی است، پس معادله مربوط به سهمی است که دهانه آن رو به پایین است.

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این مختصات نقطه A که رأس آن و مختصات نقطه B که صفر آن است، مشخص می‌کنیم:

$$x_A = \frac{-4}{-4} = 1 \Rightarrow y_A = 8 \Rightarrow A(1, 8)$$

$$-2x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_B > 0} x_B = 3 \Rightarrow B(3, 0)$$

گام دوم: حال به کمک نقطه B که رأس سهمی دوم است و نقطه A که روی آن قرار دارد، معادله سهمی دوم را مشخص می‌کنیم:

$$y_2 = a(x - 3)^2 \xrightarrow{(1, 8) \in y_2} a(1 - 3)^2 = 8 \Rightarrow a = 2$$

گام سوم: حالا معادله سهمی را به فرم مفروض سؤال می‌نویسیم:

$$y_2 = 2(x^2 - 6x + 9) \Rightarrow y_2 = 2x^2 - 12x + 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 18 \end{cases} \Rightarrow a - b + c = 2 + 12 + 18 = 32$$

با استفاده از ارقام ۸، ۷، ۵، ۳، ۲، ۰ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و بزرگ‌تر از ۳۵۰۰ می‌توان ساخت؟

۱۸۰ (۴)

۲۱۶ (۳)

۱۹۲ (۲)

۲۰۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

برای این که عدد از ۳۵۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید به رقم هزارگان و صدگان دقت کنی. مسئله رو به چند حالت تقسیم کن: حالتی که رقم اول ۵، ۷ یا ۸ باشد و حالتی که رقم اول ۳ باشد.

 Hint

 درس Box

اصول شمارش (جمع و ضرب)

در بسیاری از مسائل، به جای شمردن مستقیم تعداد حالت‌ها، از دو اصل اساسی شمارش یعنی اصل جمع و اصل ضرب استفاده می‌کنیم. این روش‌ها به ما کمک می‌کنند تا بدون نیاز به فهرست کردن تمام حالات ممکن، تعداد آن‌ها را محاسبه کنیم.

اصل جمع

کاربرد: زمانی که برای انجام کاری، چند انتخاب جایگزین و جدا از هم پیش رو داریم و می‌خواهیم فقط یکی از این انتخاب‌ها را عملی کنیم.

قانون: تعداد کل روش‌های ممکن، برابر است با مجموع تعداد روش‌های هر انتخاب.

$$\text{تعداد کل حالات} = m_1 + m_2 + \dots + m_k$$

اصل ضرب

کاربرد: زمانی که انجام یک کار، شامل چند مرحله متوالی و پی در پی است و برای تکمیل آن کار، باید تمام مراحل انجام شوند.

قانون: تعداد کل روش‌های ممکن، برابر است با حاصل ضرب تعداد روش‌های هر مرحله.

$$\text{تعداد کل حالات} = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$$

گام اول: ابتدا حالاتی را حساب می‌کنیم که رقم هزارگان آن‌ها ۵ یا ۷ یا ۸ باشد:

$$\underline{3} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} = 180$$

{ارقام غیرتکراری} {۵، ۷، ۸}

گام دوم: حال حالاتی را حساب می‌کنیم که رقم هزارگان ۳ و رقم صدگان بزرگ‌تر مساوی ۵ باشد:

$$\underline{1} \times \underline{3} \times \underline{4} \times \underline{3} = 36$$

{ارقام غیرتکراری} {۵، ۷، ۸} {۳}

$$180 + 36 = 216$$

گام سوم: بنابراین تعداد کل اعداد برابر است با:

 پاسخ خیلی تشریحی

با حروف کلمه SABZ چند کلمه ده حرفی می توان ساخت که دو حرف S و B مجاور نباشند، دو حرف A و Z هم مجاور نباشند و هیچ دو حرف مجاور هم یکسان نباشد؟

۲۱۴ (۴)

۲۱۲ (۳)

۲۱۱ (۲)

۲۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

 Hint

به شرطهای مسئله دقت کن. این شرطها باعث می شن که حروف مجبور باشن از دو دسته خاص، به صورت یکی درمیان انتخاب بشن. اون دو دسته رو پیدا کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که شروط مسئله حروف کلمه را به دو دسته $\{B, S\}$ و $\{A, Z\}$ تقسیم می کند.

گام دوم: حال بررسی می کنیم بعد از هر حرف، چه حرفی می تواند بیاید:

اگر حرف فعلی از دسته $\{B, S\}$ باشد، مثلاً S:

• حرف بعدی نمی تواند S باشد.

• حرف بعدی نمی تواند B باشد.

در نتیجه حرف بعدی حتماً باید از دسته $\{A, Z\}$ باشد.

به طور مشابه اگر حرف فعلی از دسته $\{A, Z\}$ بود نیز حرف بعدی باید از دسته $\{B, S\}$ باشد پس باید کلمه ما به صورت یک درمیان از این دو دسته ساخته شود.

گام سوم: حال تعداد کلمات ۱۰ حرفی با این الگو را محاسبه می کنیم.

در جایگاه اول محدودیتی نداریم و در بقیه جایگاهها انتخاب ما دسته ای است که حرف اول در آن قرار ندارد:

$$4 \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\text{تا } 9} = 2^2 \times 2^9 = 2^{11}$$

جایگاه اول

۲۰ از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ سه عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع ۳ عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر است؟

- (۱) $0/3$ (۲) $0/35$ (۳) $0/55$ (۴) $0/62$

پاسخ: گزینه ۲

برای این که مجموع سه عدد بر ۳ بخش پذیر باشد، باید به باقی مانده آن‌ها در تقسیم بر ۳ نگاه کنی. اعداد ۱ تا ۱۰ رو به سه دسته (باقی مانده صفر، یک و دو) تقسیم کن و بین چه ترکیب‌هایی از این دسته‌ها جواب می‌ده.

Hint

درس Box

ترکیب

مفهوم ترکیب

ترکیب، روشی برای انتخاب گروهی از اشیاء است که در آن، ترتیب انتخاب اعضا هیچ اهمیتی ندارد. به هر انتخاب r شیء متمایز از میان n شیء متمایز (به طوری که $r \leq n$)، یک ترکیب r تایی از n شیء گفته می‌شود.

مثال ترکیب‌های دو حرفی از مجموعه $\{a, b, c, d\}$ عبارت‌اند از:

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

توجه کنید که چون ترتیب مهم نیست، مجموعه $\{a, b\}$ با $\{b, a\}$ یکسان در نظر گرفته می‌شود.

فرمول و نماد ترکیب

تعداد روش‌های انتخاب r شیء از n شیء را با نمادهای $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم. مقدار آن از طریق فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

آزمایش تصادفی و فضاهای نمونه‌ای

● به آزمایشی که نتیجه دقیق آن قابل پیش‌بینی نیست، اما همه نتایج ممکن آن مشخص است، آزمایش تصادفی می‌گویند.

● مجموعه تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌نامند و با S نمایش می‌دهند.

● هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، یک پیشامد نام دارد.

محاسبه احتمال یک پیشامد

فرض کنید فضای نمونه‌ای S متناهی و ناتهی باشد و A پیشامدی از این فضا باشد. اگر شانس وقوع همه اعضای S یکسان باشد، احتمال وقوع پیشامد A که با $P(A)$ نمایش داده می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد کل اعضای فضای نمونه‌ای}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام اول: ابتدا تعداد کل حالات یعنی انتخاب ۳ عدد از مجموعه ۱۰ عضوی را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

گام دوم: مجموع سه عدد زمانی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع باقی مانده‌های آن‌ها بر ۳، بر ۳ بخش پذیر باشد. پس اعداد مجموعه را براساس باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۳ دسته‌بندی می‌کنیم:

۱) اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند: $\{3, 6, 9\}$

۲) اعدادی که در تقسیم بر ۳، باقی مانده ۱ دارند: $\{1, 4, 7, 10\}$

۳) اعدادی که در تقسیم بر ۳، باقی مانده ۲ دارند: $\{2, 5, 8\}$

گام سوم: حال حالت‌هایی را حساب می‌کنیم که مجموع باقی مانده‌ها مضربی از ۳ باشد:

$$I) \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 1 + 4 + 1 = 6$$

هر سه از دسته ۱ یا ۲ یا ۳ باشند

$$II) \binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 3 \times 4 \times 3 = 36$$

از هر دسته دقیقاً یک عدد انتخاب شود

گام چهارم: تعداد حالت‌های مطلوب برابر $36 + 6 = 42$ است. در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = \frac{42}{120} = \frac{7}{20} = 0/35$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

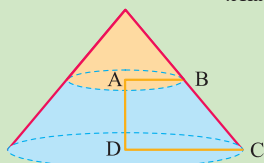
۲۱ از دوران یک دوزنقه قائم الزاویه، حول ضلع عمود بر قاعده‌های آن، چه شکلی ایجاد می‌شود؟

- (۱) یک استوانه و یک مخروط قائم که در قاعده مشترک‌اند.
- (۲) دو مخروط قائم که در قاعده مشترک‌اند.
- (۳) یک استوانه که مخروط قائمی از آن جدا شده است.
- (۴) یک مخروط قائم که مخروط قائم دیگری از آن جدا شده است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، دوزنقه قائم الزاویه ABCD را حول ضلع AD که بر قاعده‌ها عمود است، دوران داده‌ایم. همان‌طور که می‌بینید، شکل حاصل یک مخروط قائم است که یک مخروط قائم دیگر (مخروط نارنجی‌رنگ) از آن جدا شده.



در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

(هندسه (۱) - تمرین ۲ صفحه ۹۶ کتاب درسی)

الف) دورن یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن:

ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه:

پ) دوران یک دوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها:

ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعده آن:

کتاب
درسی

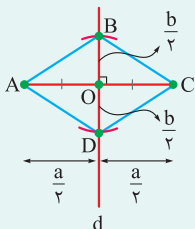
چند لوزی با محیط ۱۶ می‌توان رسم کرد که قطر بزرگ آن دو برابر قطر کوچک باشد؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) صفر
(۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲

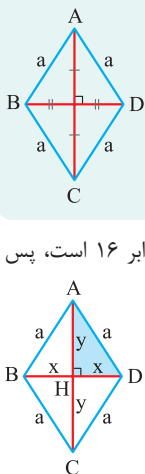
درس Box

(۱) برای رسم لوزی به قطرهای a و b ، اول قطر $AC = a$ را رسم می‌کنیم. عمودمنصف AC (خط d) را می‌کشیم تا آن را در نقطه O قطع کند. در ادامه کماتی به مرکز O و شعاع $\frac{b}{2}$ رسم می‌کنیم تا d را در نقطه‌های B و D قطع کند. حالا اگر نقطه‌های B و D را به A و C وصل کنیم، لوزی به قطرهای a و b رسم می‌شود.



(۲) با دانستن طول قطرهای یک لوزی می‌توان آن را به طور منحصره فرد رسم کرد.

(۳) مطابق شکل، در لوزی طول هر ۴ ضلع برابر و قطرهای عمودمنصف یکدیگرند.



گام اول (رسم شکل فرضی و تحلیل آن): اول شکل فرضی زیر را می‌کشیم، به گفته سؤال محیط لوزی برابر ۱۶ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی طبق مورد (۲) درس باکس، قطرهای عمودمنصف هم‌اند، پس روی شکل می‌توانیم طول BH و HD را x و طول AH و HC را y در نظر بگیریم. سؤال می‌گوید طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است؛ پس:

$$AC = 2BD \Rightarrow 2y = 2(2x) \Rightarrow y = 2x$$

حالا اگر در مثلث قائم‌الزاویه رنگی بالا فیثاغورس بنویسیم؛ می‌فهمیم که x و y مقدار مشخصی دارند:

$$x^2 + y^2 = a^2 \xrightarrow[y=2x]{y=2x} x^2 + (2x)^2 = 4^2 \Rightarrow 5x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{5}} \xrightarrow[y=2x]{\text{جای‌گذاری در}} y = 2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

گام دوم (تشخیص گزینه درست): از این که x و y مقدار مشخصی دارند، نتیجه می‌گیریم که قطرهای لوزی هم، طول مشخصی دارند، پس طبق مورد (۲) درس باکس، این لوزی منحصره فرد است؛ بنابراین مسئله یک جواب دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

در مثلث متساوی الساقین ABC ، دو ضلع AB و AC با هم برابرند و عمود منصف ضلع AB ، ضلع AC را در نقطه P قطع می کند. اگر $\hat{ABC} = \hat{BPC}$ ، آن گاه زاویه حاده A چند درجه است؟

۴۲ (۴)

۲۴ (۳)

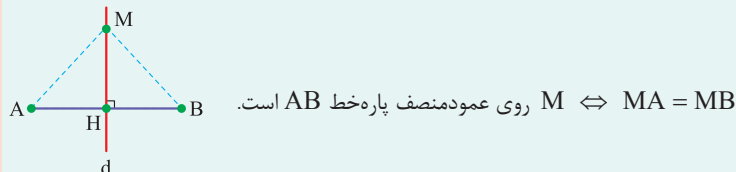
۳۰ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

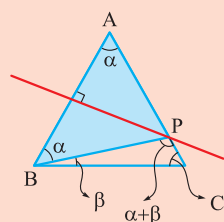
درس Box

در شکل زیر، به خط d که بر پاره خط AB عمود است و آن را نصف می کند، عمود منصف پاره خط AB می گوئیم. ویژگی عمود منصف این است که هر نقطه ای روی آن باشد، فاصله اش از دو سر پاره خط به یک اندازه است و برعکس؛ یعنی برای نقطه M در شکل مقابل می توانیم بنویسیم: $MA = MB$



$MA = MB \Leftrightarrow M$ روی عمود منصف پاره خط AB است.

گام اول (رسم شکل و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت زیر است. نقطه P روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد، پس طبق درس باکس فاصله اش از دو سر AB به یک اندازه است؛ بنابراین $PA = PB$ می شود. این یعنی مثلث PAB متساوی الساقین است و زاویه های مجاور به ساق هایش برابرند؛ پس می توانیم فرض کنیم:



$$\hat{ABP} = \hat{PAB} = \alpha$$

حالا فرض می کنیم $\hat{PBC} = \beta$ باشد. به گفته سؤال مثلث ABC متساوی الساقین است، پس زوایای B و C در آن برابرند:

$$\hat{B} = \hat{C} = \alpha + \beta$$

از طرفی چون $\hat{BPC} = \hat{ABC} = \hat{ACB}$ ، مثلث BPC هم متساوی الساقین است، پس:

$$\hat{BPC} = \hat{PCB} = \alpha + \beta$$

گام دوم (پیدا کردن رابطه بین α و β): زاویه $\hat{BPC}$ در شکل بالا، زاویه خارجی مثلث BAP است، پس می توانیم بنویسیم:

$$\hat{BPC} = \hat{A} + \hat{ABP} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = \beta \quad (1)$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): مجموع زوایای داخلی مثلث BPC باید 180° باشد:

$$\beta + (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow 3\beta + 2\alpha = 180^\circ \xrightarrow{\alpha=\beta} 3\alpha + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$$

در مثلث متساوی الساقین ABC ، نقطه M وسط ساق AB و عمود منصف آن، ساق AC را در نقطه N قطع می کند. اگر $\hat{NBC} = 54^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\hat{MNB}$ چند درجه است؟

(سؤال ۱۳۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ - ثبوت دوم)

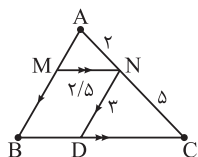
۷۸ (۴)

۶۶ (۳)

۵۶ (۲)

۴۸ (۱)

اگر در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $ND \parallel AB$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱۹ / ۴۵ (۲)

۱۸ / ۴۵ (۱)

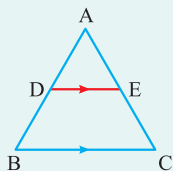
۱۹ / ۹۵ (۴)

۱۸ / ۹۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

کلاس Box

اگر در شکل زیر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیه تالس می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم:



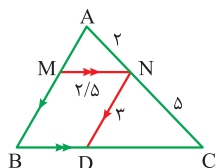
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

جزء به جزء:

جزء به کل:

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه طول BC):



$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{2/5}{BC} = \frac{2}{7} \Rightarrow BC = 8/7$$

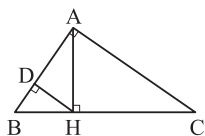
گام دوم (محاسبه طول AB):

$$\frac{ND}{AB} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{3}{AB} = \frac{5}{7} \Rightarrow AB = 4/2$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ محیط} &= AC + AB + BC \\ &= 7 + 4/2 + 8/7 = 19/9 \end{aligned}$$

در شکل زیر با فرض $AB = ۳$ و $AC = ۴$ ، نسبت محیط مثلث BDH به محیط مثلث ABC کدام است؟



۰ / ۳۶ (۲)

۰ / ۲۷ (۱)

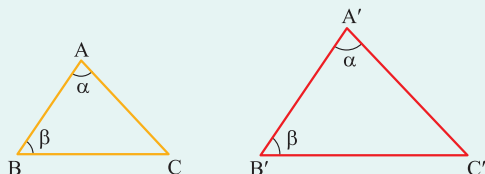
۰ / ۴ (۴)

۰ / ۳ (۳)

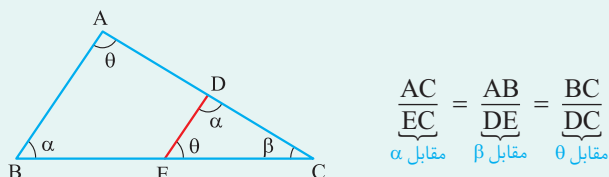
پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

(۱) هر وقت دو مثلث دو زاویه برابر داشته باشند، متشابه‌اند. مثلاً در شکل‌های زیر، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ با دو زاویه برابر α و β متشابه‌اند.



(۲) برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل زیر به این صورت می‌شود:



(۳) نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر با همان نسبت تشابه‌شان است. مثلاً در شکل بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } DEC} = \frac{AC}{EC} \text{ یا } \frac{AB}{DE} \text{ یا } \frac{BC}{DC}$$

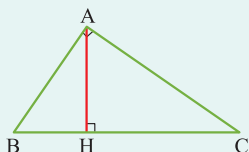
(۴) در شکل زیر، ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC را کشیده‌ایم. در چنین شکلی روابط طولی زیر همیشه برقرارند:

● $AB^2 = BH \times BC$

● $AH^2 = BH \times CH$

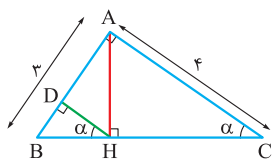
● $AC^2 = CH \times BC$

● $AB \times AC = AH \times BC$



گام اول (تشخیص مثلث‌های متشابه): در شکل زیر، DH و AC هر دو بر ضلع AB عمودند، پس موازی‌اند. حالا به پاره‌خط‌های موازی

DH و AC و پاره‌خط مورب BC نگاه کنید. طبق قضیه خطوط موازی و مورب $\hat{DHB}$ و $\hat{ACB}$ برابرند، پس جفتشان را α در نظر می‌گیریم. مثلث‌های DHB و ACB دو زاویه برابر دارند؛ یکی α و دیگری 90° ، پس طبق مورد (۱) درس باکس متشابه‌اند.



گام دوم (تحلیل خواسته سؤال): به دنبال نسبت محیط دو مثلث متشابه BDH و ABC هستیم که طبق موارد (۲) و (۳) درس باکس می‌شود:

$$\frac{\text{محیط مثلث } BDH}{\text{محیط مثلث } ABC} = \frac{BH}{BC} \text{ یا } \frac{BD}{AB} \text{ یا } \frac{DH}{AC} \quad (*)$$

مقابل 90° مقابل α مقابل $\hat{B}$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): در (*) پیدا کردن طول BC و BH خیلی راحت است. BC که به کمک فیثاغورس در مثلث ABC به دست می‌آید:

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

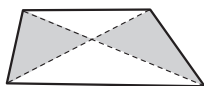
در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است، پس برای محاسبه BH می‌توانیم از فرمول‌های مورد (۴) درس باکس، کمک بگیریم:

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 3^2 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

حالا که BH و BC را داریم می‌توانیم به کمک (*) خواسته سؤال را به دست بیاوریم:

$$\frac{\text{محیط مثلث } BDH}{\text{محیط مثلث } ABC} = \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{9}{5}}{5} = \frac{9}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{36}{100} = 0.36$$

در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه ۲ به ۳ است. مساحت قسمت رنگ‌شده چند درصد مساحت دوزنقه است؟



۴۰ (۲)

۳۶ (۱)

۵۲ (۴)

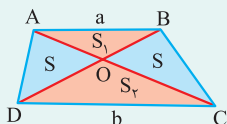
۴۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت تشابهشان است.

(۲) در شکل زیر قطره‌های یک دوزنقه دلخواه را کشیده‌ایم. با این کار دوزنقه به چهار مثلث تبدیل می‌شود که نکات زیر را باید راجع به آن‌ها بلد باشید:



● مثلث‌های محدود به قطر و قاعده‌ها (مثلث‌های قرمز) متشابه‌اند، پس طبق مورد بالا نسبت مساحتشان می‌شود:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

● مثلث‌های محدود به قطر و ساق‌ها (مثلث‌های آبی) هم‌مساحت‌اند، یعنی:

$$S_{AOD} = S_{BOC}$$

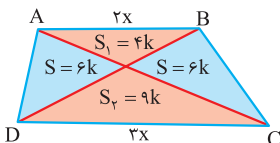
● حاصل ضرب مساحت مثلث‌های آبی و قرمز برابرند، یعنی:

$$S \times S = S_1 \times S_2 \Rightarrow S^2 = S_1 \times S_2$$

(۳) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a = ck$ و $b = dk$ است. مثلاً اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد. در این صورت $a = 2k$ و $b = 3k$ می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (تحلیل مساحت‌ها): به گفته سؤال، نسبت قاعده‌های دوزنقه مقابل برابر ۲ به ۳ است، پس قاعده بزرگ را $3x$ و قاعده کوچک را $2x$ در نظر می‌گیریم. طبق مورد (۲) درس باکس، مثلث‌های قرمز متشابه‌اند، پس طبق مورد (۱) درس باکس، نسبت مساحتشان می‌شود:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{طبق مورد (۳) درس باکس}} S_1 = 4k, S_2 = 9k$$

از طرفی مثلث‌های آبی مساحت یکسانی دارند، پس مساحت جفتشان را S در نظر می‌گیریم. طبق مورد (۲) درس باکس، حاصل ضرب مساحت مثلث‌های آبی و قرمز برابرند، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S \times S = S_1 \times S_2 \Rightarrow S^2 = (4k)(9k) = 36k^2 \Rightarrow S = 6k$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): می‌خواهیم بفهمیم مساحت قسمت آبی چند درصد مساحت کل دوزنقه است، پس باید بنویسیم:

$$\frac{S_{\text{آبی}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{6k + 6k}{4k + 6k + 9k + 6k} = \frac{12k}{25k} \times \frac{4}{4} = \frac{48}{100}$$

نقطه A، یکی از رأس‌های یک پانزده‌ضلعی محدب است. چه تعداد از قطرهای این پانزده‌ضلعی، از رأس A نمی‌گذرند؟

۷۵ (۴)

۷۶ (۳)

۷۷ (۲)

۷۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

از هر رأس یک n ضلعی دلخواه، $n - 3$ قطر می‌گذرد و تعداد قطرهای یک n ضلعی می‌شود:

$$\text{تعداد قطرها} = \frac{n(n-3)}{2}$$

گام اول (محاسبه تعداد کل قطرها): تعداد کل قطرهای یک ۱۵ ضلعی، طبق درس‌بکس می‌شود:

$$\text{تعداد کل قطرها} = \frac{15(15-3)}{2} = \frac{15 \times 12}{2} = 90$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): طبق درس‌بکس، از هر رأس ۱۵ ضلعی مثل A، $15 - 3 = 12$ تا قطر می‌گذرد، پس تعداد قطرهایی که از رأس A نمی‌گذرند، می‌شود $90 - 12 = 78$.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در یک مستطیل به اضلاع ۲ و ۵ از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی، چهارضلعی ABCD و از وصل کردن وسطهای اضلاع، چهارضلعی MNOP حاصل می‌شود. مساحت ABCD چند برابر مساحت MNOP است؟

$$\frac{1}{9} (۲)$$

$$\frac{9}{10} (۱)$$

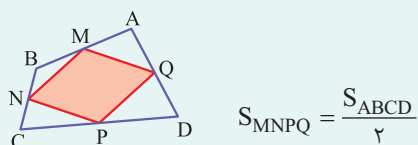
$$\frac{4}{5} (۴)$$

$$\frac{5}{4} (۳)$$

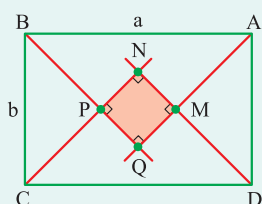
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) با وصل کردن متوالی وسط ضلع‌های هر چهارضلعی، مطابق شکل زیر، یک متوازی‌الاضلاع (به چهارضلعی رنگی در شکل زیر نگاه کنید) ساخته می‌شود. مساحت این متوازی‌الاضلاع، نصف مساحت چهارضلعی اولیه است، یعنی:



(۲) از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل، مطابق شکل زیر، یک مربع ساخته می‌شود. اگر طول ضلع‌های این مستطیل a و b باشند، طول ضلع این مربع می‌شود $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$.



گام اول (محاسبه مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن وسط اضلاع): طبق مورد (۱) درس باکس، از به هم وصل کردن وسط اضلاع یک چهارضلعی (که این‌ها مستطیل) یک متوازی‌الاضلاع ساخته می‌شود که مساحتش نصف چهارضلعی است.

$$S_{\square} = \frac{1}{2} S_{\text{مستطیل}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$$

گام دوم (محاسبه مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازها): طبق مورد (۲) درس باکس، اگر نیمسازهای داخلی یک

مستطیل با ابعاد ۲ و ۵ را بکشیم، یک مربع به ضلع $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ساخته می‌شود، پس مساحتش برابر است با:

$$S_{\square} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): به دنبال نسبت $S_{\square}$ به $S_{\square}$ هستیم که می‌شود $\frac{9}{2} = 4.5$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مثلثی به طول اضلاع ۱۳، ۱۳ و ۱۰، فاصله نقطه همرسی میانه از نزدیک‌ترین ضلع، کدام است؟

۳ (۴)

$\frac{10}{3}$ (۳)

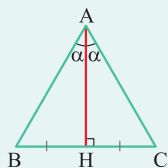
$\frac{40}{13}$ (۲)

۴ (۱)

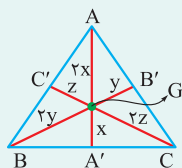
پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

(۱) در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز و میانه هم هست؛ ببینید:

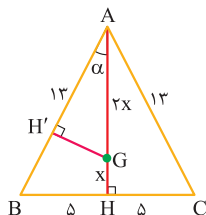


(۲) میانه‌های هر مثلث مطابق شکل زیر، در نقطه‌ای به اسم مرکز ثقل (نقطه G) هم‌رس‌اند. همان‌طور که می‌بینید، این نقطه هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.



گام اول (رسم شکل و تحلیل آن): همان‌طور که می‌بینید، مثلث متساوی‌الساقین را به همراه ارتفاع وارد بر قاعده‌اش کشیده‌ایم.

طبق مورد (۱) درس باکس، این ارتفاع میانه هم هست، پس دوتا اتفاق می‌افتد:



● H وسط BC است:

$$BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

● نقطه همرسی میانه (نقطه G) روی AH قرار می‌گیرد، پس طبق مورد (۲) درس باکس آن را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.

گام دوم (محاسبه x): طول AH را به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث ABH حساب می‌کنیم:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AH = 12$$

طبق شکل، AH همان AG + GH است، پس:

$$2x + x = 12 \Rightarrow x = 4$$

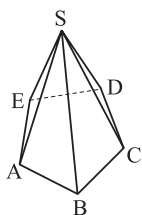
گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): کم‌ترین فاصله G از اضلاع مثلث یا GH است یا GH'. GH را که می‌دانیم برابر ۴ است، پس

می‌رویم سراغ محاسبه GH'. خوب به مثلث‌های AH'G و ABH نگاه کنید. دو زاویه برابر دارند؛ یکی α و دیگری 90° ، پس متشابه‌اند. نسبت تشابه این دو مثلث را می‌نویسیم:

$$\frac{GH'}{BH} = \frac{AG}{AB} \Rightarrow \frac{GH'}{5} = \frac{2x}{13} \xrightarrow{x=4} \frac{GH'}{5} = \frac{8}{13} \Rightarrow GH' = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{13}$$

مقابل 90° مقابل α

چون $GH' < GH$ پس $GH' = \frac{40}{13}$ جواب مسئله است.



۳۰ در هرم شکل مقابل، یال DE با چند یال از این هرم، متنافر است؟

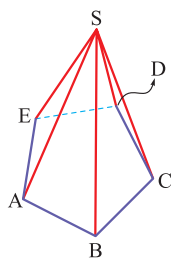
- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) سه
- (۴) چهار

پاسخ: گزینه ۳

دو خط به دو شرط متنافرند:

- (۱) هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.
- (۲) هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که هم‌زمان از جفتشان بگذرد.

در شکل زیر، یال ED با هر یک از یال‌های SA ، SB و SC هر دو شرط گفته‌شده در درس‌پاکس را دارد، پس ED با سه یال متنافر است.



درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ارتفاع هواپیمایی که در فاصله ۳۰۰۰۰ پا (فوت) از سطح آزاد دریاها در حال پرواز است، برحسب کیلومتر کدام است؟

$$(1 \text{ in} = 2/54 \text{ cm}, 1 \text{ ft} = 12 \text{ in})$$

$$90 (4)$$

$$36 (3)$$

$$9 (2)$$

$$3/6 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

کرتس Box

(۱) تبدیل یکای زنجیره‌ای: برای تبدیل یکای یک کمیت به یکاهای دیگر، از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. برای نمونه، برای این که ببینیم 20 in معادل چند cm است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:
(الف) ابتدا تساوی بین دو یکا را می‌نویسیم، تا کسر تبدیل مناسب به دست آید:

$$1 \text{ in} = 2/54 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1 \text{ in}}{2/54 \text{ cm}} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{2/54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 1$$

(ب) سپس به کمک کسر تبدیل مناسب، تبدیل یکای زنجیره‌ای را می‌نویسیم:

$$20 \text{ in} = 20 \text{ in} \times \frac{2/54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 50/8 \text{ cm}$$

(۲) پیشوند یکا: پیشوندهایی هستند که قبل از یکا قرار می‌گیرند و آن یکا را کوچک یا بزرگ می‌کنند. در جدول زیر، تعدادی از این پیشوندها را که مهم‌تر از بقیه هستند و باید آن‌ها را حفظ باشید، آورده‌ایم:

پیشوندهای بزرگ‌کننده			پیشوندهای کوچک‌کننده		
پیشوند	نماد	ضریب تبدیل	پیشوند	نماد	ضریب تبدیل
دسی	d	10^{-1}	دکا	da	10^1
سانتی	c	10^{-2}	هکتو	h	10^2
میلی	m	10^{-3}	کیلو	k	10^3
میکرو	μ	10^{-6}	مگا	M	10^6
نانو	n	10^{-9}	گیگا (جیگا)	G	10^9
پیکو	p	10^{-12}	ترا	T	10^{12}

از روش تبدیل زنجیره‌ای کمک می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$h = 30000 \text{ ft} = 30000 \text{ ft} \times \frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}} \times \frac{2/54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \times \frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ cm}} \times \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} = \frac{30000 \times 12 \times 2/54 \times 10^{-2}}{10^3} = 9 \text{ km}$$

شعاع کره‌ای توپر، ۲ برابر شعاع سطح مقطع یک مخروط توپر و جرم کره، ۴ برابر جرم مخروط است. اگر چگالی کره، ۲ برابر چگالی مخروط باشد، ارتفاع مخروط چند برابر شعاع سطح مقطع آن است؟

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

چگالی:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

جرم
↓
حجم

درس Box

گام اول: رابطه چگالی را به شکل نسبتی می‌نویسیم تا نسبت حجم دو جسم به دست آید:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{کره}}}{\rho_{\text{مخروط}}} = \frac{m_{\text{کره}}}{m_{\text{مخروط}}} \times \frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} \Rightarrow 2 = 4 \times \frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} \Rightarrow \frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{1}{2}$$

گام دوم: به کمک روابط حجم کره و مخروط، خواسته تست را حساب می‌کنیم:

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{\frac{1}{3} \pi r_{\text{مخروط}}^2 h}{\frac{4}{3} \pi r_{\text{کره}}^3} \xrightarrow{r_{\text{کره}} = 2r_{\text{مخروط}}} \frac{1}{2} = \frac{r_{\text{مخروط}}^2 h}{4(2r_{\text{مخروط}})^3} \Rightarrow r_{\text{مخروط}}^2 h = 16r_{\text{مخروط}}^3 \Rightarrow h = 16r_{\text{مخروط}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک زیردریایی در عمق ۸ متری دریا در حال حرکت است. اندازه نیروی عمودی وارد بر سطح خارجی پنجره این زیردریایی که دایره‌ای به قطر ۱ m است، برابر چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، چگالی آب دریا 1 g/cm^3 و فشار هوا ۱ bar است.)

$$2 / 25\pi \times 10^4 \quad (2)$$

$$4 / 5\pi \times 10^4 \quad (1)$$

$$9\pi \times 10^4 \quad (4)$$

$$8\pi \times 10^4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا فشار در سطح خارجی پنجره را حساب کرده و سپس نیروی وارد بر آن را به دست آورید.

Hint

درس Box

(۱) فشار در عمق h از یک مایع:

چگالی مایع
↑
 $P = P_0 + \rho gh$
↓
فشار هوا

(۲) اگر فشار در یک سطح برابر P باشد، نیرویی که به آن سطح وارد می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

مساحت سطح
↑
 $F = PA$

گام اول: فشار در سطح خارجی پنجره را حساب می‌کنیم:

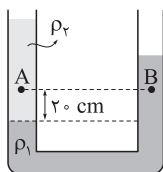
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$P = P_0 + \rho gh \xrightarrow[\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3]{P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}} P = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 8 = 1 / 8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

گام دوم: نیروی وارد بر سطح خارجی پنجره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = PA \xrightarrow[r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ m}]{A = \pi r^2} F = 1 / 8 \times 10^5 \times \pi \times (0.5)^2 = 4 / 5 \pi \times 10^4 \text{ N}$$

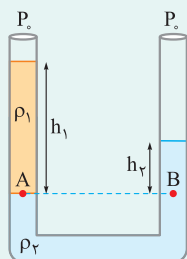
دو مایع به چگالی‌های $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_2 = 0.8 \text{ g/cm}^3$ در لوله U شکل زیر در تعادل هستند. اگر فشار دو نقطه A و B به ترتیب برابر P_A و P_B باشد، $P_A - P_B$ برابر چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) 0.4
(۲) -0.4
(۳) 0.8
(۴) -0.8

پاسخ: گزینه ۱

اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز: در نقطه‌های هم‌تراز (هم‌عمق) یک مایع ساکن، فشار یکسان است و به شکل ظرف بستگی ندارد. برای مثال در لوله U شکل زیر، نقاط A و B هم‌ترازند و درون یک مایع ساکن قرار دارند؛ بنابراین فشار این دو نقطه با هم برابر است.



$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

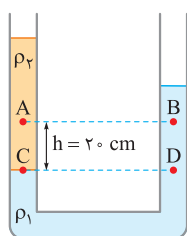
توجه داشته باشید که در این رابطه، فقط یکسان‌بودن یکاها در دو طرف تساوی مهم است.

فشار در نقاط هم‌تراز C و D در شکل زیر را برابر قرار می‌دهیم:

$$P_C = P_D \Rightarrow P_A + \rho_2 g h = P_B + \rho_1 g h \Rightarrow P_A - P_B = g h (\rho_1 - \rho_2)$$

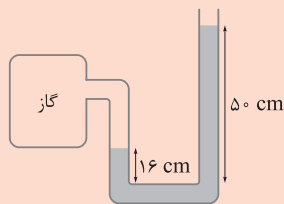
$$\frac{\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 0.8 \text{ g/cm}^3 = 800 \text{ kg/m}^3}{h = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}} \rightarrow P_A - P_B = 10 \times 0.2 \times (1000 - 800) = 400 \text{ Pa}$$

$$\frac{1 \text{ Pa} = 10^{-3} \text{ kPa}}{} \rightarrow P_A - P_B = 0.4 \text{ kPa}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، اگر فشار گاز درون مخزن ۸۰ cmHg و فشار هوا ۱۰۲ kPa باشد، چگالی مایع درون لوله چند گرم بر سانتی متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و چگالی جیوه 13.6 g/cm^3 است.)



(۱) ۰ / ۸

(۲) ۱

(۳) ۱ / ۸

(۴) ۲

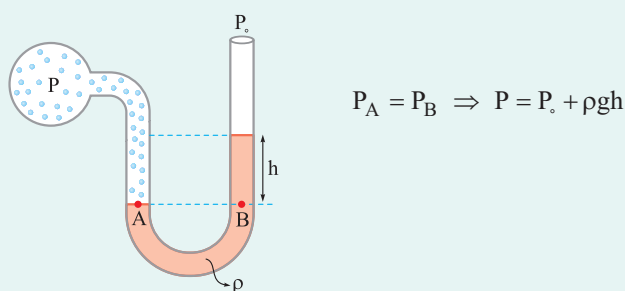
پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا فشار گاز درون مخزن را برحسب پاسکال به دست آورید و سپس به کمک اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، چگالی مایع را حساب کنید.

درس: Box

(۱) در شکل زیر، برای به دست آوردن فشار گاز موجود در مانومتر، از اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز A و B کمک می‌گیریم:



(۲) تبدیل یکای سانتی‌متر جیوه به پاسکال و برعکس:

$$P(\text{cmHg}) \xrightarrow[\div 1360]{\times 1360} P(\text{Pa})$$

گام اول: فشار گاز درون مخزن را برحسب پاسکال به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

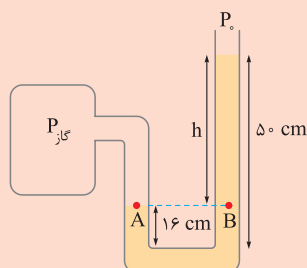
$$P(\text{Pa}) = 1360 \cdot P(\text{cmHg}) = 1360 \times 80 = 108800 \text{ Pa}$$

گام دوم: فشار در نقاط هم‌تراز A و B در شکل زیر را برابر قرار می‌دهیم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 + \rho gh \xrightarrow[h = 50 - 16 = 34 \text{ cm} = 0.34 \text{ m}]{P_0 = 102 \text{ kPa} = 102000 \text{ Pa}} 108800 = 102000 + \rho \times 10 \times 0.34$$

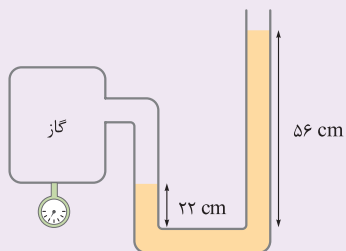
$$\Rightarrow 3/4 \rho = 6800$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{6800}{3/4} = 2000 \text{ kg/m}^3 \xrightarrow{1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ g/cm}^3} \rho = 2 \text{ g/cm}^3$$



در شکل زیر، اگر فشار گاز درون مخزن $۸/۱۰۸$ کیلوپاسکال و فشار هوا ۷۵ سانتی‌متر جیوه باشد، چگالی مایع درون لوله چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$ و چگالی جیوه $۱۳/۶ \text{ g/cm}^3$ است.)

(سؤال ۷۲ کنکور تهری ۱۴۰۳ (فارج از کشور))



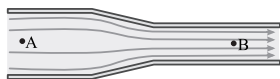
۰ / ۸ (۱)

۱ (۲)

۱ / ۸ (۳)

۲ (۴)

در شکل زیر، آب به صورت پیوسته در لوله افقی جاری است. اگر قطر مقطع بخش A دو برابر قطر مقطع بخش B باشد، کدامیک از موارد زیر درست است؟



الف) تندی آب در بخش B، ۲ برابر تندی آب در بخش A است.

ب) تندی آب در بخش B، ۴ برابر تندی آب در بخش A است.

پ) آهنگ شارش آب در بخش B، ۴ برابر آهنگ شارش آب در بخش A است.

ت) فشار آب در بخش A، بیشتر از فشار آب در بخش B است.

(۲) الف - ت

(۱) الف - پ

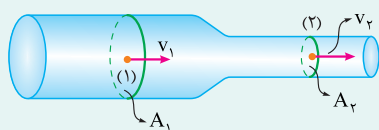
(۴) ب - ت

(۳) ب - پ

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

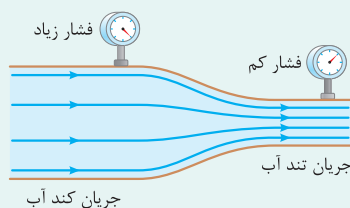
(۱) معادله پیوستگی: اگر مطابق شکل زیر، شاره تراکم ناپذیری همه جای لوله را پر کرده باشد و درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است. به زبان ریاضی:



(A: مساحت مقطع لوله و v: تندی شاره)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(۲) طبق اصل برنولی، در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.



طبق معادله پیوستگی، آهنگ شارش حجمی آب از همه مقاطع لوله یکسان است (عبارت «پ» نادرست است). معادله پیوستگی را می‌نویسیم:

$$A_A v_A = A_B v_B \xrightarrow{A \propto d^2} d_A^2 v_A = d_B^2 v_B \xrightarrow{d_A = 2d_B} (2d_B)^2 v_A = d_B^2 v_B$$

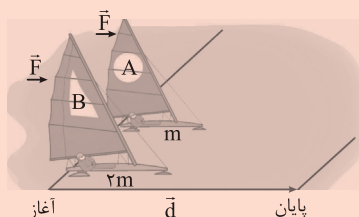
$$\Rightarrow 4v_A = v_B \quad (\text{عبارت «الف» نادرست و عبارت «ب» درست است})$$

همچنین چون تندی آب در بخش A کم‌تر از تندی آب در بخش B است، طبق اصل برنولی، فشار آب در بخش A، بیشتر از فشار آب در بخش B است (درستی «ت»).

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۷

در شکل زیر، دو قایق بادبانی مخصوص حرکت روی سطوح یخزده A و B، دارای جرم‌های m و $2m$ روی دریاچه افقی بدون اصطکاک قرار دارند و نیروی ثابت، یکسان و افقی $\vec{F}$ با وزیدن باد به هر دو وارد می‌شود. هر دو قایق از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و پس از جابه‌جایی $\vec{d}$ ، از خط پایان می‌گذرند. به ترتیب از راست به چپ، تندی و انرژی جنبشی قایق A در لحظه عبور از خط پایان، چند برابر تندی و انرژی جنبشی قایق B در لحظه عبور از خط پایان است؟



۱، ۲ (۱)

$\frac{1}{2}$ ، ۲ (۲)

۱، $\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ ، $\sqrt{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

Hint

به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی و رابطه کار یک نیرو، نسبت انرژی جنبشی دو قایق هنگام عبور از خط پایان را به دست آورید. سپس به کمک رابطه انرژی جنبشی، نسبت تندی قایق‌ها هنگام عبور از خط پایان را محاسبه کنید.

کوتاه Box

(۱) انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

(۲) کار نیروی ثابت $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W = Fd \cos \theta$$

زاویه بین نیرو و جابه‌جایی

(۳) قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_f - K_i$$

● رابطه بالا برای هر نوع مسیری برقرار است.

● انرژی جنبشی در آغاز و پایان مسیر مهم است و این‌که در طول مسیر انرژی جنبشی جسم چگونه تغییر کرده، اهمیتی ندارد.

گام اول: کار کل انجام‌شده روی هر دو قایق برابر با کار نیروی افقی باد ($\vec{F}$) است؛ بنابراین به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_f - K_i \xrightarrow{K_i=0} Fd \cos 0^\circ = K_f$$

F و d برای هر دو قایق یکسان است؛ بنابراین انرژی جنبشی قایق‌ها هنگام عبور از خط پایان نیز یکسان است:

$$K_{r(A)} = K_{r(B)} \Rightarrow \frac{K_{r(A)}}{K_{r(B)}} = 1$$

گام دوم: به کمک رابطه انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

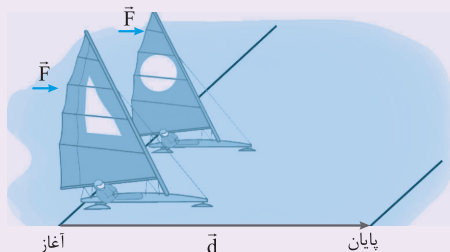
$$K_{r(A)} = K_{r(B)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2 \xrightarrow{\frac{m_A}{m_B} = \frac{m}{2m}} m v_A^2 = 2m v_B^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = 2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دو قایق مخصوص، روی سطح افقی یخ‌زده و بدون اصطکاک دریاهای مطابق شکل زیر، قرار دارند. جرم یکی از قایق‌ها، ۴ برابر دیگری است. قایق‌ها تحت اثر نیروی مساوی باد شروع به حرکت می‌کنند و از خط پایان به فاصله d می‌گذرند. درست پس از عبورشان از خط پایان، تندی قایق سبک‌تر، چند برابر تندی قایق دیگر است؟

(سؤال ۱۸۶ آئینکورد ریاضی ۱۴۰۱ (فارج از کشور))



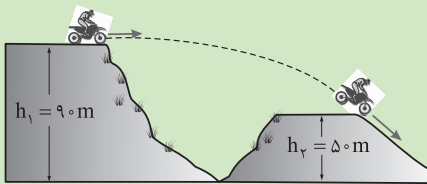
۲ (۱)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۳)

۸ (۴)

در شکل زیر، جرم موتورسوار با موتورش 150 kg است. این موتورسوار، پرشی با تندی اولیه $v_1 = 10 \text{ m/s}$ انجام می‌دهد و با تندی v_2 روی تپه بعدی فرود می‌آید. به ترتیب از راست به چپ، v_2 چند متر بر ثانیه است و در این جابه‌جایی کار نیروی وزن چند کیلوژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است).



(۱) $6, 20 \sqrt{2}$

(۲) $60, 20 \sqrt{2}$

(۳) $6, 30$

(۴) $60, 30$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا کار نیروی وزن را که برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی است، حساب کرده و سپس به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی، تندی ثانویه را به دست آورید.

Hint

درس Box

(۱) کار نیروی وزن جسم برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

تغییر فاصله جسم از سطح زمین

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg \Delta h$$

جسم

(۲) اصل پایستگی انرژی مکانیکی: در غیاب نیروهای اتلافی مانند مقاومت هوا، اصطکاک و ...، انرژی مکانیکی جسم در تمام نقاط مسیر حرکت جسم مقدار یکسانی دارد:

$$E_1 = E_2 \xrightarrow{\Delta E=0} \Delta K + \Delta U = 0$$

(۳) درس باکس ۱، سؤال ۳۷ را بخوانید.

گام اول: مقاومت هوا ناچیز است، پس اصل پایستگی انرژی مکانیکی را می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) + mg \Delta h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + g \Delta h = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (v_2^2 - 10^2) + 10 \times (-40) = 0$$

$$\Rightarrow v_2^2 - 100 = 800 \Rightarrow v_2^2 = 900 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} v_2 = 30 \text{ m/s}$$

گام دوم: کار نیروی وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg \Delta h = -mg(h_2 - h_1) = -150 \times 10 \times (50 - 90) = 60000 \text{ J}$$

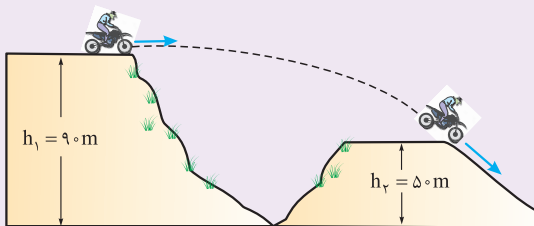
$$\xrightarrow{1000 \text{ J} = 1 \text{ kJ}} W_{mg} = 60 \text{ kJ}$$

جرم موتورسواری با موتورش 150 kg است. این موتورسوار، پرشی مطابق شکل انجام می‌دهد.

الف) انرژی پتانسیل گرانشی موتورسوار را روی هر یک از تپه‌ها حساب کنید ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

ب) کار نیروی وزن موتورسوار به همراه موتورش را در این جابه‌جایی به دست آورید.

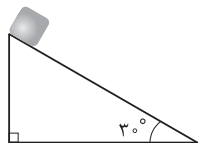
(فیزیک (۱) - تمرین ۳ - ۱۲ صفحه ۸ کتاب درسی)



کتاب
درسی

در شکل زیر، جسمی به جرم 4 kg از بالای سطح شیب‌داری به طول 4 m رها می‌شود و با تندی 5 m/s به پایین سطح شیب‌دار می‌رسد. اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

تندی اولیه جسم برابر صفر است.



۷ / ۵ (۱)

۱۵ (۲)

۲۲ / ۵ (۳)

۲۷ / ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

(۱) قانون پایستگی انرژی: کار نیروهای اتلافی (مانند اصطکاک و مقاومت هوا) برابر با تغییر انرژی مکانیکی است:

$$W_f = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

(۲) درس باکس ۱ و ۲، سؤال ۳۷ و درس باکس ۱، سؤال ۳۸ را بخوانید.

گام اول: با توجه به شکل زیر، تغییر ارتفاع جسم در این جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم:

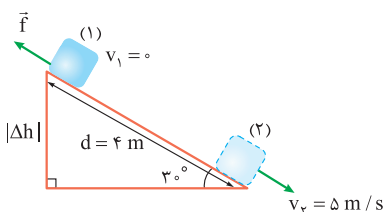
$$\sin 30^\circ = \frac{|\Delta h|}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|\Delta h|}{4} \Rightarrow |\Delta h| = 2 \text{ m} \xrightarrow[\Delta h < 0]{\text{جسم به سطح زمین نزدیک شده}} \Delta h = -2 \text{ m}$$

گام دوم: قانون پایستگی انرژی را برای نقاط (۱) و (۲) می‌نویسیم تا اندازه نیروی اصطکاک به دست آید:

$$W_f = \Delta K + \Delta U \Rightarrow \underbrace{fd \cos 180^\circ}_{-1} = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) + mg\Delta h$$

$$\Rightarrow -f \times 4 = \frac{1}{2} \times 4(5^2 - 0^2) + 4 \times 10 \times (-2)$$

$$\Rightarrow -4f = 50 - 80 \Rightarrow f = \frac{-30}{-4} = 7.5 \text{ N}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

درس Box

۴۰

پمپی با بازده ۳۴ درصد، در هر دقیقه 50 m^3 نفت را با تندی ثابت از عمق ۶۰۰ متری سطح زمین تا سطح زمین بالا می‌آورد. توان ورودی این پمپ چند مگاوات است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و چگالی نفت 0.85 g/cm^3 است).

۷۵ (۲)

۱۲/۵ (۱)

۷۵۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

 Hint

ابتدا به کمک رابطه چگالی، جرم نفت منتقل شده توسط پمپ و سپس به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی، کار پمپ را محاسبه کنید. در ادامه، توان خروجی پمپ را به دست آورید و در پایان به کمک رابطه بازده، توان ورودی پمپ را محاسبه کنید.

 درس Box

(۱) درس باکس سؤال ۳۲، درس باکس ۱ و ۳، سؤال ۳۷ و درس باکس ۱، سؤال ۳۸ را بخوانید.

(۲) توان متوسط: نسبت کار انجام شده در واحد زمان (آهنگ انجام کار) است.

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

(۳) بازده: نسبت انرژی یا توان خروجی (مفید) به انرژی یا توان ورودی (مصرفی) است و از روابط زیر به دست می‌آید:

$$Ra = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 \quad (\text{بر حسب درصد})$$

گام اول: جرم نفتی که در هر دقیقه توسط پمپ منتقل می‌شود را حساب می‌کنیم:

$$m = \rho_{\text{نفت}} V \quad \rho_{\text{نفت}} = 0.85 \text{ g/cm}^3 = 850 \text{ kg/m}^3 \rightarrow m = 850 \times 50 = 42500 \text{ kg}$$

گام دوم: از قضیه کار - انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم تا کاری که پمپ انجام می‌دهد، به دست آید (تندی آب ثابت و در نتیجه، تغییر انرژی جنبشی آن برابر صفر است):

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{\text{پمپ}} + W_{\text{وزن}} = 0 \Rightarrow W_{\text{پمپ}} + (-mg\Delta h) = 0 \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = mg\Delta h$$

$$\Delta h = 600 \text{ m} \rightarrow W_{\text{پمپ}} = 42500 \times 10 \times 600 = 255 \times 10^6 \text{ J}$$

گام سوم: توان خروجی پمپ را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W_{\text{پمپ}}}{\Delta t} \quad \Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s} \rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{255 \times 10^6}{60} = 4.25 \times 10^6 \text{ W}$$

$$10^6 \text{ W} = 1 \text{ MW} \rightarrow P_{\text{خروجی}} = 4.25 \text{ MW}$$

گام چهارم: توان ورودی پمپ برابر است با:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow 34 = \frac{4.25}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow P_{\text{ورودی}} = 12.5 \text{ MW}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک بزرگراه از بخش‌های بتونی به طول ۲۵ m ساخته شده است. این بخش‌ها در دمای 10°C ، بتون‌ریزی و عمل آورده شده‌اند. برای جلوگیری از تاب برداشتن بتون در دمای 50°C ، مهندسان باید فاصله چند سانتی‌متری را بین این قطعه‌ها در نظر بگیرند؟ ($\alpha_{\text{بتون}} = 14 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$)

۲۱ (۴)

۱۴ (۳)

۲/۱ (۲)

۱/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

رابطه انبساط طولی:

درس: Box

طول اولیه $\uparrow$ افزایش طول $\uparrow$

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T \rightarrow \text{K یا } ^{\circ}\text{C}$$

ضریب انبساط طولی برحسب $\frac{1}{\text{K}}$ یا $\frac{1}{^{\circ}\text{C}}$

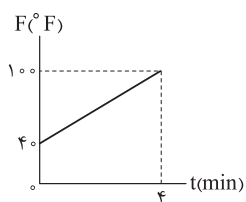
پاسخ خیلی تشریحی ✓ فاصله مورد نظر بین قطعه‌ها باید برابر با افزایش طول هر یک از قطعه‌ها باشد، پس:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta = 25 \times 14 \times 10^{-6} \times (50 - (-10)) = 2/1 \times 10^{-2} \text{ m} \xrightarrow{10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}} \Delta L = 2/1 \text{ cm}$$

یک بزرگراه از بخش‌های بتونی به طول ۲۵/۰ m ساخته شده است. این بخش‌ها در دمای $10/0^{\circ}\text{C}$ ، بتون‌ریزی و عمل آورده شده‌اند. برای جلوگیری از تاب برداشتن بتون در دمای $50/0^{\circ}\text{C}$ ، مهندسان باید چه فاصله‌ای را بین این قطعه‌ها در نظر بگیرند؟ ($\alpha_{\text{بتون}} \approx 14 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) (فیزیک (۱) - تمرین ۵ صفحه ۱۲۳ کتاب درسی)

کتاب
درسی

یک گرمکن ۲۵۰ واتی به طور کامل درون ۳ kg از مایعی قرار دارد. اگر نمودار دمای این مایع بر حسب زمان به شکل زیر باشد، گرمای ویژه آن در SI کدام است؟



۶۰۰ (۱)

۱۰۸۰ (۲)

۱۸۰ (۳)

۳۲۴۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تغییر دمای مایع را بر حسب درجه سلسیوس به دست آورید. سپس به کمک رابطه توان و گرما، گرمای ویژه مایع را حساب کنید.

Hint

درس Box

(۱) رابطه بین تغییرات دما در مقیاس‌های فارنهایت و سلسیوس:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$$

(۲) گرمای لازم برای تغییر دما:

$$Q = m c (\theta_2 - \theta_1)$$

جرم جسم
دمای ثانویه
↓
↓
گرمای ویژه جسم
دمای اولیه

(۳) توان گرمایی:

$$P = \frac{Q}{t}$$

گرمای (J)
زمان (s)

گام اول: تغییر دما را بر حسب درجه سلسیوس به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow 100 - 40 = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{5 \times 60}{9} = \frac{100}{3} ^\circ \text{C}$$

گام دوم: به کمک رابطه توان و گرمای لازم برای تغییر دما، گرمای ویژه مایع را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{mc\Delta\theta}{t} \xrightarrow{t=4 \text{ min}=4 \times 60 \text{ s}} 250 = \frac{3 \times c \times \frac{100}{3}}{4 \times 60} \Rightarrow c = \frac{250 \times 4 \times 60}{100} = 600 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$$



چند کیلوژول گرما لازم است تا ۶۰۰ g آب با دمای 30°C در فشار ۱ atm، به جوش آمده و $\frac{1}{3}$ از آن تبخیر شود؟

($c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ و $L_V = 2256 \text{ J/g}$ تبخیر سطحی ناچیز است.)

۶۲ / ۷۶ (۲)

۴۵ / ۱۲ (۱)

۶۲۷ / ۶ (۴)

۴۵۱ / ۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) درس باکس ۲، سؤال ۴۲ را بخوانید.

(۲) گرمای لازم برای تغییر حالت از مایع به بخار:

گرمای نهان تبخیر مایع

$$Q_V = m L_V$$

جرم
مایع

گرمای مورد نیاز، کل آب را به نقطه جوش (دمای 100°C) می‌رساند و سپس $\frac{1}{3}$ آن را تبخیر می‌کند؛ بنابراین داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$Q = mc\Delta\theta + m'L_V \xrightarrow{c=4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}} \quad \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C}} = 4/2} Q = 600 \times 4/2 \times (100 - 30) + \left(\frac{1}{3} \times 600\right) \times 2256$$

$$= 176400 + 451200 = 627600 \text{ J} \xrightarrow{1 \text{ J} = 10^{-3} \text{ kJ}} Q = 627/6 \text{ kJ}$$

۱۰۰ g آب درون گرماسنجی به ظرفیت گرمایی $980 \text{ J/}^\circ\text{C}$ وجود دارد و دمای مجموعه 0°C است. قطعه فلزی به جرم 500 g و دمای 80°C را در گرماسنج قرار می‌دهیم. پس از ایجاد تعادل گرمایی، دمای مجموعه به چند درجه سلسیوس می‌رسد؟ (گرمای ویژه آب و فلز به ترتیب $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ و $400 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ است و مجموعه با محیط، گرما مبادله نمی‌کند.)

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) قانون پایستگی انرژی در تعادل‌های گرمایی: مجموع گرماهای مبادله‌شده بین اجسام تا برقراری تعادل، برابر صفر است:

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

(۲) رابطه ظرفیت گرمایی:

$$C = mc$$

↑
گرمای ویژه
↓
جرم

(۳) درس‌بکس ۲، سؤال ۴۲ را بخوانید.

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{گرماسنج}} + Q_{\text{فلز}} = 0 \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_e - \theta_{1(\text{آب})}) + C_{\text{گرماسنج}} (\theta_e - \theta_{1(\text{گرماسنج})}) + m_{\text{فلز}} c_{\text{فلز}} (\theta_e - \theta_{1(\text{فلز})}) = 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{m_{\text{آب}} = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}}{m_{\text{فلز}} = 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}} \rightarrow 0.1 \times 4200 (\theta_e - 0) + 980 \times (\theta_e - 0) + 0.5 \times 400 \times (\theta_e - 80) = 0$$

$$\Rightarrow 420 \theta_e + 980 \theta_e + 200 \theta_e - 16000 = 0 \Rightarrow 1600 \theta_e = 16000 \Rightarrow \theta_e = 10^\circ\text{C}$$

در کدام مورد، سازوکار انتقال گرما با سایر موارد متفاوت است؟

- (۱) گرم شدن آب درون قابلمه روی شعله
- (۲) گرم شدن هوای داخل اتاق توسط بخاری
- (۳) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن
- (۴) سیستم گرم کننده مرکزی در ساختمان‌ها

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

همرفت طبیعی: در این روش انتقال گرما، انتقال بخش‌های شاره به طور طبیعی و به دلیل کاهش چگالی و براساس اصل ارشمیدس صورت می‌گیرد. گرم شدن هوای داخل اتاق به وسیله بخاری و رادیاتور شوفاژ، گرم شدن آب درون قابلمه، جریان‌های باد ساحلی و انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن، نمونه‌هایی از همرفت طبیعی است.

همرفت واداشته: در این روش انتقال گرما، انتقال بخش‌های شاره به کمک یک تلمبه (طبیعی یا مصنوعی) صورت می‌گیرد. سیستم گرم کننده مرکزی در ساختمان‌ها، سیستم خنک کننده موتور اتومبیل و گرم و سرد شدن بخش‌های مختلف بدن بر اثر گردش جریان خون در بدن جانوران خونگرم، نمونه‌هایی از همرفت واداشته است.

سازوکار انتقال گرما در گزینه (۴)، همرفت واداشته و در بقیه گزینه‌ها، همرفت طبیعی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(سوال ۷۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

کدام مورد همرفت طبیعی است؟

- (۱) سیستم خنک کننده موتور اتومبیل
- (۲) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن
- (۳) سیستم گرم کننده مرکزی در ساختمان‌ها
- (۴) گرم و سرد شدن بخش‌های مختلف بدن بر اثر گردش خون در بدن جانوران خونگرم

کنکور

فشار پیمانه‌ای مقدار معینی گاز کامل برابر 2 atm است. اگر در طی فرایندی در فشار ثابت، حجم گاز 5 L کاهش یابد، کار انجام‌شده توسط گاز در این فرایند چند کیلوژول است؟ ($P_0 = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $1/5$ (۴) $-1/5$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا فشار مطلق گاز را حساب کنید. سپس به کمک رابطه کاری که گاز روی محیط انجام می‌دهد، خواسته سؤال را به دست آورید.

Hint

درس‌Box

(۱) فشار پیمانه‌ای گاز: اختلاف فشار (مطلق) گاز و فشار هوا؛ به زبان ریاضی:

$$P_g = P - P_0$$

(۲) در فرایند هم‌فشار، کار محیط روی گاز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W = -P \Delta V$$

تغییر حجم گاز
↑
فشار (مطلق) گاز
↓

(۳) کار گاز روی محیط:

$$W' = -W = P \Delta V$$

گام اول: فشار (مطلق) گاز را حساب می‌کنیم:

$$P_g = P - P_0 \Rightarrow 2 = P - 1 \Rightarrow P = 3 \text{ atm} = 3 \times 10^5 \text{ Pa}$$

گام دوم: کار انجام‌شده توسط گاز برابر است با:

$$W' = P \Delta V \xrightarrow{\Delta V = -5 \text{ L} = -5 \times 10^{-3} \text{ m}^3} W' = 3 \times 10^5 \times (-5 \times 10^{-3}) = -1.5 \times 10^3 \text{ J}$$

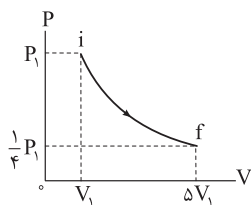
$$\xrightarrow{10^3 \text{ J} = 1 \text{ kJ}} W' = -1.5 \text{ kJ}$$

در رابطه کار، اگر به جای P ، فشار پیمانه‌ای گاز را قرار دهید، به گزینه اشتباه (۲) می‌رسید. در ضمن گزینه (۳) هم برای کسانی که به اشتباه، کار محیط روی گاز را حساب می‌کنند، در گزینه‌ها قرار داده شده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

نمودار $P - V$ مقدار معینی گاز کامل که در طی فرایندی ایستوار از حالت i به حالت f می‌رود، به شکل زیر است.



کدام مورد دربارهٔ این فرایند الزاماً درست است؟

- (۱) این فرایند، هم‌دما است.
- (۲) این فرایند، بی‌دررو است.
- (۳) در این فرایند، گاز گرما دریافت کرده است.
- (۴) در این فرایند، گاز گرما از دست داده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

(۱) انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل، متناسب با دمای مطلق گاز و در نتیجه متناسب با PV است:

$$U \propto T \propto PV$$

تغییرات انرژی درونی گاز

$$\Delta U = Q + W$$

گرمایی که گاز می‌گیرد.

(۲) قانون اول ترمودینامیک:

(۳) درس‌بکس ۲، سؤال ۴۶ را بخوانید.

(۴) در فرایند بی‌دررو، گرمای مبادله‌شده بین محیط و گاز صفر است؛ بنابراین در این فرایند، تغییرات انرژی درونی گاز با کاری که محیط بر روی گاز انجام می‌دهد، برابر است.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0} \Delta U = W$$

در این فرایند، حاصل PV گاز، از $P_1 V_1$ (حالت i) به $\frac{1}{4} P_1 V_1$ (حالت f) رسیده، یعنی افزایش یافته است؛ بنابراین طبق تناسب $U \propto T \propto PV$ ، دما و در نتیجه انرژی درونی گاز نیز افزایش می‌یابد، پس این فرایند هم‌دما نیست (ردگزینهٔ (۱)).

از طرفی، حجم گاز افزایش یافته است ($\Delta V > 0$) و طبق رابطهٔ $W = -P\Delta V$ کار محیط روی گاز منفی است، پس در این فرایند، $W < 0$ و $\Delta U > 0$ است. با توجه به این که در فرایند بی‌دررو $\Delta U = W$ است، این فرایند نمی‌تواند بی‌دررو هم باشد (ردگزینهٔ (۲)).

حالا قانون اول ترمودینامیک را می‌نویسیم:

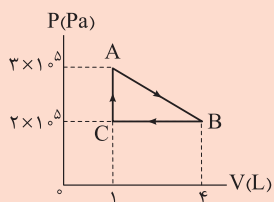
$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[\Delta U > 0]{W < 0} Q > 0$$

یعنی در این فرایند، گاز گرما دریافت کرده است (رد گزینهٔ (۴)).

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار $P-V$ مقدار معینی گاز کامل، در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. اگر انرژی درونی گاز در نقطه A برابر 600 J باشد، به ترتیب از راست به چپ، گرمای دریافتی گاز در فرایند AB و کار انجام‌شده روی گاز در چرخه، چند ژول است؟



- (۱) $150, 250$
(۲) $-150, 250$
(۳) $150, 1750$
(۴) $-150, 1750$

پاسخ: گزینه ۴

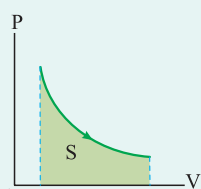
Hint

ابتدا به کمک حاصل PV نقاط A و B ، انرژی درونی گاز در نقطه B را به دست می‌آوریم. سپس به کمک مساحت سطح زیر نمودار فرایند AB ، کار محیط روی گاز در این فرایند را حساب کنید. در ادامه، به کمک قانون اول ترمودینامیک، گرمایی که گاز در فرایند AB دریافت می‌کند را به دست آورید. در پایان، با استفاده از مساحت داخل چرخه، کار انجام‌شده روی گاز را حساب کنید.

درس: Box

(۱) درس‌بکس ۱ و ۴، سؤال ۴۷ را بخوانید.

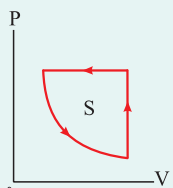
(۲) مساحت زیر نمودار $P-V$ برابر با قدرمطلق کار انجام‌شده است:



$$S = |W|$$

● اگر حجم گاز افزایش یابد، کار محیط بر روی دستگاه، منفی ($W < 0$) و اگر حجم گاز کاهش یابد، کار محیط بر روی دستگاه مثبت ($W > 0$) است.

(۳) مساحت سطح داخل یک چرخه در نمودار $P-V$ با قدرمطلق کار انجام‌شده در آن چرخه برابر است:



$$S = |W|$$

● اگر جهت چرخه ساعتگرد باشد، کار محیط بر روی دستگاه در چرخه، منفی ($W < 0$) و اگر پادساعتگرد باشد، کار محیط بر روی دستگاه در چرخه، مثبت ($W > 0$) است.

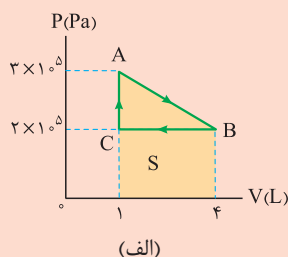
گام اول: انرژی درونی گاز در نقطه B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U \propto PV \Rightarrow \frac{U_B}{U_A} = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} \Rightarrow \frac{U_B}{600} = \frac{2 \times 10^5 \times 4}{3 \times 10^5 \times 1} \Rightarrow U_B = 1600 \text{ J}$$

گام دوم: با توجه به شکل (الف)، کار محیط روی گاز در فرایند AB را حساب می‌کنیم:

$$|W_{AB}| = S = \frac{2 \times 10^5 + 3 \times 10^5}{2} \times (4 - 1) \times 10^{-3} = 750 \text{ J} \xrightarrow{W_{AB} < 0} W_{AB} = -750 \text{ J}$$

تبدیل L به m^3



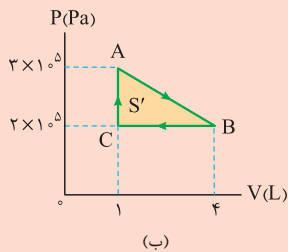
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام سوم: قانون اول ترمودینامیک را برای فرایند AB می‌نویسیم تا گرمای دریافتی گاز در این فرایند به دست آید:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} + W_{AB} \Rightarrow 1600 - 600 = Q_{AB} + (-750) \Rightarrow Q_{AB} = 1750 \text{ J}$$

گام چهارم: با توجه به شکل (ب)، کار انجام‌شده روی گاز در چرخه را محاسبه می‌کنیم:

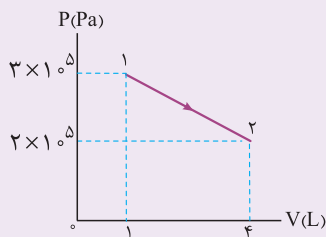
$$|W_{\text{چرخه}}| = S' = \frac{(4-1) \times 10^{-3} \times (3 \times 10^5 - 2 \times 10^5)}{2} = \frac{300}{2} = 150 \text{ J} \xrightarrow{W_{\text{چرخه}} < 0} W_{\text{چرخه}} = -150 \text{ J}$$



نمودار $P - V$ گازی رقیق، در شکل زیر نشان داده شده است. اگر انرژی درونی در نقطه (۱) برابر 750 J باشد، در

(سؤال ۱۹۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ (خارج از کشور))

این فرایند، گاز چند ژول گرما گرفته است؟



(۱) 2750

(۲) 2000

(۳) 1250

(۴) 750

۴۹

در چرخه ماشین بنزینی، کدام فرایندها، فرایند بی دررو در نظر گرفته می شوند؟

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| (۱) ضربه مکش، ضربه خروج گاز | (۲) ضربه مکش، ضربه قدرت |
| (۳) ضربه تراکم، ضربه خروج گاز | (۴) ضربه تراکم، ضربه قدرت |

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در چرخه ماشین بنزینی، فرایندهای ضربه تراکم و ضربه قدرت به این دلیل که به سرعت رخ می دهند، بی دررو در نظر گرفته می شوند.



۵۰

یک ماشین گرمایی درون سوز، در هر چرخه 8 kJ گرما از سوزاندن سوخت دریافت می کند و 2 kJ کار تحویل می دهد. اگر ماشین در هر ثانیه 40 چرخه را بپیماید، به ترتیب توان ماشین بر حسب کیلووات و بازده ماشین کدام است؟

- (۱) $0/2$ ، 50 (۲) $0/2$ ، 80
(۳) $0/25$ ، 50 (۴) $0/25$ ، 80

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا کاری که ماشین گرمایی در 40 چرخه (۱ ثانیه) انجام می دهد را حساب کنید. سپس به کمک رابطه توان و رابطه بازده، خواسته های سؤال را به دست آورید.

درس Box

(۱) توان: نسبت کار انجام شده به مدت زمان انجام کار است و از رابطه زیر به دست می آید:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t}$$

(۲) بازده ماشین های گرمایی:

کاری که ماشین انجام می دهد

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

گرمایی که ماشین از منبع دمابالا می گیرد

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ماشین در هر چرخه 2 kJ کار انجام می دهد؛ بنابراین کاری که ماشین گرمایی در 40 چرخه (۱s) انجام می دهد، برابر است با:

$$|W| = 40 \times |W_{\text{چرخه}}| = 40 \times 2 = 80 \text{ kJ}$$

گام دوم: توان ماشین به صورت زیر به دست می آید:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{80}{1} = 80 \text{ kW}$$

گام سوم: بازده ماشین برابر است با:

$$\eta = \frac{|W_{\text{چرخه}}|}{Q_H (\text{چرخه})} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0/25$$

درس کتاب

یک ماشین گرمایی درون سوز در هر چرخه $8/00 \text{ kJ}$ گرما از سوزاندن سوخت دریافت می کند و $2/00 \text{ kJ}$ کار تحویل می دهد. گرمای حاصل از سوخت $10^4 \times 5/0 \text{ J/g}$ است و ماشین در هر ثانیه $40/0$ چرخه را می پیماید. کمیت های زیر را حساب کنید.
(فیزیک (۱) - تمرین ۱۳ صفحه ۱۴۹ کتاب درسی)
(الف) بازده ماشین، (ب) سوخت مصرف شده در هر چرخه و (پ) توان ماشین.

شیمی دهم

۵۱

کدام مورد درست است؟

- (۱) همه ایزوتوپ‌های طبیعی اورانیوم، به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار می‌روند.
- (۲) پاسخ‌دادن به این سؤال که «پدیده‌های طبیعی چرا و چگونه رخ می‌دهند؟» با کمک علم تجربی امکان‌پذیر است.
- (۳) با انجام واکنش‌های هسته‌ای در ستاره‌ها، عنصرهای سبک از عنصرهای سنگین پدید می‌آیند.
- (۴) یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن، فاقد ایزوتوپ پرتوزا است.



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

سه سؤال اساسی و مهم در مورد جهان هستی و نحوه توجیه آن‌ها به صورت زیر است:

سؤال اساسی	نحوه توجیه
۱ هستی چگونه پدید آمده است؟	در قلمرو علم تجربی نمی‌گنجد و انسان با بینش عقلانی و آموزه‌های الهی می‌تواند به پاسخ آن برسد.
۲ جهان کنونی چگونه شکل گرفته است؟	با علوم تجربی و با استفاده از پدیده‌های طبیعی قابل توجیه است.
۳ پدیده‌های طبیعی، چگونه و چرا رخ می‌دهند؟	

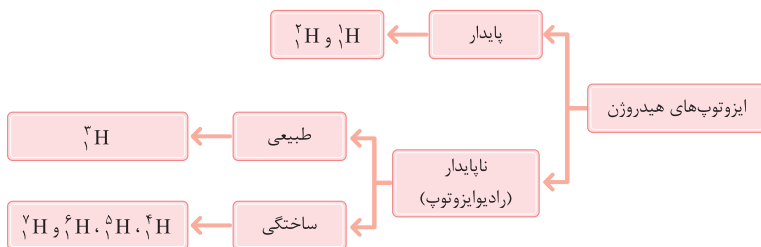
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): فقط یکی از ایزوتوپ‌های اورانیوم، یعنی ${}^{235}\text{U}$ ، اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار می‌رود.

گزینه (۳): کاملاً برعکس! با انجام واکنش‌های هسته‌ای درون ستاره‌ها، عنصرهای سبک‌تر به عنصرهای سنگین‌تر تبدیل می‌شوند.

واکنش‌های هسته‌ای درون ستاره‌ها: عنصرهای سبک‌تر → عنصرهای سنگین‌تر

گزینه (۴): از میان ۳ ایزوتوپ طبیعی هیدروژن، ایزوتوپ ${}^3_1\text{H}$ ناپایدار و پرتوزا است.



عنصر لوتسیم (${}^{175}_{71}\text{Lu}$)، متعلق به کدام دسته از جدول دوره‌ای است و اگر عنصر A^{137} با لوتسیم هم‌دوره و در خانه مجاور و قبل از آن قرار گرفته باشد، تفاوت شمار نوترون‌های این دو اتم کدام است؟

(۲) p, ۲۳

(۱) d, ۳۷

(۴) d, ۲۳

(۳) p, ۳۷

پاسخ: گزینه ۴

مکان‌یابی عنصرها به کمک گاز نجیب:



تعیین شماره دوره (تناوب): با توجه به عدد اتمی گازهای نجیب و جایگاه آن‌ها در جدول دوره‌ای، خیلی سریع! به کمک جدول زیر می‌توانید شماره دوره هر عنصری که دلتون فواست رو به دست بیارید (ابتدا باید مشخص کنید که عدد اتمی عنصر مورد نظر بین عدد اتمی کدام دو گاز نجیب قرار دارد، شماره دوره عنصر مورد نظر با شماره دوره گاز نجیب بعد از عنصر، برابر است):

محدوده عدد اتمی	۱ و ۲	۳ تا ۱۰	۱۱ تا ۱۸	۱۹ تا ۳۶	۳۷ تا ۵۴	۵۵ تا ۸۶	۸۷ تا ۱۱۸
شماره دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

تعیین شماره گروه:

سه حالت پیش می‌آید:

(۱) اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، در این حالت شماره گروه برابر با تفاوت عدد اتمی عنصر با گاز نجیب دوره قبل است (شماره گروه برابر ۱ یا ۲ می‌باشد).

مثال عنصری با عدد اتمی ۱۹ متعلق به گروه ۱ و عنصری با عدد اتمی ۵۶، متعلق به گروه ۲ است.

$$19 - 18 = 1 \quad \text{آرگون} \quad 56 - 54 = 2 \quad \text{زنون}$$

(۲) عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهایی با عدد اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

(۳) برای بقیه عنصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از دو واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم‌دوره‌اش را از عدد ۱۸ کم کنیم تا شماره گروه به دست آید.

$$[(\text{عدد اتمی عنصر}) - (\text{عدد اتمی گاز نجیب هم‌دوره عنصر})] = \text{شماره گروه}$$

$${}_{71}^{175}\text{Lu} \xrightarrow{23-18=5} \text{شماره گروه} = 18 - (36 - 23) = 5$$

گاز نجیب هم‌دوره

مثال

ابتدا شماره گروه لوتسیم (${}^{175}_{71}\text{Lu}$) را تعیین می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

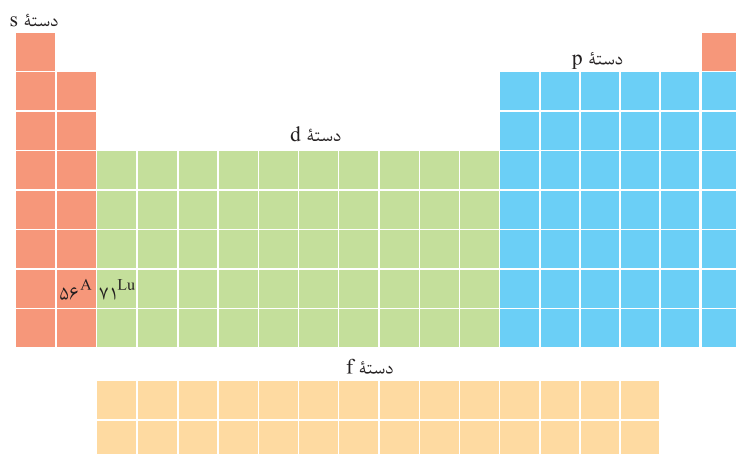
$$18 - (86 - 71) = 3$$

گاز نجیب هم‌دوره

این عنصر در گروه ۳ قرار دارد؛ بنابراین متعلق به دسته d جدول تناوبی است. عنصرهای دسته d در گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول قرار دارند.

هالا بریم سراغ قسمت دوم سؤال:

عدد اتمی ${}_{71}\text{Lu}$ ، بین دو گاز نجیب ${}_{54}\text{Xe}$ و ${}_{86}\text{Rn}$ است، پس در دوره ششم جدول جای دارد. از آن‌جا که عنصر A^{137} با لوتسیم، هم‌دوره است و در خانه مجاور و قبل از آن قرار گرفته، پس این عنصر در دوره ششم و در گروه ۲ جای دارد. در ضمن این عنصر دو واحد جلوتر از گاز نجیب ${}_{54}\text{Xe}$ است؛ بنابراین عدد اتمی آن ۵۶ است.



حالا اختلاف شمار نوترون‌های این دو عنصر را می‌ساییم:

$$\begin{aligned} {}^{175}_{71}\text{Lu} &\rightarrow \text{شمار نوترون‌ها: } 175 - 71 = 104 \\ {}^{137}_{56}\text{A} &\rightarrow \text{شمار نوترون‌ها: } 137 - 56 = 81 \end{aligned} \Rightarrow 104 - 81 = 23$$

عنصرهایی با عددهای اتمی ۵۷ تا ۷۰ در ردیف اول پایین جدول قرار گرفته‌اند، پس عدد اتمی عنصر هم‌دوره قبل از ${}_{71}\text{Lu}$ ، ۷۰ نیست!

گول نخوری

جرم اتمی میانگین عنصر A دارای ایزوتوپ‌های 2_0A و ${}^{24}_{11}A$ ، برابر $23/2 \text{ amu}$ است. به منظور غنی‌سازی ایزوتوپ سبک‌تر، مقداری از ایزوتوپ‌های سنگین‌تر را از مخلوط خارج می‌کنیم. به تقریب چند درصد از این ایزوتوپ‌ها باید خارج شوند تا جرم اتمی میانگین $1/6$ واحد تغییر کند؟ (جرم هر پروتون و نوترون را به تقریب 1 amu فرض کنید).

۸۳ (۱) ۵۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با خارج کردن ایزوتوپ سنگین‌تر، درصد فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر افزایش می‌یابد و جرم اتمی میانگین کاهش خواهد یافت. با توجه به جرم اتمی میانگین قبل و بعد از غنی‌سازی می‌توان درصد فراوانی ایزوتوپ‌ها را مشخص کرد.

$$M = M_1 + \frac{F_2}{F_{\text{کل}}} (M_2 - M_1) \Rightarrow 23/2 = 20 + \frac{F_2}{100} (24 - 20) \Rightarrow 320 = 4F_2 \Rightarrow F_2 = 80\%, F_1 = 20\%$$

$$M = 23/2 - 1/6 = 21/6 \Rightarrow 21/6 = 20 + \frac{F'_2}{100} (24 - 20) \Rightarrow 160 = 4F'_2 \Rightarrow F'_2 = 40\%, F'_1 = 60\%$$

↓
میزان تغییر

حالا با توجه به درصد فراوانی‌ها، اگر فرض کنیم قبل از غنی‌سازی، 80% عدد ایزوتوپ سنگین‌تر داشتیم، باید ببینیم چند عدد از آن کم شود تا فراوانی آن به 40% درصد برسد:

$$40 = \frac{80 - x}{100 - x} \times 100 \Rightarrow 800 - 100x = 4000 - 40x \Rightarrow 4000 = 60x \Rightarrow x = \frac{4000}{6}$$

و در نهایت، درصد کاهش برابر خواهد بود با:

$$\text{درصد کاهش} = \frac{\text{تعداد ایزوتوپ سنگین‌تر خارج شده}}{\text{تعداد ایزوتوپ سنگین‌تر اولیه}} \times 100 \Rightarrow \text{درصد کاهش} = \frac{4000}{80} \times 100 = \frac{4000}{80} \times 100 = \frac{4000}{96} \times 100 \approx 83\%$$

سؤال، تفاوت درصد فراوانی ایزوتوپ سنگین $(80 - 40 = 40)$ در دو حالت را نخواست! بلکه درصد تعداد ایزوتوپ‌های خارج شده رو خواسته!

گول نخوری ✗

اگر مجموع $(n+1)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم یک عنصر از گروه ۱۷ برابر ۲۶ باشد، کدام گزینه درست است؟



(۱) در اتم این عنصر، ۱۳ الکترون با $l=1$ وجود دارد.

(۲) گازی بی‌رنگ است که برای ضدعفونی کردن محیط کاربرد دارد.

(۳) عدد اتمی آن، ۴/۲۵ برابر عدد اتمی اولین عنصر گروه دوم جدول است.

(۴) با هیدروژن، یک ترکیب یونی به فرم HX تشکیل می‌دهد.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اول ببینیم با کدام عنصر سروکار داریم.

آرایش الکترونی لایه ظرفیت عنصرهای گروه ۱۷ به صورت $ns^2 np^5$ است.

$$(n+1) \Rightarrow ns^2 np^5 \Rightarrow 2(n+0) + 5(n+1) = 26 \Rightarrow 7n = 21 \Rightarrow n = 3$$

آرایش الکترونی لایه ظرفیت $3s^2 3p^5$ متعلق به عنصر ${}_{17}\text{Cl}$ می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): در اتم کلر $({}_{17}\text{Cl})$ ، ۱۱ الکترون با $l=1$ ($3p^5, 2p^6$) وجود دارد:



گاز زردرنگ کلر

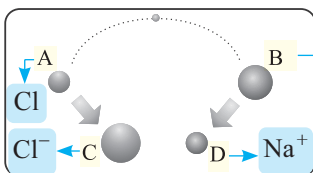
گزینه (۲): گاز کلر (Cl_2) ، زردرنگ است و خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی دارد.

گزینه (۳): اولین عنصر گروه دوم جدول تناوبی، بریلیم (${}_4\text{Be}$) است.

$$\frac{\text{عدد اتمی کلر}}{\text{عدد اتمی بریلیم}} = \frac{17}{4} = 4.25$$

گزینه (۴): HCl یک ترکیب مولکولی است و نه یونی!

با توجه به شکل زیر که واکنش بین سدیم و کلر و تشکیل سدیم کلرید را نشان می‌دهد، کدام گزینه درست است؟



(۱) A و B به ترتیب سدیم و کلر و جهت حرکت الکترون از A به سمت B است.

(۲) با دادوستد الکترون، A و B به ترتیب به آرایش گاز نجیب قبل و بعد از خود می‌رسند.

(۳) نسبت شمار الکترون‌های دارای عدد کوانتومی فرعی $l = 0$ در D به شمار الکترون‌های دارای عدد کوانتومی فرعی $l = 1$ در C، برابر $25/0$ است.

(۴) نسبت مجموع اعداد کوانتومی فرعی الکترون‌های آخرین لایه اشغال شده D به مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های آخرین زیرلایه اشغال شده C، برابر $1/4$ است.

پاسخ: گزینه ۴



شعاع یک کاتیون (یون مثبت) از شعاع اتم خنثای خودش، کوچک‌تر و شعاع یک آنیون از شعاع اتم خنثای خودش، بزرگ‌تر است.

با توجه به شکل، A با گرفتن الکترون به C با شعاع بزرگ‌تر تبدیل شده است، بنابراین: (یون کلرید) $C: Cl^-$ اتم $A: Cl$
B نیز با از دست دادن الکترون به D با شعاع کوچک‌تر تبدیل شده است؛ بنابراین: (یون سدیم) $D: Na^+$ اتم $B: Na$
نسبت مورد نظر برابر است با:

$$D = {}_{11}Na^+ : 1s^2 2s^2 2p^6 \rightarrow (n=2): \text{مجموع اعداد کوانتومی فرعی الکترون‌های لایه آخر } (2) = 6 + 2(0) = 6$$

$$C = Cl^- : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \rightarrow (3p^6): \text{مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های آخرین زیرلایه } (3p^6) = 6(3+1) = 24$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع اعداد کوانتومی فرعی الکترون‌های لایه آخر D}}{\text{مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های آخرین زیرلایه C}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): A و B به ترتیب اتم‌های کلر و سدیم هستند. هم‌چنین جهت حرکت الکترون از فلز B به سمت نافلز A است.

گزینه (۲): اتم‌های سدیم (B) با از دست دادن الکترون، به آرایش پایدار گاز نجیب پیش از خود (Ne) و اتم‌های کلر (C) با گرفتن الکترون، به آرایش پایدار گاز نجیب هم‌دوره خود (Ar) می‌رسند.

گزینه (۳): $l = 0$ و $l = 1$ به ترتیب مربوط به زیرلایه‌های s و p می‌باشند:

$$\frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0 \text{ در } D (Na^+)}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=1 \text{ در } C (Cl^-)} = \frac{4 (1s^2 2s^2)}{12 (2p^6 3p^6)} = \frac{1}{3}$$

کدام مورد درست است؟ ۵۶

- ۱) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، نسبت جرم به حجم هوا کاهش می‌یابد.
- ۲) تغییرات فشار در هواکره را می‌توان دلیلی بر لایه‌ای بودن آن دانست.
- ۳) آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم‌های گازی که برای سرد کردن قطعات الکترونیکی دستگاه MRI استفاده می‌شود، مشابه با این آرایش در اتم عنصرهای گروه دوم جدول است. **هلیوم**
- ۴) اوزون استراتوسفری از واکنش گازهای O_2 و NO_2 حاصل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نسبت جرم به حجم، همان چگالی است که با افزایش ارتفاع از سطح زمین، کاهش می‌یابد، یعنی شمار ذره‌ها (و جرم) در واحد حجم هوا، کم‌تر می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: دلیل لایه‌ای بودن هواکره، روند غیریکنواخت و نامنظم تغییر دما است و نه تغییر فشار!

گزینه ۳: گازی که برای سرد کردن قطعات الکترونیکی دستگاه MRI استفاده می‌شود، هلیوم (4He) است. آرایش الکترون - نقطه‌ای این گاز نجیب به صورت $He: 1s^2$ بوده، اما برای عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی به صورت $E: ns^2$ است.

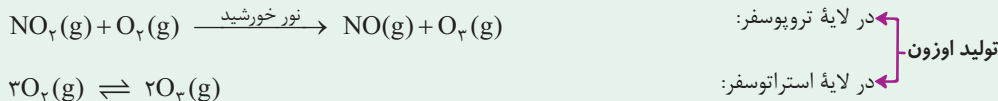
نکته

- ۱) از آن‌جا که آرایش الکترونی لایه ظرفیت اتم عنصرهای یک گروه شبیه یکدیگر است، پس به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که آرایش الکترون - نقطه‌ای آن‌ها نیز مشابه هم می‌باشد. (البته به جز گروه ۱۸ به خاطر هلیوم!)
- ۲) در مورد عناصر دسته s و p، تعداد نقاط در آرایش الکترون - نقطه‌ای که همان شمار الکترون‌های ظرفیتی عناصر است، برابر با یکان شماره گروه آن‌ها می‌باشد. (البته به جز هلیوم!)

شماره گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	
								هلیوم	بقیه عناصر
تعداد الکترون‌های ظرفیتی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۲	۸
آرایش الکترون - نقطه‌ای	$X\cdot$	$X\cdot X\cdot$	$\cdot X\cdot$	$\cdot X\cdot$	$\cdot X\cdot$	$\cdot X\cdot$	$\cdot X\cdot$	$He:$	$:X::$

- گزینه ۴: در تروپوسفر (نه استراتوسفر)، از واکنش میان گازهای اکسیژن (O_2) و نیتروژن دی‌اکسید (NO_2)، اوزون تروپوسفری تولید می‌شود.

نکته



معادله موازنه شده سوختن کامل ترکیبی با فرمول $C_xH_{18}N_2O_y$ به صورت زیر است. نسبت جرم کربن به اکسیژن در این ترکیب کدام است؟ ($C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)



۹ (۴)

۶ (۳)

۴ / ۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا باید تکلیف X و y را مشخص کنیم:



موازنه C: $2x = 24 \Rightarrow x = 12$

موازنه O: $2y + 62 = 48 + 18 \Rightarrow y = 2$

پس فرمول ترکیب مورد نظر به صورت $C_{12}H_{18}N_2O_2$ است.

حالا بریم سراغ نسبت خواسته شده:

$$\frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم اکسیژن}} = \frac{\text{جرم مولی کربن} \times \text{مول کربن}}{\text{جرم مولی اکسیژن} \times \text{مول اکسیژن}} = \frac{12 \times 12}{16 \times 4} = 4/5$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شمار نوترون‌های موجود در $^{90}_{38}\text{Sr}$ برابر ۵۲ است. اگر جرم مولی این یون برابر ۱۲۸ گرم باشد، نسبت شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار این یون به q ، کدام است؟ (در ساختار لوویس XO_4^{q-} ، همه پیوندها یگانه هستند و همه اتم‌ها به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند.)

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اول باید ببینیم در یک مول از یون XO_4^{q-} ، چند مول نوترون وجود دارد:

$$1 \text{ mol XO}_4^{q-} \times \frac{13/8 \text{ mol نوترون}}{1 \text{ mol XO}_4^{q-}} = 69 \text{ mol نوترون}$$

با توجه به جرم مولی، شمار کل پروتون‌های این یون را می‌ساییم. با توجه به این که جرم پروتون و نوترون تقریباً ۱ amu است و جرم هر واحد فرمولی برحسب amu تقریباً با جرم مولی برابر است، جرم مولی یون را می‌توان مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن در نظر گرفت:

$$128 = 69 + p \Rightarrow p = 59$$

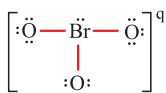
این یون چنداتی حاوی ۳ اتم اکسیژن (O) و ۱ اتم X است؛ بنابراین شمار پروتون (عدد اتمی) X برابر است با:

$$59 - 3(8) = 35 \Rightarrow {}_{35}^{80}\text{Br}$$

با توجه به تعداد کل الکترون‌های به کاررفته در ساختار لوویس یک یون، می‌توان از فرمول زیر برای محاسبه بار یک یون مجهول استفاده کرد.

(مجموع شمار الکترون‌های به کاررفته در ساختار لوویس) - (مجموع شمار الکترون‌های لایه ظرفیت اتم‌ها) = بار یون (q)

حالا ساختار لوویس آن را رسم کرده و همه اتم‌ها را هشت‌تایی می‌کنیم:



$$q = \underset{\text{Br}}{7} + \underset{\text{O}}{3(6)} - 26 = -1$$

$$\frac{\text{شمار پیوندهای اشتراکی}}{\text{بار یون } (q)} = \frac{3}{-1} = -3$$

در ساختار این یون، سه پیوند اشتراکی وجود دارد:



کدام مورد درست است؟ ۵۹

- (۱) اکسید فلزهای گروه اول برخلاف اکسیدهای عنصرهای گروه ۱۶، خاصیت اسیدی داشته و رنگ کاغذ pH را به رنگ قرمز درمی آورند.
- (۲) میل ترکیبی هموگلوبین به کربن مونواکسید، حدود ۲۰ برابر اکسیژن است.
- (۳) اگر واکنش $2\text{NaNO}_3(s) \rightarrow 2\text{NaNO}_2(s) + \text{O}_2(g)$ ، در ظرف در بسته انجام شود، جرم مخلوط واکنش در طی انجام واکنش به اندازه جرم اکسیژن تولیدی کاسته می شود.
- (۴) به ازای تولید برق یکسان، مقایسه میزان کربن دی اکسید تولیدشده از منابع مختلف به صورت «نفت خام < انرژی خورشیدی < گرمای زمین < باد» است.

پاسخ: گزینه ۴

در میان این منابع تولید برق، نفت خام، بیشترین مقدار کربن دی اکسید و باد، کمترین مقدار کربن دی اکسید را تولید می کند. مقایسه مقدار CO_2 تولیدی از طریق منابع مختلف برق رو به قاطر بسیارین: باد > گرمای زمین > انرژی خورشید > گاز طبیعی > نفت خام > زغال سنگ: CO_2 ایجادشده به ازای تولید برق یکسان بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): اکسید فلزهای گروه اول جدول تناوبی، خاصیت بازی دارند و کاغذ pH در محلول های بازی به رنگ آبی در می آید.

● اکسیدهای فلزی را اکسیدهای بازی می نامند؛ زیرا از واکنش آن ها با آب، باز تولید می شود و pH محلول حاصل بالاتر از ۷ است.

● اکسیدهای نافلزی را اکسیدهای اسیدی می نامند؛ زیرا از واکنش آن ها با آب، اسید تولید می شود؛ در نتیجه pH محلول حاصل از آن ها، کمتر از ۷ است.

● **توجه** لزوماً هر اکسید نافلزی، اکسید اسیدی نیست؛ به طور مثال گازهای کربن مونواکسید (CO)، نیتروژن مونواکسید (NO) و دی نیتروژن مونواکسید (N_2O) در آب به صورت مولکولی حل شده و با آب واکنش نمی دهند؛ بنابراین اکسید اسیدی نیستند.

اکسید نافلزی	اکسید فلزی	مثال
$\text{SO}_3, \text{N}_2\text{O}_5, \text{CO}_2$	$\text{Na}_2\text{O}, \text{CaO}$	
اسیدی	بازی	نوع اکسید
$0 \leq \text{pH} < 7$	$7 < \text{pH} \leq 14$	گستره pH محلول آبی در دمای اتاق
سرخ	آبی	رنگ کاغذ pH در محلول آبی

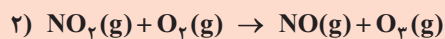
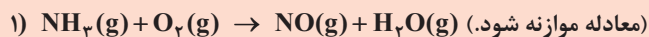
گزینه (۲): میل ترکیبی گاز CO با هموگلوبین، بیشتر از ۲۰۰ برابر میل ترکیبی اکسیژن با آن است. ویژگی های کربن مونواکسید (CO):

- از سوختن ناقص ترکیب های آلی تولید می شود.
- گازی بی رنگ و بی بو و بسیار سمی است (قاتل خاموش).
- چگالی کمتری نسبت به هوا دارد و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است.
- میل ترکیبی آن با هموگلوبین خون، بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است.
- واکنش پذیری بیشتری از کربن دی اکسید (CO_2) دارد و ناپایدارتر از آن است.
- اکسیدی خنثی است.

گزینه (۳): با توجه به این که ظرف واکنش در بسته است، گاز O_2 از آن خارج نمی شود؛ بنابراین طبق قانون پایستگی جرم، مجموع جرم واکنش دهنده ها با مجموع جرم فراورده های تولیدشده، برابر است و از جرم مخلوط واکنش کاسته نمی شود.

۶۰

با توجه به واکنش‌های زیر که در دو ظرف دربسته جداگانه (با حجم یکسان) به طور کامل انجام می‌شوند، اگر بعد از اتمام واکنش‌ها، فشار وارد شده به دیواره هر دو ظرف برابر شد، جرم گاز اکسیژن مصرف شده در واکنش (۲)، چند برابر جرم این گاز در واکنش (۱) است؟ (دمای هر دو ظرف در موقع اندازه‌گیری فشار برابر است.)



۵ (۴)

۲ (۳)

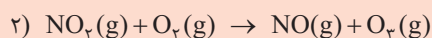
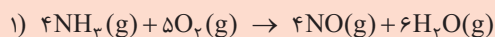
۱ (۲)

۰ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

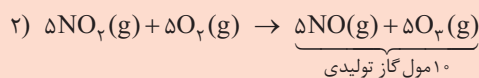
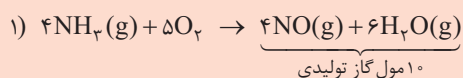
ابتدا معادله واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



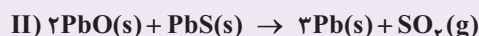
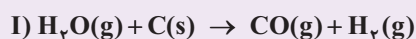
فرآورده فشار وارد شده به دیواره ظرف به دلیل وجود گازهایی است که تولید می‌شود. با توجه به این که فشار وارد شده به دیواره ظرف (۱) برابر با فشار وارد شده به دیواره ظرف (۲) است، تعداد مول‌های گازی تولید شده در دو ظرف برابر است.

هالا اگر ضرایب واکنش (۲) را در عدد ۵ ضرب کنیم، شمار مول گازهای تولیدی در هر دو ظرف برابر با ۱۰ مول یکسان خواهد شد؛ بنابراین در این حالت ضریب گاز اکسیژن (O_2) در هر دو واکنش برابر و جرم اکسیژن مصرف شده نیز یکسان است.



با توجه به واکنش‌های داده شده که در دو ظرف جداگانه و به طور کامل انجام می‌شوند، اگر مجموع جرم کربن و PbO مصرف شده، برابر $2/71$ گرم و جرم گاز گوگرد دی‌اکسید در واکنش (II)، ۴ برابر جرم گاز هیدروژن تشکیل شده در واکنش (I) باشد، چند مول PbO در واکنش (II) شرکت کرده است؟ (سؤال ۱۸ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16, \text{S} = 32, \text{Pb} = 207 : \text{g.mol}^{-1}$)



۰ / ۰۰۲ (۲)

۰ / ۰۰۵ (۱)

۰ / ۰۴۰ (۴)

۰ / ۰۱۰ (۳)

کنکور

در چه تعداد از موارد زیر، فرمول شیمیایی و نام ارائه شده با یکدیگر مطابقت دارد؟

الف) آمونیوم سولفید: NH_4S

ب) روی نیترات: Zn_2NO_3

پ) اسکاندیم (III) فسفید: ScP

ت) آلومینیم کربنات: $\text{Al}_2(\text{CO}_3)_3$

ث) گالیوم کلرید: GaCl_2

ج) کبالت (III) سولفات: $\text{CO}_2(\text{SO}_4)_3$

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

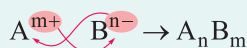
۱) صفر

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

فرمول نویسی و نام گذاری ترکیب های یونی دارای یون های چنداتی:

فرمول نویسی ترکیب های یونی دارای یون های چنداتی دقیقاً مانند فرمول نویسی ترکیب های یونی دارای یون های تک اتمی است؛ یعنی ابتدا نماد کاتیون را سمت چپ و نماد آنیون را در سمت راست می نویسیم و سپس بار کاتیون را به عنوان زیروند آنیون و بار آنیون را به عنوان زیروند کاتیون قرار می دهیم و اگر این زیروندها با هم ساده شدند، آن ها را ساده می کنیم:



فقط در این جا *هواستون باشه* که هنگام قراردادن بار هر یون به عنوان زیروند یون دیگر، یون های چنداتی را داخل پرانتز قرار دهید (مگر این که بار یون، ± 1 باشد).

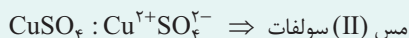
مثال



برای نام گذاری این گونه ترکیب ها نیز ابتدا نام کاتیون و سپس نام آنیون آورده می شود.

در مورد فلزهایی که یون های مثبت با بارهای متنوع دارند (مانند Cu و Cr ، Fe)، در هنگام نوشتن نام کاتیون، باید بار این یون با عدد رومی داخل پرانتز آورده شود.

مثال



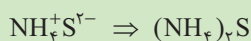
لیست یون های چنداتی که باید حفظ باشیم:

نام یون	فرمول یون	نام یون	فرمول یون
هیدروژن کربنات	HCO_3^-	اتانوات (استات)	CH_3COO^-
سیانید	CN^-	سیلیکات	SiO_4^{4-}
متانوات (فورمات)	HCOO^-	پرمنگنات	MnO_4^-

نام یون	فرمول یون	نام یون	فرمول یون
آمونیم	NH_4^+	سولفات	SO_4^{2-}
هیدروکسید	OH^-	فسفات	PO_4^{3-}
نیترات	NO_3^-	کربنات	CO_3^{2-}

همه موارد نادرست اند.

پاسخ خیلی تشریحی

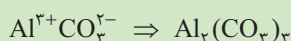


الف) آمونیوم سولفید: گوگرد گروه ۱۶ است و آنیون دو بار منفی تشکیل می دهد:

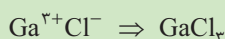


ب) روی نیترات: بار روی و نیترات به ترتیب +۲ و - است:

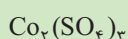
پ) ScP : اسکاندیم فقط یک نوع کاتیون تشکیل می دهد و نباید برای آن از اعداد رومی استفاده کرد. اسکاندیم فسفید = ScP



ت) آلومینیم کربنات: فرمول شیمیایی کربنات به صورت CO_3^{2-} است:



ث) گالیوم کلرید: گالیوم در گروه ۱۳ قرار دارد و بار آن +۳ است:



ج) کبالت (III) سولفات: حرف اکسیژن در نماد شیمیایی کبالت باید کوچک نوشته می شد!

(سوال ۱۳ - امتحان نهایی، فروردین ۱۴۰۳)

به پرسش‌ها پاسخ دهید.

الف) نام ترکیب مولکولی N_2O را بنویسید.

ب) فرمول شیمیایی ترکیب یونی پتاسیم پرمنگنات به صورت KMnO_4 است. فرمول شیمیایی کلسیم پرمنگنات را بنویسید.

ج) دانش‌آموزی ترکیب یونی ZnSO_4 را به صورت «روی (II) سولفید» نام‌گذاری کرده است. در این نام‌گذاری دو اشتباه وجود دارد. نام درست آن را در پاسخ‌نامه بنویسید.

مقداری اتانول به ۲۵۲ میلی لیتر آب اضافه می شود تا محلول ۴۰ درصد جرمی اتانول در آب به دست آید. با فرض این که حجم محلول با مجموع حجم دو ماده برابر باشد، حداقل چند میلی لیتر دیگر اتانول باید به محلول اضافه شود تا طبق تعریف حلال، جای حلال و حل شونده در محلول عوض شود؟ (چگالی آب و اتانول به ترتیب ۱ و ۰/۸ گرم بر میلی لیتر است و $H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

۴۴۸ (۴)

۵۹۶ (۳)

۶۰۵ (۲)

۶۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



هر محلول از دو جزء حلال و حل شونده تشکیل شده است. حلال جزئی از محلول است که حل شونده را در خود حل می کند و شمار مول های آن (نه جرم آن!) بیشتر است.

زمانی جای حلال و حل شونده در این محلول عوض خواهد شد که با اضافه کردن اتانول شمار مول های اتانول بیشتر از آب شود، یعنی در محلول اولیه، آب و در محلول نهایی، اتانول، حلال است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{اتانول } 40 \text{ g} \\ \text{محلول } 100 \text{ g} \\ \text{آب } 60 \text{ g} \end{array} \right\}$$

$$\text{اتانول } 168 \text{ g} = \frac{40 \text{ g}}{60 \text{ g}} \times 252 \text{ g}$$

$$14 \text{ mol} = \frac{1 \text{ mol}}{18 \text{ g}} \times 252 \text{ g}$$

با اضافه کردن اتانول، شمار مول های اتانول باید بیشتر از آب شود.

$$14 \text{ mol} > \text{مول اتانول} \Rightarrow \text{مول آب} > \text{مول اتانول: شرط}$$

$$644 \text{ g} > \text{جرم اتانول} \Rightarrow 14 > \frac{\text{جرم اتانول}}{46} \Rightarrow \frac{\text{جرم اتانول}}{\text{جرم مولی اتانول}} > 14$$

$$596 \text{ mL} > \text{حجم اتانول} \Rightarrow \frac{476 \text{ g}}{0.8 \text{ g.mL}^{-1}} > \text{حجم اتانول} \Rightarrow \frac{476 \text{ g}}{0.8 \text{ g.mL}^{-1}} > 168 - 644 \text{ g} > \text{جرم اتانول اضافه شده} \Rightarrow \text{جرم اتانولی که داشتیم.}$$

پس طبق گزینه ها، حداقل مقدار اتانولی که جای حلال و حل شونده را در این محلول تغییر می دهد، ۵۹۶ میلی لیتر است.

انحلال پذیری پتاسیم نیترات در دمای 40°C به تقریب سه برابر انحلال پذیری آن در دمای 10°C است. اگر 200 گرم از محلول سیرشده این نمک را از دمای 40°C تا 10°C سرد کنیم، 50 گرم رسوب تشکیل می‌شود. انحلال پذیری پتاسیم نیترات در دمای 40°C ، چند گرم در 100 گرم آب است؟

- ۷۵ (۴) ۶۰ (۳) ۲۵ (۲) ۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

انحلال پذیری پتاسیم نیترات در دمای 10°C و 40°C در 100 گرم آب را به ترتیب x و $3x$ در نظر می‌گیریم:
رسوب $2x$ g: $100 + 3x$ گرم محلول سیرشده در دمای 40°C
رسوب x g: $100 + x$ گرم محلول سیرشده در دمای 10°C
به ازای 200 گرم محلول سیرشده، 50 گرم به دست آمده است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{200}{4} \times \frac{\text{رسوب } 2x \text{ g}}{(100 + 3x) \text{ g محلول}} = \frac{\text{رسوب } 50 \text{ g}}{100 + x} \Rightarrow 8x = 100 + 3x \Rightarrow x = 20$$

بنابراین انحلال پذیری در دمای 40°C برابر با $60 = 3(20)$ گرم در 100 گرم آب است.

استفاده از روش تناسب:

یه جور دیگه

$$\left[\begin{array}{cc} \text{گرم رسوب} & \text{گرم محلول سیرشده} \\ 2x & 100 + 3x \\ 50 & 100 + x \end{array} \right] \Rightarrow 8x = 100 + 3x \Rightarrow x = 20 \Rightarrow 3x = 60$$

۶۴ کدام مورد درست است؟

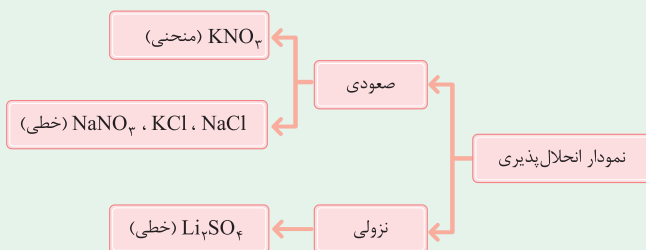
- ۱) با افزایش دما، مخلوط ناهمگن یخ در آب، به مخلوط همگن تبدیل می‌شود.
- ۲) اگر ۲۵ گرم نمک پتاسیم نیترات را به مقداری آب با دمای 20°C اضافه کنیم، بعد از انحلال کامل، دمای محلول بالاتر از 20°C خواهد شد.
- ۳) اگر در دمای اتاق، ماده A در آب نامحلول باشد، به یقین در تینر حل می‌شود.
- ۴) با افزایش دما (بدون تغییر مقدار آب)، محلول سیرشده پتاسیم کلرید به محلول سیرنشده آن تبدیل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

نمودارهای انحلال پذیری - دما برای اغلب نمک‌ها، صعودی است. موارد زیر رو حتماً به خاطر بسپارید.



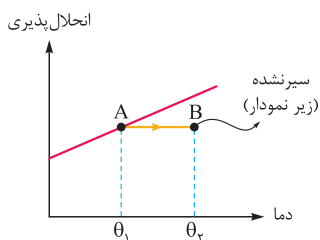
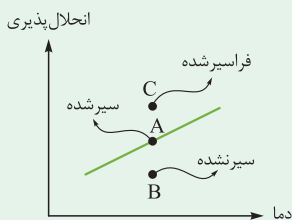
در حد کنکور، انحلال نمک‌هایی که نمودار انحلال‌پذیری - دمای آن‌ها صعودی است (NaCl , KCl , KNO_3 , NaNO_3) را فرایندی گرماگیر و انحلال نمک‌هایی که نمودار انحلال‌پذیری - دمای آن‌ها نزولی است (Li_2SO_4) را فرایندی گرماده در نظر می‌گیریم.

انحلال‌پذیری با دما رابطه مستقیم دارد. ← فرایند انحلال، گرماگیر است.

انحلال‌پذیری با دما رابطه وارونه دارد. ← فرایند انحلال، گرماده است.

در نمودارهای انحلال‌پذیری - دما، هر نقطه بر روی نمودار بیانگر نکاتی است:

- هر نقطه روی منحنی انحلال‌پذیری ← محلول سیرشده
- هر نقطه زیر منحنی انحلال‌پذیری ← محلول سیرنشده
- هر نقطه بالای منحنی انحلال‌پذیری ← محلول فراسیرشده



نمودار انحلال‌پذیری KCl صعودی و انحلال آن فرایندی گرماگیر است، یعنی با افزایش دما، انحلال‌پذیری آن در آب افزایش می‌یابد؛ پس اگر محلول سیرنشده‌ای از آن داشته باشیم و دمای آن را زیاد کنیم با توجه به این که در دمای بالاتر، آب می‌تواند نمک بیشتری را در خود حل کند، محلول به یک محلول سیرنشده تبدیل می‌شود. از روی نمودار هم می‌توانید ببینید:

گزینه (۱): یخ در آب، مخلوطی ناهمگن است، اما با افزایش دما، یخ درون آب ذوب شده و فقط آب بر جای می‌ماند و دیگره مخلوط نداریم!

گزینه (۲): انحلال پتاسیم نیترات (KNO_3) در آب، فرایندی گرماگیر است، یعنی برای حل شدن در آب، مقداری از گرمای آب را جذب می‌کند؛ بنابراین پس از انحلال کامل آن، دمای آب از $20^{\circ}C$ کم‌تر خواهد شد.

گزینه (۳): همیشه این هوریا۴ نیست! مثلاً نقره کلرید در آب، نامحلول است. همچنین این ترکیب یونی در تینر (هگزان) و هر ترکیب ناقطبی دیگر، حل نمی‌شود.

کدام مورد، مفهوم علمی جمله زیر را به درستی کامل می کند؟

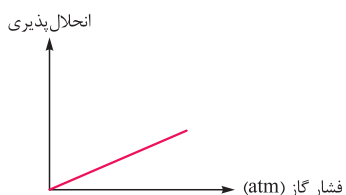
«با n برابر شدن، به برابر مقدار اولیه می رسد.»

۱) دمای آب - انحلال پذیری گاز O_2 - $\frac{1}{n}$ ۲) فشار گاز CO - انحلال پذیری آن - n

۳) دمای آب - انحلال پذیری نمک KCl - n ۴) فشار گاز N_2 - انحلال پذیری آن - $\frac{1}{n}$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

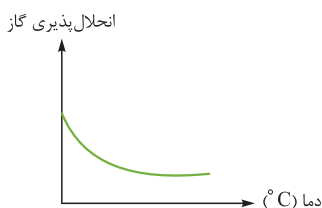


در دمای معین، معادله انحلال پذیری گازها برحسب فشار، به صورت یک خط راست و بدون عرض از مبدأ ($S = kP$) است؛ بنابراین با n برابر شدن فشار گاز CO، انحلال پذیری آن در آب نیز، n برابر می شود.

$$S = K P \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

عدد ثابت
↑
فشار انحلال پذیری

بررسی سایر گزینه ها:



گزینه ۱): نمودار انحلال پذیری - دمای گازها، اگرچه به صورت نزولی است، اما نمودار آن سهمی و غیرخطی است؛ بنابراین رابطه خطی بین دما و انحلال پذیری گاز وجود ندارد.

گزینه ۳): با توجه به این که عرض از مبدأ انحلال پذیری KCl (و هیچ نمک محلول در آبی) در آب صفر نمی باشد، با n برابر شدن دما، انحلال پذیری نیز n برابر نمی شود.

گزینه ۴): این مورد هم که توضیح دادیم. ☹️

پایه یازدهم

طراحان به ترتیب حروف الفبا

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - سوگند روشنی - علی شهبازی محمد گودرزی - سروش موئینی - محمدسجاد نقیه
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب - سید محمدرضا حسینی فرد - حمید گلزاری - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری
آمار و احتمال	مصطفی دیداری - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک (۲)	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی (۲)	علی رفیعی - یاسر عبداللهی - امیر قاسمی پور - محمد قهرمانی نژاد - امیرحسین مسلمی سید علی ناظمی - عرفان نریمانی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	فرشاد حسن زاده	عادل حسینی محمد مهدی حسینی منصور زرکش اصفهانی
هندسه (۲)	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب کیوان صارمی	مریم نظری	ملیحه حاجی بابا سید عباس حسینی ماهان فتی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	فرزانه خاکپاش	منصور زرکش اصفهانی بیان صیادی فر مریم نظری
فیزیک (۲)	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	امین امینی	امین امینی	مسعود خندانی پوریا علاقه مند مریم گلی حسنلو امیر محمودی انزلی
شیمی (۲)	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده	وحید فارسیان	محمد مهدی کریمیان	بنیامین تجلی یلدا رزاق زاده ماهان فتی فر محمد مهدی کریمیان

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

حسابان یازدهم

۶۶

طول دو ضلع قائم در مثلث قائم‌الزاویه‌ای جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند. طول ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$\sqrt{7} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

Hint

مساحت مثلث قائم‌الزاویه رو به دو روش حساب کن: یکی با کمک دو ضلع قائم (که ریشه‌های معادله‌ان) و یکی با کمک وتر و ارتفاع وارد بر اون. بعد این دوتا رو مساوی هم بذار و از روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه ۲ استفاده کن.

درس Box

جمع، ضرب و تفاضل ریشه‌ها

برای معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که جواب‌های آن x_1 و x_2 هستند، روابط اصلی زیر بین ریشه‌ها و ضرایب معادله برقرار است:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (S): \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (P): \text{ضرب ریشه‌ها}$$

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها: } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \text{که در آن } \Delta = b^2 - 4ac \text{ است.}$$

نکته

محاسبه سایر عبارات برحسب S و P

اگر ریشه‌های معادله α و β باشند، می‌توان عبارات زیر را بدون یافتن مستقیم ریشه‌ها و تنها با داشتن S و P محاسبه کرد:

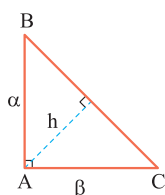
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} \quad \text{مجموع معکوس ریشه‌ها:}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P \quad \text{مجموع مربع‌های ریشه‌ها:}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3SP \quad \text{مجموع مکعب‌های ریشه‌ها:}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{S^2 - 4P} \quad \text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها:}$$

گام اول: با فرض این که α و β ریشه‌های معادله باشند، شکل زیر را داریم:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: برای پیدا کردن طول ارتفاع وارد بر وتر، ابتدا از رابطه فیثاغورس طول وتر را مشخص می‌کنیم:

$$BC = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

گام سوم: حال به کمک روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم داریم:

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$$

$$h = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

۶۷ حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2x}{(x-1)^2} = 1$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

 Hint

مخرج دوتا کسر یکسانه، پس اول اون‌ها رو با هم جمع کن. معادله رو ساده کن تا به معادله درجه‌دو برسی. برای پیدا کردن حاصل ضرب جواب‌ها هم لازم نیست خود جواب‌ها رو پیدا کنی، از رابطه $\frac{c}{a}$ استفاده کن.

درس‌Box

روش حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

برای حل معادله‌ای که شامل عبارت‌های گویا (کسری) است، می‌توان با حذف مخرج‌ها، آن را به یک معادله ساده‌تر تبدیل کرد. این کار در چند مرحله انجام می‌شود:

(۱) یافتن ک.م.م مخرج‌ها: ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) همه مخرج‌ها را پیدا می‌کنیم.

(۲) حذف مخرج‌ها: طرفین معادله را در این ک.م.م ضرب می‌کنیم تا مخرج تمام کسرها از بین برود و یک معادله جبری ساده به دست آید.

(۳) حل معادله جدید: معادله جبری به دست آمده را حل می‌کنیم.

(۴) بررسی جواب‌ها: این مرحله بسیار مهم است. باید جواب‌های به دست آمده را در مخرج‌های معادله اصلی امتحان کنیم. جوابی قابل قبول است که هیچ کدام از مخرج‌ها را صفر نکند. جواب‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند، قابل قبول نیستند.

گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{x^2 - 2x + 1} = 1$$

گام دوم: برای مشخص کردن حاصل ضرب جواب‌های معادله داریم:

$$3x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \xrightarrow[\Delta > 0]{x \neq 1} P = \frac{c}{a} = 1$$

پاسخ خیلی تشریحی

۶۸ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{6}{|x-1| + |x-a|}$ برابر ۲ باشد، برد تابع $g(x) = \sqrt{|x-a| - |x+5|}$ شامل

چند عدد صحیح است؟ ($a > 1$)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) بی شمار

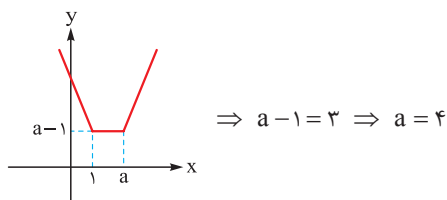
پاسخ: گزینه ۱

Hint

بیشترین مقدار کسر وقتی اتفاق می‌فته که مخرجش کم‌ترین مقدار ممکن باشه. کم‌ترین مقدار عبارت $|x-1| + |x-a|$ رو پیدا کن تا ارزش مقدار a به دست بیاد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: زمانی بیشترین مقدار تابع f برابر ۲ می‌شود که کم‌ترین مقدار عبارت مخرج برابر ۳ باشد، زیرا صورت آن مقدار ثابت ۶ است. طبق نکات قبلی، نمودار تابع $y = |x-1| + |x-a|$ را رسم می‌کنیم:



گام دوم: حال با جای‌گذاری a ، برد تابع زیر رادیکال (که معروف به تابع سرسره‌ای است)، طبق نکته سؤال ۱ برابر است با:

$$-9 \leq |x-4| - |x+5| \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{|x-4| - |x+5|} \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 3$$

بنابراین برد تابع g شامل ۴ عدد صحیح $\{0, 1, 2, 3\}$ است.



۶۹ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & ; x > 2 \\ 1 - ax & ; x \leq 2 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۴

برای این که تابع چندضابطه‌ای یک‌به‌یک باشد، هر ضابطه باید در دامنه خودش یک‌به‌یک باشد و بُردهای ضابطه‌ها هم اشتراک نداشته باشند. به محل رأس سهمی ضابطه اول دقت کن.

Hint

درس Box

تابع یک‌به‌یک (One – to – One Function)

تعریف تابع یک‌به‌یک

تابی را یک‌به‌یک می‌نامیم که در آن به هر دو ورودی متفاوت، دو خروجی متفاوت اختصاص داده شود. به زبان ریاضی، تابع f یک‌به‌یک است اگر به ازای هر دو عضو دلخواه x_1 و x_2 از دامنه‌اش، یکی از دو شرط معادل زیر برقرار باشد:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (۱)$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (۲)$$

آزمون خط افقی

یک راه سریع برای تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع از روی نمودار، استفاده از آزمون خط افقی است. یک تابع، یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر هر خط موازی با محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تابع درجه دوم

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) روی دامنه $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست، اما اگر دامنه آن را به یکی از بازه‌های $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ (و یا هر زیرمجموعه‌ای از آن‌ها) محدود کنیم، روی آن بازه یک‌به‌یک خواهد بود.

یک‌به‌یک بودن توابع چندضابطه‌ای

اگر تابع g با دامنه D_1 و تابع h با دامنه D_2 یک‌به‌یک باشند و اشتراک برد تابع g با برد تابع h تهی باشد ($R_g \cap R_h = \emptyset$)، آن‌گاه تابع f که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک‌به‌یک است:

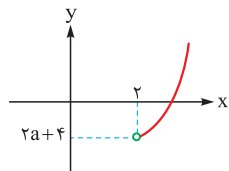
$$f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \in D_1 \\ h(x) & ; x \in D_2 \end{cases}$$

به عبارت دیگر، برای ساخت یک تابع یک‌به‌یک چندضابطه‌ای، باید توابع سازنده آن یک‌به‌یک بوده و خروجی‌های آن‌ها (بردشان) هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

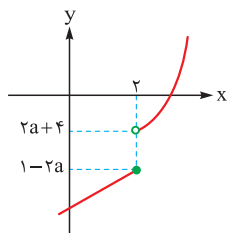
گام اول: طبق درس‌باکس، در ابتدا باید هر ضابطه در دامنه خودش یک‌به‌یک باشد. پس اگر تابع $g(x) = x^2 + ax$ در دامنه $(2, +\infty)$ یک‌به‌یک باشد، این بازه نباید شامل طول رأس سهمی باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_s = -\frac{a}{2} \\ x_s \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{a}{2} \leq 2 \Rightarrow a \geq -4 \quad (۱)$$

در این بازه نمودار تابع f مطابق شکل زیر است:



گام دوم: حالا برای این که تابع یک‌به‌یک باشد، شیب خط $y = 1 - ax$ باید مثبت باشد و همچنین مقدار آن در $x = 2$ نابیشتر از $2a + 4$ باشد، مطابق شکل زیر:



$$\Rightarrow \begin{cases} -a > 0 \Rightarrow a < 0 \\ 2a + 4 \geq 1 - 2a \Rightarrow a \geq -\frac{3}{4} \end{cases} \quad (۲) \quad (۳)$$



گام سوم: محدوده قابل قبول برای a از اشتراک (1) ، (2) و (3) به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} -\frac{3}{4} \leq a < 0$$

این مجموعه شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۷۰ اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ باشد، با انتخاب کدام ضابطه برای تابع g ، برد تابع $y = (f+g)(x)$ تک‌عضوی است؟

$$g(x) = 3 \quad (۱) \quad g(x) = f(-x) \quad (۲)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad (۳) \quad g(x) = x - \sqrt{x^2 - 4} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۳

اعمال جبری روی توابع

درس‌Box

فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند. چهار عمل اصلی روی این توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) تابع جمع $(f+g)$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

(۲) تابع تفاضل $(f-g)$:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

(۳) تابع ضرب $(f \cdot g)$:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad , \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

(۴) تابع تقسیم $(\frac{f}{g})$:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

نکته کلیدی: دامنه توابع حاصل از جمع، تفاضل و ضرب، اشتراک دامنه‌های دو تابع اصلی است. در تابع تقسیم، باید نقاطی که مخرج را صفر می‌کنند نیز از این اشتراک حذف شوند.

اگر $n \in \mathbb{N}$ فرد باشد، دامنه تابع $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ برابر D_g است. اگر $n \in \mathbb{N}$ زوج باشد، دامنه تابع $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ برابر $\{x \mid x \in D_g, g(x) \geq 0\}$ است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با انتخاب $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ داریم:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \geq 0\} = \{2, -2\}$$

گام دوم: به ازای $x = 2$ و $x = -2$ مقادیر تابع $f+g$ برابر است با:

$$(f+g)(2) = 0 + 0 = 0$$

$$(f+g)(-2) = 0 + 0 = 0$$

۷۱ در بازه $[\alpha, \beta]$ نمودار تابع $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ بالاتر از نیمساز ناحیه اول قرار ندارد. بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۲

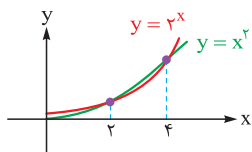
پاسخ: گزینه ۳

Hint

این که نمودار f بالاتر از نیمساز ناحیه اول نباشد، یعنی $f(x) \leq x$. این نامعادله رو با یه تغییر متغیر مناسب ($t = \sqrt{x}$) حل کن و ببین برای چه بازه‌ای برقراره.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مسئله از ما مجموعه جواب‌های نامعادله $2^{\sqrt{x}} < x$ را می‌خواهد که با تغییر متغیر $t = \sqrt{x}$ ، نامعادله $2^t < t^2$ را داریم. گام دوم: حالا با توجه به دامنه تابع $y = 2^{\sqrt{x}}$ نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ را در $x \geq 0$ رسم می‌کنیم:



گام سوم: طبق شکل بالا، در بازه $t \in [2, 4]$ نامعادله $2^t < t^2$ برقرار است. پس مجموعه جواب‌های نامعادله اصلی یعنی $2^{\sqrt{x}} < x$ به صورت $[4, 16]$ است و بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ برابر است با: $16 - 4 = 12$



۷۲

اگر دامنه تابع $f(x) = \log_2(ax + b)$ بازه $(-\frac{3}{4}, +\infty)$ و $f^{-1}(2) = 3$ باشد، مقدار $f(\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱/۲۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

دامنه تابع لگاریتمی بهت می‌گه که عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشه، از این یه رابطه بین a و b درمیداد. از طرفی $f^{-1}(2) = 3$ یعنی $f(3) = 2$ ، این هم یه معادله درگه. حالا دو معادله و دو مجهول داری.

درس: Box

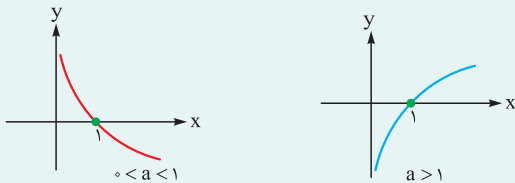
تعریف و نمودار تابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی با ضابطه $f(x) = \log_a x$ وارون تابع نمایی $g(x) = a^x$ است. این تابع فقط برای پایه‌های مثبت و مخالف یک $(a > 0, a \neq 1)$ تعریف می‌شود.

• دامنه تابع لگاریتمی، مجموعه اعداد حقیقی مثبت $(0, +\infty)$ است.

• برد آن، مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است.

• نمودار آن قرینه نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y = x$ می‌باشد و شکل آن به مقدار پایه a بستگی دارد:



دامنه توابع لگاریتمی

برای تعیین دامنه یک تابع لگاریتمی کلی به صورت $y = \log_{g(x)} f(x)$ ، باید اشتراک مجموعه‌جواب‌های سه شرط زیر را پیدا کنیم:

(۱) آرگومان مثبت باشد: $f(x) > 0$

(۲) پایه مثبت باشد: $g(x) > 0$

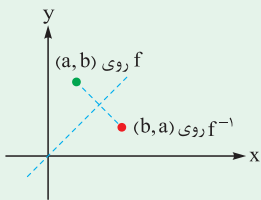
(۳) پایه مخالف یک باشد: $g(x) \neq 1$

رابطه نقاط در تابع و وارون آن

مهم‌ترین ویژگی تابع وارون این است که جای ورودی و خروجی در آن با تابع اصلی عوض می‌شود. اگر تابع f وارون‌پذیر باشد، این رابطه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

به عبارت دیگر، از نظر نموداری، این به آن معناست که اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، آن‌گاه نقطه (b, a) حتماً روی نمودار تابع وارون آن، f^{-1} ، قرار دارد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا دامنه تابع f را از روی ضابطه مشخص می‌کنیم:

$$ax + b > 0 \Rightarrow x > \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}a \quad (*)$$

گام دوم: حال با توجه به نکته و رابطه بین a و b داریم:

$$f^{-1}(2) = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \Rightarrow \log_2(3a + \frac{3}{2}a) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}a = 2^2 = 4 \Rightarrow a = \frac{8}{9} \xrightarrow{(*)} b = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_2(\frac{8}{9}x + \frac{4}{3})$$

گام سوم: مقدار خواسته شده برابر است با:

$$f(\frac{3}{4}) = \log_2(\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{3}) = \log_2(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}) = \log_2 2 = 1$$



۷۳ اگر $\tan x = 0/5$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\frac{7\pi}{4} + x) - \cos(x - \frac{11\pi}{4})}{\sin(x - \pi) + \cos^2(2x - \frac{7\pi}{4}) \times \sin(\frac{\pi}{4} - x)}$ کدام است؟ $(\pi < x < \frac{3\pi}{4})$

(۱) $\frac{25}{7}$ (۲) $-\frac{25}{7}$ (۳) $\frac{5}{24}$ (۴) $-\frac{5}{24}$

پاسخ: گزینه ۲

Hint اول عبارت رو با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی مثل $\frac{3\pi}{4} + x$ ساده کن. بعد با توجه به این که x تو ربع سومه و تانژانتش رو داری، مقدار سینوس و کسینوسش رو حساب کن و جای گذاری کن.

درس‌Box

روش محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایا با استفاده از زوایای مرتبط

برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، می‌توانیم از روش گام به گام زیر پیروی کنیم:

(۱) **تبدیل زاویه:** ابتدا زاویه مورد نظر را به شکل $k\frac{\pi}{4} \pm \alpha$ بازنویسی می‌کنیم، به طوری که k یک عدد صحیح باشد (زوج یا فرد بودن k مهم است).

(۲) **تعیین ربع دایره:** با فرض این که α یک زاویه تند (حاده) است، مشخص می‌کنیم که انتهای کمان مربوط به زاویه اصلی $(k\frac{\pi}{4} \pm \alpha)$ در کدام ربع (ناحیه) دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد.

(۳) **تعیین علامت نسبت:** با توجه به ربعی که در مرحله قبل مشخص شد، علامت $(+)$ یا $(-)$ نسبت مثلثاتی مورد نظر (سینوس، کسینوس، تانژانت یا کتانژانت) را برای آن ربع تعیین می‌کنیم.

(۴) **حذف مضرب $\frac{\pi}{4}$:** بخش $k\frac{\pi}{4}$ را از عبارت $k\frac{\pi}{4} \pm \alpha$ حذف می‌کنیم.

(۵) **تبدیل یا حفظ نسبت:**

• اگر k در مرحله ۱ زوج بود، نوع نسبت مثلثاتی تغییر نمی‌کند (سینوس به سینوس، کسینوس به کسینوس و ...).

• اگر k در مرحله ۱ فرد بود، نوع نسبت مثلثاتی به نسبت هم‌نام خود تبدیل می‌شود (سینوس به کسینوس، کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت و کتانژانت به تانژانت).

روابط مثلثاتی 2α

۱) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

۳) $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

۴) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

گام اول: ابتدا به کمک درس‌باکس عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{7\pi}{4} + x) - \cos(\frac{11\pi}{4} - x)}{-\sin(\pi - x) + \cos^2(\frac{7\pi}{4} - 2x) \sin(\frac{\pi}{4} - x)} = \frac{-\cos x - (-\sin x)}{-\sin x + \sin^2 2x \cos x}$$

گام دوم: حال با استفاده از مقدار $\tan x$ و دانستن محدوده آن، نسبت‌های مثلثاتی مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \xrightarrow{\pi < x < \frac{3\pi}{4}} \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{5} \xrightarrow{\pi < x < \frac{3\pi}{4}} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}} \sin 2x = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام سوم: با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده داریم:

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{16}{25} \times \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2-1}{1-\frac{32}{25}} = \frac{1}{-\frac{7}{25}} = -\frac{25}{7}$$

۷۴ اگر عبارت $P(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x$ را به صورت $A + B \cos Cx$ بنویسیم، مقدار ABC^2 کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳/۷۵ (۳)

۱۳/۵ (۲)

۱۳/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint برای ساده‌سازی عبارت، از اتحادهای معروف برای $\sin^4(x) + \cos^4(x)$ و $\sin^6(x) + \cos^6(x)$ استفاده کن. هر دوی این‌ها رو می‌شه برحسب $\cos(4x)$ نوشت.

نکته

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cos 4\alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به کمک نکته داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{11}{4} + \frac{5}{4} \cos 4x$$

گام دوم: با مقایسه عبارت به دست آمده و عبارت صورت سؤال، داریم:

$$A = \frac{11}{4}, B = \frac{5}{4}, C = 4$$

$$\Rightarrow ABC^2 = \frac{11}{4} \times \frac{5}{4} \times 16 = \frac{55}{4} = 13.75$$

اگر $\lim_{a \rightarrow b} \frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3} = 2$ باشد، مقدار b کدام است؟ **۷۵**

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

این حد از نوع مبهم صفرصفرمه. صورت و مخرج رو با استفاده از اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر تجزیه کن تا بتونی عامل مشترک رو حذف کنی.

Hint

درس: Box

روش رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در حدهای گویا از طریق تجزیه عامل مشترک

برای محاسبه حد توابع گویا به فرم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، حالتی که ممکن است پیش بیاید، حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است. این حالت زمانی رخ می‌دهد که هم حد صورت و هم حد مخرج برابر صفر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

یا به طور معادل $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$.

در چنین شرایطی، اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ (مانند چندجمله‌ای‌ها) خاصیت تجزیه‌پذیری داشته باشند، می‌توان از «قضیه عامل» استفاده کرد. این قضیه بیان می‌کند که اگر $f(a) = 0$ ، آن‌گاه $(x - a)$ یکی از عامل‌های $f(x)$ است (و مشابه برای $g(x)$)؛ بنابراین، می‌توانیم $f(x)$ و $g(x)$ را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$f(x) = (x - a)F(x)$$

$$g(x) = (x - a)G(x)$$

که در آن $F(x)$ و $G(x)$ بخش‌های باقی‌مانده پس از تجزیه هستند.

حال، حد اولیه را می‌توان به این شکل بازنویسی کرد:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)F(x)}{(x - a)G(x)}$$

چون در فرایند حدگیری، x به a میل می‌کند ولی دقیقاً برابر a نیست ($x \neq a \Rightarrow x - a \neq 0$)، می‌توانیم عامل مشترک $(x - a)$ را از صورت و مخرج ساده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

با محاسبه این حد نهایی (در صورت وجود)، ابهام $\frac{0}{0}$ اولیه برطرف می‌شود.

گام اول: با جای‌گذاری $a = b$ حاصل حد مخرج و صورت برابر صفر می‌شود.

پاسخ‌خیلی تشریحی

به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر داریم:

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{a^3 - b^3}{a^3 - b^3} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{(a - b)(a + b)}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{a + b}{a^2 + ab + b^2} = \frac{2b}{3b^2} = \frac{2}{3b}$$

$$\frac{2}{3b} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

گام دوم: حال با توجه به حاصل حد داریم:

- (۱) در هر دایره، طول یک کمان برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل آن کمان است.
- (۲) دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ و طول خط‌المركزین ۲، مماس‌درون هستند.
- (۳) تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند.
- (۴) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱ امتحان نهایی هندسه (۲) در خرداد ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۱

تعاریف مرتبط با ویژگی‌های تبدیل‌های هندسی (طولپایی - حفظ شیب خط - حفظ اندازه زاویه - حفظ جهت شکل - تعداد نقاط ثابت) را به خوبی به خاطر داشته باشید.

Hint

درس‌Box

مهم‌ترین ویژگی‌های تبدیل‌های هندسی عبارت‌اند از:

الف) بازتاب: (۱) طولپا است. (۲) در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند. (۳) جهت شکل را حفظ نمی‌کند. (۴) بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

ب) انتقال: (۱) طولپا است. (۲) شیب خط را حفظ می‌کند. (۳) جهت شکل را حفظ می‌کند. (۴) نقطه ثابت ندارد.

پ) دوران: (۱) طولپا است. (۲) در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند. (۳) جهت شکل را حفظ می‌کند. (۴) یک نقطه ثابت دارد (مرکز دوران).

ت) تجانس: (۱) در حالت کلی طولپا نیست. (۲) شیب خط را حفظ می‌کند. (۳) جهت شکل را حفظ می‌کند. (۴) یک نقطه ثابت دارد. (مرکز تجانس)

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): در هر دایره، اندازه یک کمان برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل آن کمان است، ولی طول کمان با اندازه کمان تفاوت دارد و برحسب واحد طول بیان می‌شود.

گزینه (۲): شرط مماس‌درون بودن دو دایره به شعاع‌های R و R' و طول خط‌المركزین d ، آن است که $d = |R - R'|$ باشد.

چون $|5 - 3| = 2$ ، پس این دو دایره، مماس‌درون هستند.

گزینه (۳): تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند.

گزینه (۴): تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد. (تمام نقاط روی محور بازتاب)

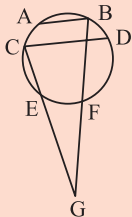
(سؤال ۱ - امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

- الف) در هر دایره، طول یک کمان، برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان است.
- ب) دو دایره به طول شعاع‌های ۳ و ۵ سانتی‌متر و طول خط‌المركزین ۷ سانتی‌متر، مماس‌برون هستند.
- ج) تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند.
- د) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

امتحان
نهایی

مطابق شکل طول وتر AB با شعاع دایره برابر است و این وتر با CD موازی است. اگر اندازه کمان‌های AC و CE و زاویه G با هم برابر و هر سه نصف اندازه کمان EF باشند، اندازه کمان DF چند درجه است؟



(۱) ۱۸۵

(۲) ۱۹۰

(۳) ۱۹۵

(۴) ۲۰۰

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۳۳ کنکور ریاضی داخل تیر ۱۴۰۱ طراحی شده است.

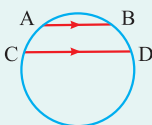
پاسخ: گزینه ۴

اندازه زاویه G را برحسب کمان‌های دایره بنویسید.

Hint

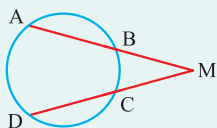
درس Box

(۱) دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

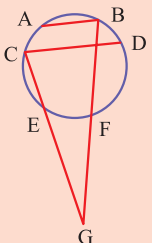
(۲) هرگاه مطابق شکل امتداد وترهای AB و DC در نقطه‌ای مانند M بیرون از دایره متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$$

(۳) اگر اندازه وتری از دایره، برابر اندازه شعاع آن دایره باشد، کمان نظیر آن وتر برابر 60° است.

گام اول: فرض کنید $\hat{G} = \widehat{AC} = \widehat{CE} = x$ باشد. در این صورت $\widehat{EF} = 2x$ است. طول وتر AB با شعاع دایره برابر است، پس $\widehat{AB} = 60^\circ$ و در نتیجه داریم:



$$\hat{G} = \frac{\widehat{CAB} - \widehat{EF}}{2} \Rightarrow x = \frac{(x + 60^\circ) - 2x}{2} \Rightarrow 2x = 60^\circ - x$$

$$\Rightarrow 3x = 60^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

$$\widehat{BD} = \widehat{AC} = x = 20^\circ$$

گام دوم: وترهای AB و CD موازی یکدیگرند، بنابراین داریم:

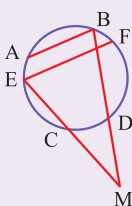
گام سوم: مجموع اندازه کمان‌های روی دایره برابر 360° است، پس می‌توان نوشت:

$$\widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{DF} + \widehat{EF} + \widehat{CE} + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 20^\circ + \widehat{DF} + 40^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DF} = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$$

در شکل زیر، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌ها $\widehat{AE} = 15^\circ$ ، $\widehat{EC} = 80^\circ$ و $\widehat{FD} = 100^\circ$ است. اگر $\widehat{BME} = 20^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه $\widehat{ABD}$ چند درجه است؟

(سؤال ۱۳۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)



(۱) ۷۱ / ۲۵

(۲) ۷۴

(۳) ۷۵

(۴) ۷۸ / ۷۵

کنکور

زاویه بین مماس‌های مشترک دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۲ و ۵، برابر 60° است. طول مماسی که از مرکز دایره بزرگ بر دایره کوچک رسم می‌شود، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{7}$

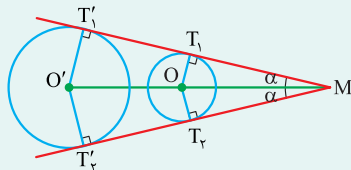
پاسخ: گزینه ۲

اندازه ضلع روبه‌رو به زاویه 30° در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازه وتر است.

Hint

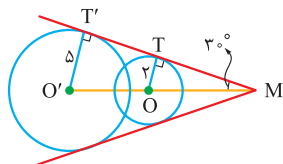
درس‌Box

هرگاه شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس‌های مشترک دو دایره (در صورت وجود) و امتداد خط‌المركزین دو دایره در یک نقطه هم‌رس‌اند.



هم‌چنین راستای خط‌المركزین دو دایره، نیمساز زاویه بین دو مماس مشترک خارجی است.

گام اول: مطابق درس‌بکس می‌دانیم که راستای خط‌المركزین دو دایره، نیمساز زاویه بین دو مماس مشترک خارجی است؛ پس $\angle OMT = 30^\circ$. از طرفی در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف اندازه وتر است، پس داریم:

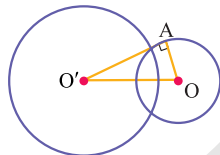


$$\Delta OMT: \angle OMT = 30^\circ \Rightarrow OT = \frac{1}{2}OM \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}OM \Rightarrow OM = 4$$

$$\Delta O'MT': \angle O'MT' = 30^\circ \Rightarrow O'T' = \frac{1}{2}O'M \Rightarrow 5 = \frac{1}{2}O'M \Rightarrow O'M = 10$$

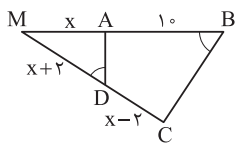
$$OO' = O'M - OM = 10 - 4 = 6$$

گام دوم: از مرکز دایره بزرگ، مماس $O'A$ را بر دایره کوچک رسم می‌کنیم. می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطه تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است؛ بنابراین مثلث OAO' قائم‌الزاویه است و طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$O'A^2 = OO'^2 - OA^2 = 6^2 - 5^2 = 32 \Rightarrow O'A = 4\sqrt{2}$$

در شکل زیر $AM = x$ ، $AB = 10$ ، $MD = x + 2$ و $CD = x - 2$ است. اگر $\hat{A}DM = \hat{B}$ باشد، مقدار x کدام است؟



۵ (۱)

۶ (۲)

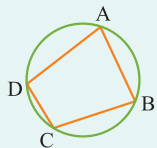
۷ (۳)

۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

زاویه $\hat{A}DC$ مکمل $\hat{A}DM$ است، پس دو زاویه $\hat{A}DC$ و $\hat{B}$ مکمل یکدیگرند.

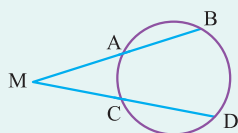
(۱) یک چهارضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن، مکمل باشند.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{cases}$$

چهارضلعی ABCD محاطی است.

(۲) اگر امتدادهای دو وتر AB و CD در نقطه M خارج از دایره، متقاطع باشند، آن گاه طبق روابط طولی در دایره داریم:



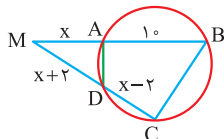
$$MA \times MB = MC \times MD$$

گام اول: مطابق شکل دو زاویه $\hat{A}DM$ و $\hat{A}DC$ مکمل یکدیگرند، پس داریم:

$$\hat{A}DM + \hat{A}DC = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}DM = \hat{B}} \hat{B} + \hat{A}DC = 180^\circ \Rightarrow \text{چهارضلعی } ABCD \text{ محاطی است.}$$

بنابراین دایره‌ای از نقاط A ، B ، C و D عبور می‌کند.

گام دوم: دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل امتداد وترهای AB و CD در نقطه M بیرون از دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس داریم:



$$MA \times MB = MD \times MC \Rightarrow x(x + 10) = (x + 2)(2x) \xrightarrow{x \neq 0} x + 10 = 2x + 4 \Rightarrow x = 6$$

Hint

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دو خط D و L در نقطه O متقاطع اند و α زاویه بین آنها است به طوری که $\tan \alpha = \frac{7}{24}$. اگر A' تصویر نقطه A واقع بر خط D در بازتاب نسبت به خط L باشد، آن گاه نسبت فاصله A' از خط D به محیط مثلث AOA' کدام است؟

۰/۲۴ (۲)

۰/۱۸ (۱)

۰/۲ (۴)

۰/۲۱ (۳)

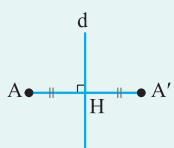
پاسخ: گزینه ۳



برای محاسبه فاصله نقطه A' از خط D ، مساحت مثلث متساوی الساقین OAA' را یک بار بر حسب ارتفاع وارد بر قاعده و بار دیگر بر حسب ارتفاع وارد بر ساق بنویسید.

درس Box

بازتاب نسبت به خط:

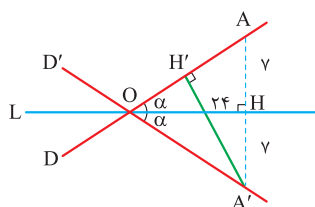


نقطه A' را بازتاب نقطه A نسبت به خط d گوئیم، هرگاه d عمود منصف پاره خط AA' باشد.

خط d را محور بازتاب می گویند و در صورتی که A روی محور بازتاب باشد، تصویر A بر خود A منطبق می شود.

بازتاب، تبدیلی طولی است و اندازه پاره خطها را ثابت نگه می دارد.

گام اول: ابتدا بازتاب خط D را نسبت به خط L رسم کرده و آن را D' می نامیم. بازتاب نقطه A را نسبت به خط L ، A' می نامیم که روی خط D' واقع است.



طبق فرض $\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{7}{24}$ است، پس فرض می کنیم $AH = 7$ ، $OH = 24$ باشد. در این صورت طبق قضیه فیثاغورس

در مثلث OAH داریم:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 24^2 + 7^2 = 625 \Rightarrow OA = 25$$

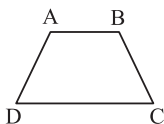
گام دوم: مساحت مثلث OAA' را به دو طریق محاسبه کرده و برابر هم قرار می دهیم:

$$S_{OAA'} = \frac{1}{2} OH \times AA' = \frac{1}{2} A'H' \times OA \Rightarrow A'H' = \frac{OH \times AA'}{OA} = \frac{24 \times 14}{25} = \frac{336}{25}$$

گام سوم: خواسته سوال برابر است با:

$$\frac{A'H'}{AOA' \text{ محیط مثلث}} = \frac{\frac{336}{25}}{(25 + 25 + 14)} = \frac{336}{25 \times 64} = \frac{21}{100} = 0/21$$

در شکل زیر دوزنقه $ABCD$ متساوی الساقین، $AB = ۲$ ، $CD = ۳$ و ارتفاع دوزنقه برابر ۴ است. اگر پاره خط CD مجانس مستقیم AB باشد، فاصله مرکز تجانس از AB کدام است؟



۹ (۲)

۸ (۱)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

اگر دو قاعده یک دوزنقه، مجانس مستقیم هم باشند، مرکز تجانس، محل برخورد امتداد ساق‌های دوزنقه است.

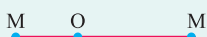
تجانس: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت k گوئیم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشند:

(الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

$$OM' = |k| OM$$



اگر k مثبت باشد، نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار می‌گیرند.



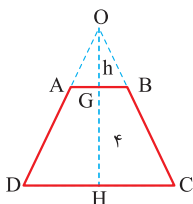
اگر k منفی باشد، نقاط M و M' در دو طرف نقطه O قرار می‌گیرند.

در تجانس با نسبت k :

(۱) طول پاره‌خط‌ها $|k|$ برابر می‌شود.

(۲) مساحت اشکال هندسی k^2 برابر می‌شود.

گام اول: مطابق شکل، مرکز تجانس مستقیمی که پاره خط AB را روی پاره خط CD تصویر می‌کند، محل برخورد امتداد ساق‌های دوزنقه (نقطه O) است. با توجه به موازی بودن قاعده‌های AB و CD و طبق قضیه اساسی تشابه، دو مثلث OAB و ODC متشابه‌اند.

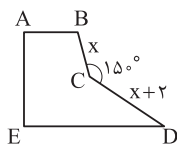


گام دوم: می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت اندازه ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه دو مثلث است؛ بنابراین داریم:

$$\triangle OAB \sim \triangle ODC \Rightarrow \frac{OG}{OH} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{h}{h+4} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3h = 2h + 8 \Rightarrow h = 8$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط چندضلعی، مساحت آن را به کمک بازتاب تا حد ممکن افزایش می‌دهیم. اگر میزان افزایش مساحت ۲۴ واحد مربع باشد، آن‌گاه مقدار x کدام است؟



۸ (۱)

۴ (۲)

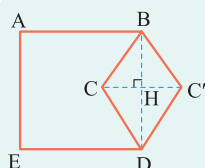
۳ (۳)

۶ (۴)

مشاوره کاربردهای تبدیلی‌های هندسی از جمله مسائل هم‌پیرامونی (هم‌محیطی) از سؤالات مهم و پرتکرار فصل تبدیلی‌های هندسی در کنکور محسوب می‌شوند و مشابه این سؤال در کنکورهای ریاضی داخل و خارج تیر ۱۴۰۳ نیز طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۴

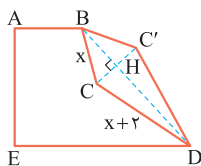
رأس C را نسبت به خط گذرنده از نقاط B و D بازتاب دهید.



مسائل هم‌پیرامونی (هم‌محیطی):

هرگاه بخواهیم مساحت یک چندضلعی را که یک یا چند زاویه در آن بزرگ‌تر از ۱۸۰° هستند، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن افزایش دهیم، کافی است بازتاب هر کدام از رأس‌هایی را که زاویه آن‌ها بزرگ‌تر از ۱۸۰° است نسبت به خط گذرنده از دو رأس مجاور آن رسم کنیم. مطابق شکل میزان افزایش مساحت چندضلعی مقعر $ABCDE$ ، بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط آن، برابر مساحت چهارضلعی $BCDC'$ خواهد بود که C' بازتاب C نسبت به BD است.

گام اول: مطابق شکل، بازتاب رأس C را نسبت به خط گذرنده از نقاط B و D به دست آورده و آن را C' می‌نامیم. میزان افزایش مساحت، برابر مساحت چهارضلعی $BCDC'$ است که مساحت این چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث BCD می‌باشد.



گام دوم: با توجه به فرض سؤال داریم:

$$S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 24$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1}{2} \times x(x+2) \times \sin 15^\circ = 24 \Rightarrow x^2 + 2x = 48$$

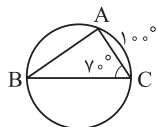
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \checkmark \\ x = -8 & \times \end{cases}$$

Hint

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مطابق شکل، اگر شعاع دایره $R = 3$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟



$3\sqrt{3}$ (۲)
۵ (۴)

۶ (۱)
 $2\sqrt{6}$ (۳)

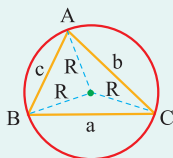
پاسخ: گزینه ۲

اندازه زاویه A را محاسبه کرده و سپس از قضیه سینوس ها استفاده کنید.

Hint

درس Box

قضیه سینوس ها:



در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه روی آن، برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث؛ بنابراین اگر اندازه های اضلاع مثلث ABC ، برابر $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ باشند، آن گاه داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

گام اول: اندازه هر زاویه محاطی، نصف اندازه کمان مقابل آن است، پس داریم:

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 50^\circ$$

مجموع اندازه های زوایای هر مثلث برابر 180° است؛ بنابراین می توان نوشت:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 50^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

گام دوم: براساس قضیه سینوس ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2 \times 3 \Rightarrow BC = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

پاسخ خیلی تشریحی

۸۴ در مثلث ABC به طول اضلاع a, b و c, اگر $b^2 - a^2 = \frac{c^2}{2}$ باشد، آن گاه طول میانه وارد بر ضلع به طول c کدام است؟

$\frac{b}{2}$ (۴)

$\frac{a}{2}$ (۳)

b (۲)

a (۱)

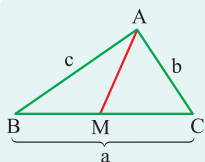
پاسخ: گزینه ۱

از قضیه میانه‌ها استفاده کنید.

Hint

درس Box

قضیه میانه‌ها:

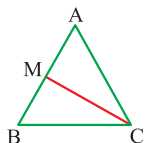


اگر $AM = m_a$ میانه نظیر ضلع BC در مثلث ABC باشد، آن گاه رابطه زیر که به قضیه میانه‌ها معروف است، بین طول این میانه و اضلاع مثلث برقرار است:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

گام اول: طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \Rightarrow b^2 - \frac{c^2}{2} = 2m_c^2 - a^2 (*)$$

گام دوم: طبق فرض داریم:

$$b^2 - a^2 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow b^2 - \frac{c^2}{2} = a^2 \xrightarrow{(*)} 2m_c^2 - a^2 = a^2$$

$$\Rightarrow 2m_c^2 = 2a^2 \Rightarrow m_c^2 = a^2 \Rightarrow m_c = a$$

طول اضلاع مثلثی ۳، ۴ و ۵ است. طول نیمساز داخلی نظیر زاویه متوسط این مثلث کدام است؟

(۱) ۲/۵

(۲) $\sqrt{7}$

(۳) ۳

(۴) $2\sqrt{3}$

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۲ صفحه ۷۰ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است. قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و رابطه طول نیمساز از جمله نکات مورد توجه طراحان کنکور هستند.

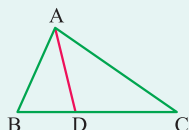
پاسخ: گزینه ۲

طول نیمساز وارد بر ضلع به طول ۳/۵ را محاسبه کنید.

Hint

درسی Box

(۱) قضیه نیمسازهای زوایای داخلی:



در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند.

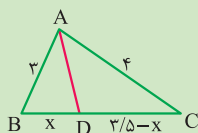
$$AD \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

(۲) رابطه طول نیمساز زاویه‌های داخلی:

در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

گام اول: مطابق شکل فرض کنید در مثلث ABC ، $AB = 3$ ، $AC = 4$ و $BC = 3/5$ باشد. اگر AD نیمساز داخلی زاویه A باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3/5-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x = 10/5 - 3x$$

$$\Rightarrow 7x = 10/5 \Rightarrow x = 1/5 \Rightarrow \begin{cases} BD = 1/5 \\ DC = 2 \end{cases}$$

گام دوم: طبق رابطه طول نیمساز می‌توان نوشت:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 3 \times 4 - 1/5 \times 2 = 9 \Rightarrow AD = 3$$

پاسخ خیلی تشریحی

کتاب درسی

در مثلث ABC ، $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.
(هندسه (۲) - تمرین ۲ صفحه ۷۰ کتاب درسی)

$$(1) (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

$$(2) (\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

$$(3) (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

$$(4) (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x})$$

مشاوره چند سالی است که از مبحث سور در کنکور سؤال طرح نشده است. به نظر می‌رسد امسال نوبت آن باشد.

پاسخ: گزینه ۳

نماد $\forall$ به معنای «هر» و نماد $\exists$ به معنای «وجود دارد» می‌باشد.

Hint

درس: Box

سورها:

«به ازای هر»، یا «به ازای جميع مقادير»: نماد $\forall$

گزاره $\forall x \in U; p(x)$ وقتی درست است که به ازای همه مقادير عضو مجموعه U گزاره $p(x)$ درست باشد.

«وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادير»: نماد $\exists$

گزاره $\exists x \in U; p(x)$ وقتی درست است که حداقل یک عضو از مجموعه U وجود داشته باشد که گزاره $p(x)$ به ازای آن درست باشد.

گام اول: برای هر عدد حقیقی، x کمتر یا مساوی x^2 نیست (مثلاً به ازای $x = \frac{1}{4}$)، پس گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ نادرست است.

گام دوم: برای هر عدد حقیقی، x بزرگ‌تر یا مساوی معکوس آن نیست (مثلاً به ازای $x = \frac{1}{4}$)، پس گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x}$ نادرست است.

گام سوم: عدد حقیقی x وجود دارد که $x \leq x^2$ (مثل $x = 2$) پس گزاره $\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ درست است. شبیه همین گزاره $\exists x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{x}$ نیز درست است (مثلاً عدد $x = 2$ وجود دارد).

گام چهارم: گزینه (۱) به صورت $(F \vee F) \equiv F$ ، گزینه (۲) به صورت $(T \Leftrightarrow F) \equiv F$ ، گزینه (۳) به صورت $(F \Rightarrow T) \equiv T$ (همین گزینه درست) و گزینه (۴) نیز به صورت $(F \wedge T) \equiv F$ درمی‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید. (آمار و احتمال - تمرین ۱۰ صفحه ۵۸ کتاب درسی)

$$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad (\text{الف})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in \mathbb{P} \quad (\text{ب})$$

$$\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2 \quad (\text{پ})$$

$$\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0 \quad (\text{ت})$$

کتاب
درسی

مجموعه توانی مجموعه $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ ، چند زیرمجموعه دارد؟

۲۵۵ (۲)

۶۴ (۱)

۲۵۶ (۴)

۶۳ (۳)

مشاوره مجموعه توانی در کتاب درسی سال گذشته به مباحث کتاب اضافه شده است، پس حواستان به آن باشد.

پاسخ: گزینه ۴

مجموعه توانی A ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن زیرمجموعه‌های A هستند.

گام اول: مجموعه توانی یا $P(A)$ ، مجموعه همه زیرمجموعه‌های A است. A دارای $2^3 = 8$ زیرمجموعه است، پس $P(A)$ دارای ۸ عضو است.

$$P(A) = \{\underbrace{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots}_{8 \text{ عضو}}\}$$

گام دوم: $P(A)$ دارای ۸ عضو است، پس $2^8 = 256$ زیرمجموعه دارد.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی



مجموعه‌های X و Y به صورت $X = (A - B)' - (A - B')$ و $Y = A' \cap B$ تعریف شده‌اند. اگر گزاره $\forall (x, y); ((x, y) \in X \times Y \Rightarrow (x, y) \in Y \times X)$ درست باشد، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

$$B \subseteq A \quad (۲)$$

$$A \subseteq B \quad (۱)$$

$$A \subseteq B' \quad (۴)$$

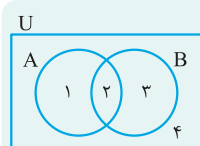
$$B' \subseteq A \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

با روش نمودار ون یا شماره‌گذاری، مجموعه‌های X و Y را ساده کنید.

Hint

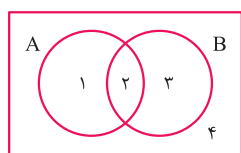
کارت Box



روش شماره‌گذاری (نمودار ون) برای ساده‌سازی مجموعه‌ها:
برای دو مجموعه A و B ، نمودار ون را به صورت مقابل رسم کرده و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم.
مجموعه داده‌شده را ساده می‌کنیم و می‌بینیم کدام ناحیه (یا مجموعه) در پایان به دست می‌آید.

گام اول: با روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها، مجموعه X را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$(A - B)' = \{1\}' = \{2, 3, 4\}$$

$$A - B' = A \cap B = \{2\}$$

$$\Rightarrow X = \{2, 3, 4\} - \{2\} = \{3, 4\} = A'$$

گام دوم: از درستی گزاره داده‌شده می‌فهمیم هر زوج مرتبی که در $X \times Y$ وجود دارد در $Y \times X$ هم هست. این یعنی عضوهای X و Y یکسان بوده و $X = Y$. چون:

$$X \times Y \subseteq Y \times X \Rightarrow \begin{cases} x \subseteq y \\ y \subseteq x \end{cases} \Rightarrow X = Y$$

گام سوم: داریم:

$$A' \cap B = A' \Rightarrow A' \subseteq B \xrightarrow{\text{متمم}} B' \subseteq A$$

۸۹

گزاره‌های p و q هر کدام با احتمال $\frac{1}{4}$ درست هستند. با کدام احتمال گزاره $(p \Rightarrow \sim q) \vee (p \Leftrightarrow q) \sim$ درست است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

۱ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

مشاوره ترکیب منطق و احتمال یک بار در سال ۱۴۰۰ سؤال آمده است. این موضوع پتانسیل دوباره مطرح شدن در کنکور را دارد.

پاسخ: گزینه ۱

جدول ارزش گزاره داده شده را تشکیل دهید و ببینید در چند حالت درست است.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جدول ارزش گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	کل گزاره
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د

گام دوم: از ۴ حالت ممکن، در ۳ حالت گزاره درست است، پس احتمال درست بودن گزاره برابر $\frac{3}{4}$ است.

ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال این که ارزش گزاره r نادرست باشد، کدام است؟

(سؤال ۱۲۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{7}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{7}$ (۱)

کنکور

۵ نفر در یک مسابقه دو شرکت کرده‌اند.

S	a	b	c	d	e
احتمال	P(a)	P(b)	P(c)	P(d)	P(e)

احتمال برد افراد از چپ به راست، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهد. اگر $P(e) = 2P(b)$ باشد حاصل $P(\{a, c, e\} | \{c, d, e\})$ کدام است؟

$$\frac{4}{15} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{3}$$

پاسخ: گزینه ۲

احتمال‌ها را به صورت $x - 2d$ و $x - d$ ، x ، $x + d$ ، $x + 2d$ بگیرد.

احتمال غیرهم‌شانس:

فضای نمونه غیرهم‌شانس: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ، احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای یا احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2\}$ یک زیرمجموعه از S باشد، همواره داریم:

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = 1$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2)$$

نتیجه

احتمال شرطی:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

گام اول: چون احتمال‌ها تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، احتمال برد افراد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

S	a	b	c	d	e
احتمال	$x - 2d$	$x - d$	x	$x + d$	$x + 2d$

گام دوم: مجموع احتمال‌ها برابر یک است، پس داریم:

$$x - 2d + x - d + x + x + d + x + 2d = 1 \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} = 0.2$$

گام سوم: طبق رابطه داده‌شده داریم:

$$P(e) = 2P(b) \Rightarrow x + 2d = 2(x - d) \Rightarrow x = 4d \Rightarrow 0.2 = 4d \Rightarrow d = 0.05$$

گام چهارم: جدول احتمال به صورت زیر است:

S	a	b	c	d	e
احتمال	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3

گام پنجم: از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(\{a, c, e\} | \{c, d, e\}) = \frac{P(\{a, c, e\} \cap \{c, d, e\})}{P(\{c, d, e\})} = \frac{P(\{c, e\})}{P(\{c, d, e\})} = \frac{P(c) + P(e)}{P(c) + P(d) + P(e)} = \frac{0.2 + 0.3}{0.2 + 0.25 + 0.3} = \frac{0.5}{0.75} = \frac{2}{3}$$

Hint

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

کیسه‌ای دارای ۳ مهره قرمز، ۲ مهره زرد و ۴ مهره آبی است. ۳ مهره به ترتیب و بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره دوم زرد نیست، ولی مهره سوم زرد است؟

$$\frac{14}{81} \text{ (۴)}$$

$$\frac{7}{28} \text{ (۳)}$$

$$\frac{7}{36} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{16} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

بی خیال مهره اول بشوید!

Hint

درس Box

انتخاب‌های با جای گذاری و بدون آن، بدون رؤیت مهره اول:

اگر تعدادی مهره، بدون رؤیت از جعبه خارج کنیم و بعد احتمال پیشامد مشاهده رنگ خاصی را در مهره‌ای غیر از مهره اول بخواهیم، فرض می‌کنیم مهره‌های قبلی اصلاً خارج نشده‌اند و احتمال را با همان فضای نمونه اول به دست می‌آوریم.

گام اول: طبق درس باکس در مورد مهره اول اطلاعاتی نداریم، پس فرض می‌کنیم اصلاً بیرون نیامده است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$\begin{array}{c} \text{زرد} \quad \text{قرمز یا آبی} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{36} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{کل} \quad \text{مهره سوم} \\ \text{مهره‌ها} \quad \text{زرد باشد.} \\ \downarrow \end{array}$$

مهره دوم زرد نباشد، پس قرمز یا آبی است.

نمرات دانش آموزی در آزمون ماهانه به صورت زیر بوده است.

دروس	ریاضی	فیزیک	شیمی
نمره	y	z	x
ضریب	۴	۳	۱

در بررسی مجدد برگه‌ها متوجه شده‌ایم که نمره ریاضی او یک نمره کم حساب شده است، ولی نمره فیزیک او یک نمره زیاد شده است. اگر میانگین اول او ۱۶/۲۵ باشد با اصلاح اشتباهات، میانگین درست نمرات چه قدر است؟

$$۱۶/۵ (۲)$$

$$۱۶/۷۵ (۱)$$

$$۱۶/۳۷ (۴)$$

$$۱۶/۳۷۵ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

وقتی درس‌ها ضریب دارند باید از فرمول میانگین وزنی استفاده کنید.

Hint

گام اول: از فرمول میانگین وزنی، میانگین را حساب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{میانگین اولیه} = \frac{4y + 3z + x}{4 + 3 + 1} = \frac{4y + 3z + x}{8} = 16/25$$

گام دوم: نمره درست ریاضی ۱+Y و نمره درست فیزیک ۱-Z است، پس داریم:

$$\text{میانگین درست} = \frac{4(y+1) + 3(z-1) + x}{4 + 3 + 1} = \frac{4y + 3z + x + 1}{8} = \frac{4y + 3z + x}{8} + \frac{1}{8} = 16/25 + 0/125 = 16/375$$

دانش آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است:

(آمار و احتمال - کار در کلاس صفحه ۸۱ کتاب درسی)

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
نمره برحسب درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

الف) میانگین نمره‌های مواد امتحانی این دانش آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

ب) میانگین نمره‌های مواد امتحانی این دانش آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید.

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^6 f_i x_i}{\sum_{i=1}^6 f_i} = \frac{4 \times 71 + \dots + \dots + \dots + 3 \times 100}{4 + \dots + \dots + \dots + 3}$$

پ) کدام نوع میانگین، مناسب است؟

کتاب
درسی

دو دسته عدد داریم که هر کدام شامل ۴ داده یکسان هستند. به یکی از دسته‌ها دو داده که یکی یک واحد بیشتر از میانگین و دیگری یک واحد کم‌تر از میانگین است، اضافه می‌کنیم. با این کار اختلاف واریانس دو دسته برابر $\frac{3}{4}$ می‌شود. واریانس دسته با تعداد عضو بیشتر کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 4 \quad (1) & 3/3 \quad (2) \\ 3 \quad (3) & 4/5 \quad (4) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: دو گروه داده به صورت A و B داریم. با اضافه کردن دو عدد به دسته A، دسته B به وجود می‌آید اما میانگین تغییری نمی‌کند، چون میانگین دو عدد اضافه‌شده همان $\bar{X}$ است.

$$\left\{ \begin{array}{l} A: x_1, x_2, x_3, x_4 \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{X} \\ B: x_1, x_2, x_3, x_4, \underbrace{(\bar{X}-1, \bar{X}+1)}_{\text{دو عدد اضافه شده}} \xrightarrow{\text{میانگین}} \bar{X} \end{array} \right.$$

گام دوم: واریانس دو گروه را حساب می‌کنیم:

$$\sigma_A^2 = \frac{\overbrace{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_4 - \bar{X})^2}^C}{4}, \quad \sigma_B^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_4 - \bar{X})^2 + 1^2 + (-1)^2}{6}$$

گام سوم: طبق رابطه گفته‌شده در صورت سؤال داریم:

$$\left| \frac{C}{4} - \frac{C+2}{6} \right| = \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 12} |3C - 2C - 4| = 18 \Rightarrow \begin{cases} C - 4 = 18 \Rightarrow C = 22 \quad (\text{قبول است.}) \\ C - 4 = -18 \Rightarrow C = -14 \quad (\text{نامنفی است، پس قابل قبول نیست.}) \end{cases}$$

گام چهارم: واریانس گروه B برابر است با:

$$\sigma_B^2 = \frac{22+2}{6} = 4$$

حواست باشه: دو مورد آخر در صورت σ_B^2 همان $(\bar{X}+1-\bar{X})^2$ و $(\bar{X}-1-\bar{X})^2$ هستند.

میانگین دسته اول با ۵ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۶ داده است. به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده a است. اگر واریانس دسته اول $\frac{2}{3}$ از واریانس دسته دوم بیشتر باشد، واریانس دسته اول کدام است؟

(سوال ۲۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

$$\begin{array}{ll} 1 \quad (1) & 2/25 \quad (2) \\ 4 \quad (3) & 6/25 \quad (4) \end{array}$$

برای انتخاب یک نمونه تصادفی به اندازه ۲۰ از بین ۱۰۰ عضو جامعه، جامعه را به ۱۰ گروه ۱۰ تایی تقسیم کرده و دو گروه را به تصادف به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم. نوع روش نمونه‌گیری کدام است؟

- (۱) سامان‌مند
(۲) طبقه‌ای
(۳) تصادفی ساده
(۴) خوشه‌ای

پاسخ: گزینه ۴

در نمونه‌گیری خوشه‌ای کل افراد خوشه را بر می‌داریم.

Hint

درس‌Box

انواع روش‌های نمونه‌گیری:

روش	تعریف	شانس انتخاب هر عضو
تصادفی ساده	نوعی روش نمونه‌گیری که در آن همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.	$\frac{n}{N}$
خوشه‌ای	نمونه‌گیری‌ای که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند. سپس همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیرد.	$\frac{n}{N}$
طبقه‌ای	روش نمونه‌گیری که در آن با طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزا یک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود.	اگر از هر طبقه متناسب با تعداد اعضا برداریم، همان $\frac{n}{N}$ است.
سامان‌مند (سیستماتیک)	نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.	$\frac{n}{N}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: جامعه به ۱۰ گروه (خوشه) افراز شده است.

گام دوم: بین خوشه‌ها قرعه‌کشی کردیم و دو خوشه را به صورت کامل برداشتیم، پس نوع روش نمونه‌گیری، خوشه‌ای بوده است.

نمونه $\{۲, ۵, ۴, ۳, ۶\}$ ، میانگین جامعه $n, ۱, ۲, \dots, n$ را بدون خطا برآورد می‌کند. در نمودار احتمال مشاهده با نمونه‌های دوعضوی، ارتفاع بالاترین میله کدام است؟

$$\frac{۱}{۹} (۴)$$

$$\frac{۵}{۳۶} (۳)$$

$$\frac{۱}{۱۲} (۲)$$

$$\frac{۱}{۶} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

میانگین نمونه با میانگین جامعه (یعنی $\frac{n}{۲}$) برابر است.

گام اول: میانگین جامعه برابر است با:

$$\mu = \frac{۰+۱+\dots+n}{n+۱} = \frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{n+۱} = \frac{n}{۲}$$

گام دوم: میانگین نمونه برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۲+۵+۴+۳+۶}{۵} = ۴$$

گام سوم: میانگین نمونه، بدون خطا میانگین جامعه را برآورد می‌کند، پس داریم:

$$\frac{n}{۲} = ۴ \Rightarrow n = ۸$$

گام چهارم: احتمال آن که میانگین نمونه‌های دوعضوی برابر ۴ باشد از بقیه بیشتر است که در نمونه‌های زیر مشاهده می‌شود:

$$\{۰, ۸\}, \{۱, ۷\}, \{۲, ۶\}, \{۳, ۵\}$$

$$P(A) = \frac{۴}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \text{ پس، } \frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶ \text{ حواست باشه:}$$

فیزیک یازدهم

۹۶

در شکل زیر، دو گوی مشابه به جرم $3/6 \text{ g}$ و بار یکسان q در فاصله 1 cm از هم قرار دارند و گوی بالایی به صورت معلق است. هر یک از گوی‌ها چند الکترون دریافت کنند تا از نظر الکتریکی خنثی شوند؟

$$(g = 10 \text{ N/kg}, e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



$$(1) 1/25 \times 10^{11}$$

$$(2) 1/25 \times 10^{12}$$

$$(3) 8 \times 10^{11}$$

$$(4) 8 \times 10^{12}$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نیروهای الکتریکی و وزن وارد بر گوی معلق را برابر قرار می‌دهیم تا بار الکتریکی هر گوی به دست آید، سپس به کمک اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی، خواسته تست را حساب می‌کنیم.

Hint

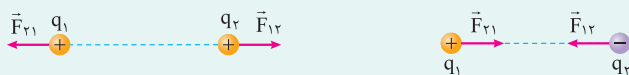
(۱) قانون کولن: دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ ثابت کولن})$$

تکنیک محاسباتی ۹۰: چون در بیشتر تست‌های این مبحث، بارها را برحسب میکروکولن و فاصله‌ها را بر حسب سانتی‌متر می‌دهند، می‌توانید در رابطه بالا، کمیت‌ها را با همین یکاها جای‌گذاری کرده و به جای k ، 90 را قرار دهید تا F برحسب نیوتون به دست آید.

$$F = 90 \times \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad \begin{matrix} \text{برحسب } \mu\text{C} \\ \text{برحسب } \text{cm} \end{matrix}$$

(۲) مطابق شکل‌های زیر، بارهای همنام یکدیگر را دفع و بارهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.

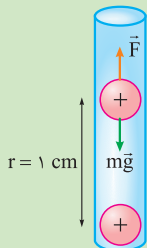


(۳) اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: بار الکتریکی هر جسم، همواره مضرب درستی از بار الکتریکی پایه است:

$$Q = \pm ne \quad (e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C} \text{ بار الکتریکی پایه و } n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

گام اول: مطابق شکل، به گوی بالایی دو نیرو وارد می‌شود، یکی نیروی رو به پایین وزن و دیگری نیروی رو به بالای دافعه الکتریکی که گوی پایینی به آن وارد می‌کند. چون گوی معلق است، این دو نیرو هم‌اندازه‌اند؛ بنابراین:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$F = mg \Rightarrow k \frac{|q||q|}{r^2} = mg \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی ۹۰}} 90 \times \frac{|q|^2}{1^2} = 3/6 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow$$

$$|q|^2 = \frac{3/6 \times 10^{-2}}{90} = \frac{36 \times 10^{-2}}{900} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |q| = \frac{6 \times 10^{-1}}{30} = \frac{1}{50} \mu\text{C} \xrightarrow{q > 0} q = \frac{1}{50} \mu\text{C}$$

گام دوم: به کمک اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی، تعداد پروتون‌های اضافی هر گوی را به دست می‌آوریم. تعداد الکترون‌های مورد نیاز برای خنثی‌شدن هر گوی برابر همین تعداد است، پس:

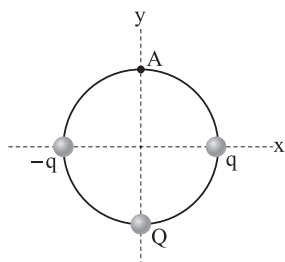
$$q = ne \xrightarrow{q = \frac{1}{50} \mu\text{C} = \frac{1}{50} \times 10^{-6} \text{ C}} \frac{1}{50} \times 10^{-6} = n \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = \frac{1}{50 \times 1/6} \times 10^{13} = 1/25 \times 10^{11}$$



در شکل زیر، دو گوی مشابه به جرم $g = 2/5$ و بار یکسان مثبت q در فاصله $cm = 1/0$ از هم قرار دارند، به طوری که گوی بالایی به حالت معلق مانده است. الف) اندازه بار q را به دست آورید. ب) تعداد الکترون‌های کنده شده از هر گوی چه قدر است؟



در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی محیط دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه A در SI برابر $\vec{E} = \vec{i} - \vec{j}$ باشد، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) $-\sqrt{2}$
(۴) $-2\sqrt{2}$

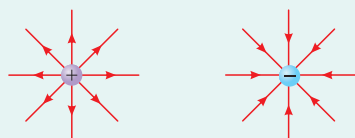
پاسخ: گزینه ۲

کرتس Box

(۱) اندازه میدان الکتریکی در فاصله r از بار نقطه‌ای q از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad \left(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ ثابت کولن} \right)$$

(۲) مطابق شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی داخل می‌شوند.



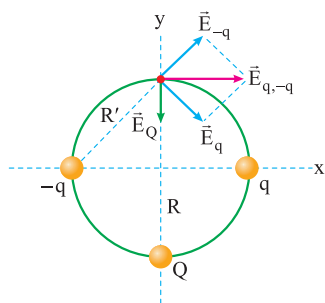
گام اول: بردار میدان الکتریکی خالص در نقطه A، شامل مؤلفه‌های $\vec{i}$ و $\vec{j}$ است. با توجه به مکان بار Q و مکان بارهای هم اندازه q و $-q$ ، مؤلفه $\vec{j}$ آن برابر با میدان الکتریکی بار Q در نقطه A و مؤلفه $\vec{i}$ آن برابر با برابند میدان‌های الکتریکی بارهای q و $-q$ است:

$$\vec{E} = \vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_Q = -\vec{j} \Rightarrow E_Q = 1 \text{ N/C} & \text{(I)} \\ \vec{E}_{q,-q} = \vec{i} \Rightarrow E_{q,-q} = 1 \text{ N/C} & \text{(II)} \end{cases}$$

$Q < 0$

$\vec{E}_Q$ در خلاف جهت محور y ، یعنی به سوی بار Q است، پس:

$\vec{E}_{q,-q}$ در جهت محور x است؛ بنابراین همان‌طور که در شکل زیر نشان دادیم، باید $q < 0$ و در نتیجه $-q > 0$ باشد.



گام دوم: اندازه میدان‌های حاصل از هر یک از بارها را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$E_Q = k \frac{|Q|}{(rR)^2} = k \frac{|Q|}{4R^2} \quad \text{(III)}$$

$$R' = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R^2 = \sqrt{2}R$$

$$E_q = E_{-q} = k \frac{|q|}{R'^2} = k \frac{|q|}{(\sqrt{2}R)^2} = k \frac{|q|}{2R^2}$$

E_q و E_{-q} بر هم عمودند؛ بنابراین برابند آن‌ها برابر است با:

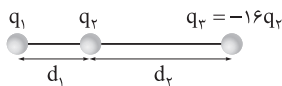
$$E_{q,-q} = \sqrt{E_q^2 + E_{-q}^2} \xrightarrow{E_q = E_{-q}} E_{q,-q} = \sqrt{2}E_q = \sqrt{2}k \frac{|q|}{2R^2} \quad \text{(IV)}$$

گام سوم: به کمک روابط (I) تا (IV) می‌توان نوشت:

$$\frac{E_Q}{E_q} = \frac{k \frac{|Q|}{4R^2}}{\sqrt{2}k \frac{|q|}{2R^2}} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{|Q|}{2\sqrt{2}|q|} \Rightarrow \frac{|Q|}{|q|} = 2\sqrt{2} \xrightarrow{\frac{Q < 0}{q < 0}} \Rightarrow \frac{Q}{q} = 2\sqrt{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارهای الکتریکی نقطه‌ای برابر صفر باشد، به ترتیب از راست به چپ، $\frac{d_2}{d_1}$ و $\frac{q_2}{q_1}$ برابر کدام است؟



(۱) $-\frac{16}{9}, 4$

(۲) $-\frac{9}{16}, 4$

(۳) $-\frac{16}{9}, 3$

(۴) $-\frac{9}{16}, 3$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا با بررسی صفرشدن نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 ، نسبت $\frac{d_2}{d_1}$ به دست می‌آید، سپس با بررسی صفرشدن نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 ، همنام یا ناهمنام بودن بارهای q_1 و q_2 (علامت بارها نسبت به هم) و نسبت $\frac{q_2}{q_1}$ محاسبه می‌شود.

درس‌Box

(۱) درس‌باکس ۱ و ۲، تست ۹۶ را بخوانید.

(۲) دو بار الکتریکی q_1 و q_2 در فاصله معینی از یکدیگر، روی محوری قرار دارند. بار سوم q_3 در چه نقطه‌ای روی این محور قرار بگیرد تا نیروی الکتریکی خالص وارد بر آن برابر صفر شود؟ برای پاسخ به این سؤال، جدول زیر به کارتان می‌آید:

موقعیت نقطه مورد نظر (نقطه A)	شکل (فرض: $ q_2 > q_1 $)
q_1 و q_2 همنام باشند.	حد فاصل بین دو بار و نزدیک‌تر به بار با اندازه کم‌تر
q_1 و q_2 ناهمنام باشند.	خارج از فاصله بین دو بار و نزدیک‌تر به بار با اندازه کم‌تر

گام اول: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 برابر صفر است؛ بنابراین نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_1 از طرف بارهای q_2 و q_3 هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگرند. داریم:

$$F_{r1} = F_{r3} \Rightarrow k \frac{|q_2| |q_1|}{d_1^2} = k \frac{|q_2| |q_1|}{(d_1 + d_2)^2} \xrightarrow{|q_2| = 16|q_1|} \frac{|q_2|}{d_1^2} = \frac{16|q_2|}{(d_1 + d_2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(d_1 + d_2)^2}{d_1^2} = 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \frac{d_1 + d_2}{d_1} = 4 \Rightarrow d_1 + d_2 = 4d_1 \Rightarrow d_2 = 3d_1 \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 3$$

گام دوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 نیز برابر صفر است؛ پس نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_3 از طرف بارهای q_1 و q_2 هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگرند. واضح است که بارهای q_2 و $q_3 = -16q_2$ ناهمنام‌اند و یکدیگر را جذب می‌کنند؛ بنابراین بارهای q_1 و q_3 باید همنام باشند تا یکدیگر را دفع کنند.

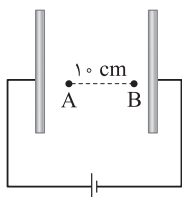
با این توضیحات بارهای q_1 و q_2 ناهمنام‌اند. (البته نیازی به دوستن این موضوع هم نداشتید، چون در همه گزینه‌ها، نسبت $\frac{q_2}{q_1}$ منفیه که بیانگر ناهمنام‌بودن این دو باره)

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow k \frac{|q_1| |q_3|}{(d_1 + d_2)^2} = k \frac{|q_2| |q_3|}{d_2^2} \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = \left(\frac{d_2}{d_1 + d_2} \right)^2$$

$$\xrightarrow{d_2 = 3d_1} \frac{|q_2|}{|q_1|} = \left(\frac{3d_1}{d_1 + 3d_1} \right)^2 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16} \xrightarrow{q_2 \text{ و } q_1 \text{ ناهمنام‌اند}} \frac{q_2}{q_1} = -\frac{9}{16}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه N/C ۲۰۰۰ است. اگر پروتونی با تندی $4 \times 10^5 \text{ m/s}$ از نقطه A به سمت نقطه B پرتاب شود، تندی پروتون هنگام عبور از نقطه B چند متر بر ثانیه است؟
($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و جرم پروتون $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است. از نیروی مقاومت هوا و وزن چشم‌پوشی کنید.)



- (۱) 8×10^5
(۲) $2\sqrt{5} \times 10^5$
(۳) $2\sqrt{3} \times 10^5$
(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B، یعنی $V_B - V_A$ را به دست آورید، سپس تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی پروتون را در این جابه‌جایی حساب کنید. در پایان، اصل پایستگی انرژی مکانیکی را بنویسید تا خواسته تست به دست آید.

درس Box

(۱) اگر ذره باردار فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی مکانیکی‌اش پایسته می‌ماند. در این حالت رابطه زیر برقرار است:

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta U_E + \Delta K = 0 \Rightarrow \Delta U_E = -\Delta K \rightarrow \text{تغییر انرژی جنبشی ذره}$$

(۲) میدان الکتریکی بین دو صفحه موازی باردار (خازن تخت)، یکنواخت است و اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل الکتریکی میان صفحه‌ها}$$

$$\rightarrow \text{فاصله بین صفحه‌ها}$$

(۳) اگر ذره‌ای با بار q ، از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا شود و تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار در این جابه‌جایی برابر ΔU_E باشد، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U_E}{q}$$

دقت کنید که در رابطه بالا، q با علامتش جای‌گذاری می‌شود.

(۴) انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

گام اول: اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B را حساب می‌کنیم:

$$|\Delta V| = Ed \xrightarrow{d=1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}} |\Delta V| = 2000 \times 0.01 = 200 \text{ V}$$

نقطه A نسبت به نقطه B به صفحه مثبت نزدیک‌تر است، بنابراین پتانسیل الکتریکی نقطه A بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطه B است و داریم:

$$V_B - V_A = -|\Delta V| = -200 \text{ V}$$

گام دوم: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی پروتون در جابه‌جایی از نقطه A تا نقطه B را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U_E = q(V_B - V_A) \xrightarrow{q=e=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} \Delta U_E = 1.6 \times 10^{-19} \times (-200) = -2 \times 1.6 \times 10^{-17} \text{ J}$$

گام سوم: در نبود نیروی مقاومت هوا، انرژی مکانیکی پروتون پایسته می‌ماند؛ بنابراین:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta U_E + \Delta K = 0 \Rightarrow \Delta U_E + \frac{1}{2}m_p(v_B^2 - v_A^2) = 0$$

$$\Rightarrow -2 \times 1.6 \times 10^{-17} + \frac{1}{2} \times 1.67 \times 10^{-27} (v_B^2 - (4 \times 10^5)^2) = 0 \Rightarrow$$

$$1.6 \times 10^{-17} (-2 + \frac{1}{2} \times 10^{-1} (v_B^2 - (4 \times 10^5)^2)) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 10^{-1} (v_B^2 - 16 \times 10^{10}) = 2 \Rightarrow$$

$$v_B^2 - 16 \times 10^{10} = 4 \times 10^{10} \Rightarrow v_B^2 = 20 \times 10^{10} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} v_B = 2\sqrt{5} \times 10^5 \text{ m/s}$$

اگر به اشتباه $V_B - V_A$ را 200 V به دست آورید، جوابتان گزینه نادرست (۳) می‌شود.

کول‌نخوری

۱۰۰ چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ رسانایی برابر $25 \mu\text{C} / \text{m}^2$ است. بار الکتریکی موجود در ناحیه‌ای به مساحت 4 cm^2

در سطح این کره، چند نانوکولن است؟

- (۱) 0.01 (۲) 0.1 (۳) 1 (۴) 10

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر روی سطحی به مساحت A ، بار الکتریکی Q توزیع شده باشد، چگالی سطحی بار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

گام اول: چگالی سطحی بار الکتریکی را بر حسب nC / cm^2 به دست می‌آوریم:

$$\sigma = 25 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \times \frac{10^{-6} \text{ nC}}{1 \mu\text{C}} \times \frac{10^{-4} \text{ m}^2}{1 \text{ cm}^2} = 25 \times 10^{-3} \text{ nC} / \text{cm}^2$$

گام دوم: خواستهٔ تست به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow 25 \times 10^{-3} = \frac{Q}{4} \Rightarrow Q = 0.1 \text{ nC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک خازن تخت به باتری بسته شده است. پس از مدتی، خازن را از باتری جدا کرده و سپس فاصله بین صفحه‌های

خازن را دو برابر می‌کنیم. کدام موارد زیر درست است؟

الف) بزرگی میدان الکتریکی میان صفحه‌ها، نصف می‌شود.

ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، دو برابر می‌شود.

پ) انرژی ذخیره‌شده در خازن، دو برابر می‌شود.

ت) بار روی صفحه‌ها، نصف می‌شود.

(۲) الف و ت

(۱) الف و پ

(۴) ب و پ

(۳) ب و ت

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) اگر بار الکتریکی روی صفحه‌های خازنی برابر Q و اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن برابر V باشد، ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V}$$

(۲) ظرفیت خازن تختی که با دی‌الکتریک با ثابت K کاملاً پر شده است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

مساحت هر یک از صفحه‌های خازن

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$(\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \text{ ضریب گذردهی الکتریکی خلأ})$$

فاصله بین صفحه‌های خازن

(۳) اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحه‌های خازن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{V}{d}$$

(۴) انرژی ذخیره‌شده در خازنی به ظرفیت C که بار الکتریکی آن Q است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

خازن از باتری جدا شده است؛ بنابراین با دوبرابر کردن فاصله بین صفحه‌های خازن، بار الکتریکی روی صفحه‌های آن ثابت می‌ماند (نادرستی «ت»).

ببینیم چه بر سر اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها می‌آید:

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C \text{ نصف می‌شود} \Rightarrow \frac{d}{2} \text{ برابر}$$

$$\frac{Q}{C} = \frac{V}{2} \Rightarrow V \text{ دو برابر می‌شود} \quad (\text{درستی «ب»})$$

حل تست را کامل می‌کنیم. چگونگی تغییرات بزرگی میدان الکتریکی میان صفحه‌های خازن و انرژی ذخیره‌شده در خازن را بررسی می‌کنیم.

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow E \text{ ثابت می‌ماند} \quad (\text{نادرستی «الف»})$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow U \text{ دو برابر می‌شود} \quad (\text{درستی «پ»})$$

با نگاهی به گزینه‌ها، به دلیل نادرستی عبارت «ت»، گزینه‌های (۲) و (۳) حذف و به دلیل درستی «ب»، گزینه (۴) جواب تست است.

تیزبازی

یک خازن تخت به یک باتری بسته شده است. پس از مدتی، در حالی که خازن هم‌چنان به باتری متصل است، فاصله بین صفحه‌های خازن را دو برابر می‌کنیم. کدام موارد زیر درست است؟

(سؤال ۲۲۳ کنکور تهرانی ۱۳۹۹)

الف) بزرگی میدان الکتریکی میان صفحه‌ها نصف می‌شود.

ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها نصف می‌شود.

پ) ظرفیت خازن دو برابر می‌شود.

ت) بار روی صفحه‌ها نصف می‌شود.

۲) الف و ت

۱) الف و ب

۴) پ و ت

۳) ب و ت

قطر سیمی مسی برابر ۲ mm است. اگر مقاومت ویژه مس $1/6 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ باشد، مقاومت الکتریکی ۳۰ m از این

سیم برابر چند اهم است؟ ($\pi = 3$)

۰/۱۶ (۲)

۰/۰۴ (۱)

۱/۶ (۴)

۰/۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

$R = \rho \frac{L}{A}$
طول رسانا $\rightarrow$
مساحت مقطع رسانا $\rightarrow$
مقاومت ویژه رسانا

رابطه مقاومت الکتریکی یک رسانا:

رابطه مقاومت الکتریکی رسانا را می نویسیم:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{\pi r^2} \xrightarrow{r = \frac{d}{2} = \frac{2}{2} \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}} R = 1/6 \times 10^{-8} \times \frac{30}{3 \times (10^{-3})^2} = 0/16 \Omega$$

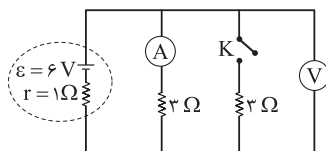
پاسخ خیلی تشریحی ✓

سیم کشی خانه ها معمولاً با سیم های مسی نمره ۱۴ بر اساس استاندارد SWG صورت می گیرد که قطری برابر با ۲/۰۳۲ mm دارد. مقاومت ۱۰۰ m از این سیم ها در دمای اتاق چه قدر است؟

(فیزیک (۲) - مثال ۲ - ۵ صفحه ۵۶ کتاب درسی)

کتاب
درسی

در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، مقدارهایی که آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب چند آمپر و چند ولت تغییر می‌کند؟



۱) $2/7, 0/3$

۲) $0/9, 0/3$

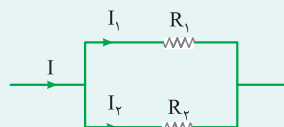
۳) $2/7, 0/9$

۴) $0/9, 0/9$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

۱) مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند:



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

● مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = \frac{R}{2}$$

● اگر دو مقاومت یکسان و برابر R باشند:

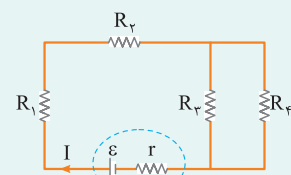
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

● نسبت جریان عبوری از مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$I = I_1 + I_2$$

● اصل پایستگی بار الکتریکی:

۲) در مدار شکل زیر:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری):

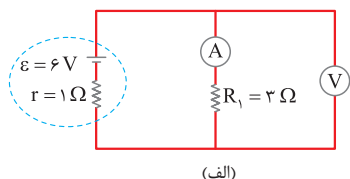
جریان الکتریکی عبوری از مقاومت $V = RI \rightarrow$

۳) اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت الکتریکی R:

گام اول: در حالت اول که کلید باز است، مقاومت $R_2 = 3\Omega$ در مدار قرار نمی‌گیرد و از آن حذف می‌شود، پس مدار به صورت شکل (الف) است. جریان عبوری از آمپرسنج همان جریان عبوری از باتری است، پس:

$$I_A = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} = \frac{6}{3 + 1} = 1/5 \text{ A}$$

ولتسنج هم اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 را نشان می‌دهد:



$$V_V = R_1 I_A = 3 \times 1/5 = 4/5 \text{ V}$$

(الف)

گام دوم: در حالت دوم که کلید بسته است، مدار به شکل (ب) است. مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \times 3}{3 + 3} = 1/2 \Omega \text{ (یا } R_1 = R_2 \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1}{2} = \frac{3}{2} = 1/2 \Omega)$$

$$I' = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{6}{1/2 + 1} = 2/4 \text{ A}$$

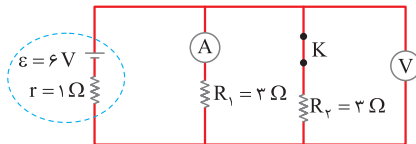
جریان کل مدار (جریان عبوری از باتری) برابر است با:

چون مقاومت‌ها یکسان‌اند، جریان I' به صورت مساوی بین آن‌ها تقسیم می‌شود؛ بنابراین:

$$I'_A = I_{R_1} = \frac{I'}{2} = \frac{2/4}{2} = 1/2 \text{ A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عددی که ولتسنج در حالت دوم نشان می‌دهد، برابر است با:

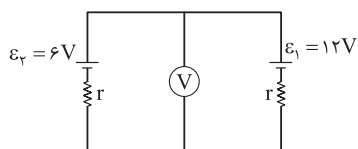


$$V'_V = R_V I'_A = 3 \times 1/2 = 3/2 \text{ V}$$

(ب)

گام سوم: عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، از $I_A = 1/5 \text{ A}$ به $I'_A = 1/2 \text{ A}$ رسیده، یعنی 3 A تغییر کرده و عددی که ولتسنج نشان می‌دهد، از $V_V = 4/5 \text{ V}$ به $V'_V = 3/2 \text{ V}$ رسیده، یعنی 9 V تغییر کرده است.

۱۰۴ در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



۶ (۱)

۹ (۲)

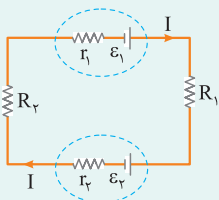
۱۵ (۳)

۱۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

مدار شکل مقابل، شامل دو باتری ϵ_1 و ϵ_2 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$) است که در جهت‌های مخالف بسته شده‌اند. در مورد این مدار باید موارد زیر را بدانید:



• تعیین جهت جریان عبوری از مدار به عهده باتری ϵ_1 (که نیروی محرکه الکتریکی بزرگ‌تری دارد) است.

$$I = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R_{eq} + r_1 + r_2}$$

• مقدار جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$\epsilon_1 \text{ باتری } \epsilon_1, \text{ تولیدکننده انرژی است: } V_1 = \epsilon_1 - r_1 I$$

• باتری ϵ_2 ، مصرف‌کننده انرژی است:

$$\epsilon_2 \text{ باتری } \epsilon_2, \text{ مصرف‌کننده انرژی است: } V_2 = \epsilon_2 + r_2 I$$

گام اول: جریان عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری‌ها) را حساب می‌کنیم:

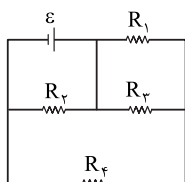
$$I = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{r + r} = \frac{12 - 6}{2r} = \frac{3}{r}$$

گام دوم: ولت‌سنج، اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از باتری‌ها را نشان می‌دهد، پس:

$$V_V = V_1 = \epsilon_1 - rI = 12 - r \times \frac{3}{r} = 9 \text{ V} \quad \text{یا} \quad V_V = V_2 = \epsilon_2 + rI = 6 + r \times \frac{3}{r} = 9 \text{ V}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر، مقاومت‌ها مشابه‌اند. توان خروجی باتری چند برابر توان مصرفی مقاومت R_1 است؟



۷ (۱)

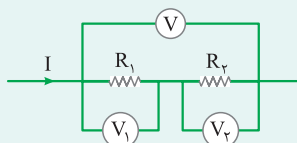
۱۴ (۲)

۱۵ (۳)

۱۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

(۱) مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:



● مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

● اختلاف پتانسیل دو سر مجموعه مقاومت‌ها برابر با مجموع اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌ها است:

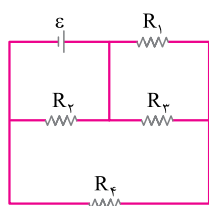
$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I$$

(۲) درس‌بکس ۱، ۲ و ۳، تست ۱۰۳ را بخوانید.

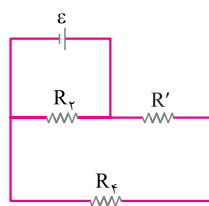
(۳) اگر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R برابر V باشد، توان مصرفی در این مقاومت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

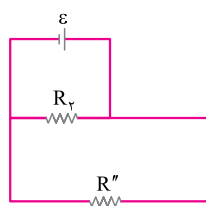
گام اول: هر کدام از مقاومت‌ها را برابر R در نظر می‌گیریم و مطابق شکل‌های (الف) تا (ت)، مقاومت معادل مدار را مرحله‌به‌مرحله به دست می‌آوریم.



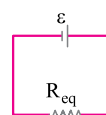
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی‌اند. $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$

مقاومت‌های R' و R_4 متوالی‌اند. $R'' = R' + R_4 = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R$

مقاومت‌های R'' و R_3 موازی‌اند. $R_{eq} = \frac{R'' R_3}{R'' + R_3} = \frac{\frac{3}{2}R \times R}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{\frac{3}{2}R^2}{\frac{5}{2}R} = \frac{3}{5}R$

گام دوم: توان خروجی باتری برابر با توان مصرفی در مقاومت معادل است، پس:

$$P_{\text{باتری}} = P_{eq} = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon^2}{\frac{3}{5}R} = \frac{5\varepsilon^2}{3R}$$

گام سوم: به اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 نیاز داریم. با توجه به شکل (پ)، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R'' برابر با ε است؛ بنابراین مجموع اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های متوالی R' و $R_4 = R$ برابر ε است. از طرفی چون

$$R_4 = 2R', \text{ پس } V_4 = 2V' \text{ است، داریم:}$$

$$V' + V_4 = \varepsilon \xrightarrow{V_4 = 2V'} V' + 2V' = \varepsilon \Rightarrow V' = \frac{\varepsilon}{3}$$

درس‌بکس

پاسخ خیلی تشریحی

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 برابر با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R' ، یعنی $V' = \frac{\varepsilon}{3}$ است.

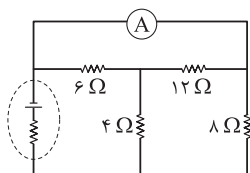
گام چهارم: توان مصرفی در مقاومت R_1 برابر است با:

$$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2}{R} = \frac{\varepsilon^2}{9R}$$

گام پنجم: نسبت خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\frac{P_{\text{باتری}}}{P_1} = \frac{\frac{5\varepsilon^2}{3R}}{\frac{\varepsilon^2}{9R}} = \frac{45}{3} = 15$$

در مدار شکل زیر، اگر آمپرسنج آرمانی مقدار 1 A را نشان دهد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر چند ولت است؟



(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

درس‌یاکس ۱، تست‌های ۱۰۳ و ۱۰۵ را بخوانید.

درس‌Box

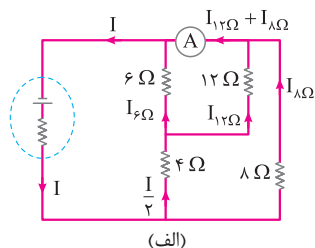
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مدار را به شکل ساده‌تر (الف) رسم می‌کنیم. مطابق شکل‌های (الف) تا (ت) مقاومت معادل مدار را به دست می‌آوریم:

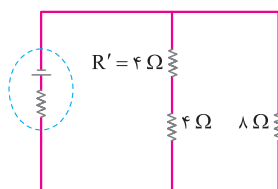
$$R' = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4 \Omega \quad (\text{یا } 12 = \frac{n}{n+1} \times 6 \Rightarrow R' = \frac{12}{n+1} = \frac{12}{2+1} = 4 \Omega)$$

$$R'' = R' + 4 = 4 + 4 = 8 \Omega \quad \text{مقاومت‌های } R' \text{ و } 4 \Omega \text{ متوالی‌اند.}$$

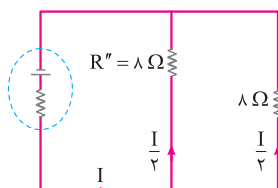
$$R_{eq} = \frac{R'' \times 8}{R'' + 8} = \frac{8 \times 8}{8 + 8} = 4 \Omega \quad (\text{یا } R'' = 8 \Omega \Rightarrow R_{eq} = \frac{8}{2} = 4 \Omega)$$



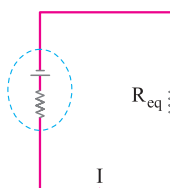
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

گام دوم: شکل (الف) را ببینید. آمپرسنج مجموع جریان‌های عبوری از مقاومت‌های 12Ω و 8Ω را نشان می‌دهد. اگر جریان عبوری از باتری را برابر I در نظر بگیریم، مطابق شکل (پ)، جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌های 8Ω برابر $\frac{I}{2}$ خواهد بود. از طرفی با توجه به شکل (الف)، جریان عبوری از مقاومت 12Ω بر حسب I به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{I_{12 \Omega}}{I_{6 \Omega}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{I}{2} = I_{12 \Omega} + I_{6 \Omega} \Rightarrow \frac{I}{2} = I_{12 \Omega} + 2I_{12 \Omega} \Rightarrow \frac{I}{2} = 3I_{12 \Omega} \Rightarrow I_{12 \Omega} = \frac{I}{6}$$

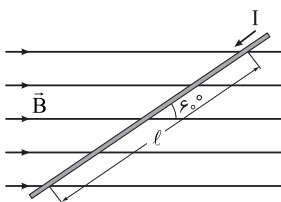
بنابراین:

$$I_A = I_{12 \Omega} + I_{8 \Omega} \Rightarrow 1 = \frac{I}{6} + \frac{I}{2} \Rightarrow 1 = \frac{4I}{6} \Rightarrow 4I = 6 \Rightarrow I = 1.5 \text{ A}$$

گام سوم: شکل (ت) را ببینید. اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل است، بنابراین:

$$V_{\text{باتری}} = V_{R_{eq}} = R_{eq} I = 4 \times 1.5 = 6 \text{ V}$$

در شکل زیر، سیم راست حامل جریان $I = 5 \text{ A}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 40 \text{ G}$ قرار دارد. اگر $\ell = 60 \text{ cm}$ باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟



- (۱) $\otimes, 6 \times 10^{-3}$
- (۲) $\odot, 6 \times 10^{-3}$
- (۳) $\otimes, 6\sqrt{3} \times 10^{-3}$
- (۴) $\odot, 6\sqrt{3} \times 10^{-3}$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

به کمک قاعده دست راست، جهت نیروی مغناطیسی و به کمک رابطه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان، اندازه این نیرو را به دست آورید.

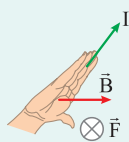
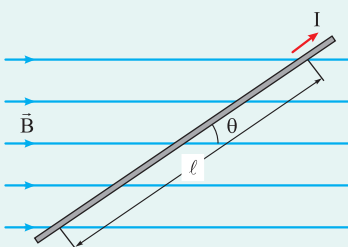
کرتس Box

نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت:
اندازه:

طول بخشی از سیم که در میدان مغناطیسی قرار دارد.

$$F = I \ell B \sin \theta \rightarrow \text{زاویه بین راستای سیم و میدان مغناطیسی}$$

بزرگی میدان جریانی عبوری
مغناطیسی از سیم



جهت: به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت جریان الکتریکی عبوری از سیم قرار دهیم که میدان مغناطیسی از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را نشان می‌دهد.

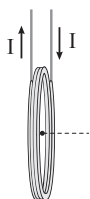
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: براساس شکل مقابل و به کمک قاعده دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را تعیین می‌کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، این نیرو برون‌سو ($\odot$) است.

گام دوم: اندازه این نیرو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = I \ell B \sin \theta \xrightarrow[\ell = 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}]{B = 40 \text{ G} = 40 \times 10^{-4} \text{ T}} F = 5 \times 0.6 \times 40 \times 10^{-4} \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3} \times 10^{-3} \text{ N}$$

در شکل زیر، از پیچۀ مسطحی به شعاع $6/25 \text{ cm}$ که از 2000 دور سیم نازک ساخته شده است، جریان 20 mA می‌گذرد. میدان مغناطیسی در مرکز پیچه چند گاوس و در چه جهتی است؟ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$)



(۱)، ۴ ←

(۲)، ۴ →

(۳)، ۴۰ ←

(۴)، ۴۰ →

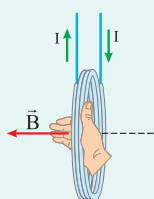
پاسخ: گزینه ۱

(۱) اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچۀ مسطح حامل جریان:

تعداد حلقه‌ها

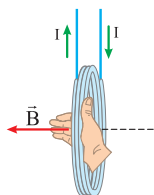
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$
 → جریانی عبوری از حلقه
 → شعاع حلقه

(۲) جهت میدان مغناطیسی در مرکز پیچۀ مسطح حامل جریان:



اگر مطابق شکل مقابل، شست دست راست را در جهت جریان عبوری از حلقه‌های پیچه قرار دهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دیگر، جهت میدان مغناطیسی در داخل پیچه را نشان می‌دهد.

گام اول: مطابق شکل مقابل، برای تعیین جهت میدان مغناطیسی در مرکز پیچه از قاعده دست راست کمک می‌گیریم. همان‌طور که مشخص است، $\vec{B}$ به سمت چپ ($\leftarrow$) است.



گام دوم: بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه به صورت زیر حساب می‌شود:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2000 \times 20 \times 10^{-3}}{2 \times 6/25 \times 10^{-2}} = 4 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G} \rightarrow B = 4 \text{ G}$$

کرتس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ذره‌ای به جرم 12 g و بار الکتریکی $25 \mu\text{C}$ را در میدان مغناطیسی یکنواخت 600 G که به سمت شمال است، در راستای افقی با سرعت $\vec{v}$ پرتاب می‌کنیم و ذره روی خط راست به حرکت خود ادامه می‌دهد. به ترتیب، کم‌ترین مقدار v چند متر بر ثانیه است و در این حالت ذره در چه جهتی پرتاب شده است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

نیروی خالص وارد بر ذره برابر صفر است.

درون سو (⊗)

(۱) 800 ، شرق

(۲) 800 ، غرب

(۳) 8000 ، شرق

(۴) 8000 ، غرب

پاسخ: گزینه ۱

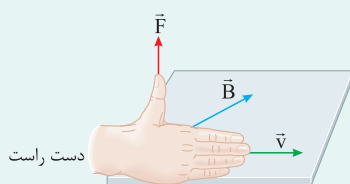
درس‌Box

ذره‌ای با بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در حال حرکت با سرعت $\vec{v}$ است:

$$F = |q| v B \sin \theta$$

● اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره:

در رابطه بالا، θ زاویه بین جهت حرکت بار الکتریکی ($\vec{v}$) و جهت میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) است.



● جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره: به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد. (شکل مقابل را ببینید.)

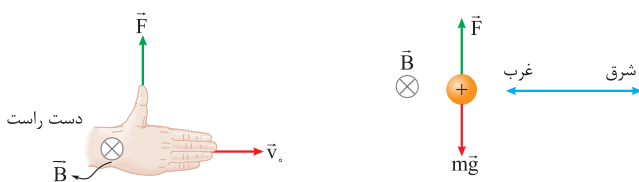
اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.



علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بردار متحرک
مثبت	قاعده دست راست
منفی	قاعده دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

گام اول: ذره روی خط راست به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ بنابراین نیروی خالص وارد بر آن باید برابر صفر باشد. مطابق شکل زیر، با توجه به این که نیروی وزن رو به پایین است، نیروی مغناطیسی باید رو به بالا باشد. از طرفی چون به دنبال کم‌ترین مقدار v هستیم، جهت پرتاب ذره باید عمود بر میدان مغناطیسی باشد، یعنی $\theta = 90^\circ$. با این توضیحات، ذره به سمت شرق یا غرب پرتاب شده است. به کمک قاعده دست راست، جهت پرتاب ذره ($\vec{v}$) به طرف شرق تعیین می‌شود.

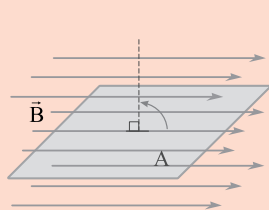
گام دوم: اندازه نیروی مغناطیسی و وزن را برابر قرار می‌دهیم:



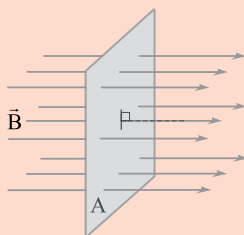
$$F = mg \Rightarrow |q| v B \sin \theta = mg \xrightarrow{q=25 \mu\text{C}=25 \times 10^{-6} \text{ C}, m=12 \text{ g}=12 \times 10^{-3} \text{ kg}, B=600 \text{ G}=600 \times 10^{-4} \text{ T}, \theta=90^\circ}$$

$$25 \times 10^{-6} \times v \times 600 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ = 12 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow v = \frac{12 \times 10^{-3} \times 10}{25 \times 10^{-6} \times 600 \times 10^{-4}} = 800 \text{ m/s}$$

در شکل زیر، حلقهٔ رسانایی به مساحت 40 cm^2 ، حول محوری عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0.5 \text{ T}$ می‌چرخد. در بازهٔ زمانی 0.5 ثانیه‌ای که حلقه از حالت (الف) به حالت (ب) می‌رسد، اندازهٔ نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه چند میلی‌ولت است؟



(ب)



(الف)

۱ (۴)

۴ (۳)

۰/۱ (۲)

۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس: Box

قانون القای الکترومغناطیسی فاراده: با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک مدار بسته، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در این مدار از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \Phi = BA \cos \theta \quad \varepsilon_{av} = -N B A \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta t}$$

زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه
تعداد حلقه‌ها
بزرگی میدان مغناطیسی
مساحت حلقه
فقط زاویهٔ θ تغییر کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ به کمک قانون القای الکترومغناطیسی فاراده می‌توان نوشت:

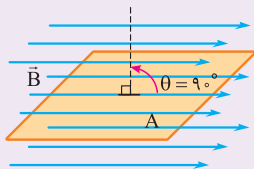
$$|\varepsilon_{av}| = \left| -NBA \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta t} \right|$$

$$\frac{A = 40 \text{ cm}^2 = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 90^\circ} \rightarrow |\varepsilon_{av}| = \left| -1 \times 0.5 \times 40 \times 10^{-4} \times \frac{(\cos 90^\circ - \cos 0^\circ)}{0.5} \right| = 4 \times 10^{-4} \text{ V}$$

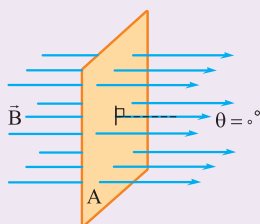
$$1 \text{ V} = 10^3 \text{ mV} \rightarrow |\varepsilon_{av}| = 0.4 \text{ mV}$$

در شکل زیر، حلقهٔ رسانایی به مساحت 40 cm^2 ، حول محوری عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0.5 \text{ T}$ می‌چرخد. در بازهٔ زمانی که حلقه از حالت (الف) به حالت (ب) می‌رسد، شار مغناطیسی چند وبر و چگونه تغییر می‌کند؟

(سؤال ۶۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)



(ب)



(الف)

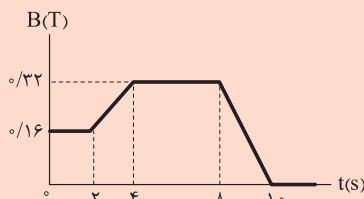
(۲) 2×10^{-2} و کاهش می‌یابد.

(۱) 2×10^{-2} و افزایش می‌یابد.

(۴) 2×10^{-4} و کاهش می‌یابد.

(۳) 2×10^{-4} و افزایش می‌یابد.

یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع ۵ cm و مقاومت الکتریکی 1Ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می‌کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 10$ s چند میلی آمپر است؟



(۱) ۰/۴

(۲) ۰/۸

(۳) ۴

(۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا به کمک نمودار، آهنگ تغییر میدان مغناطیسی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورید. در ادامه به کمک قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، $\mathcal{E}_{av}$ و سپس I_{av} را حساب کنید.

Hint

درس: Box

۱) قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:

با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک مدار بسته، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در این مدار از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{E}_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \xrightarrow[\text{فقط } B \text{ تغییر کند.}]{\Phi = BA \cos \theta} \mathcal{E}_{av} = -N \frac{\Delta B}{\Delta t} A \cos \theta$$

آهنگ تغییر اندازهٔ میدان مغناطیسی
تعداد حلقه‌ها
زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه
مساحت حلقه

(۲) جریان القایی متوسط:

$$I_{av} = \frac{\mathcal{E}_{av}}{R} \rightarrow \text{مقاومت}$$

گام اول: به آهنگ تغییر شار مغناطیسی در بازهٔ زمانی $t = 0$ s تا $t = 10$ s نیاز داریم. به کمک نمودار می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_{10s} - B_{0s}}{10 - 0} = \frac{0 - 0.16}{10} = -0.016 \text{ T/s}$$

گام دوم: جریان القایی متوسط در حلقه در این بازهٔ زمانی به صورت زیر به دست می‌آید:

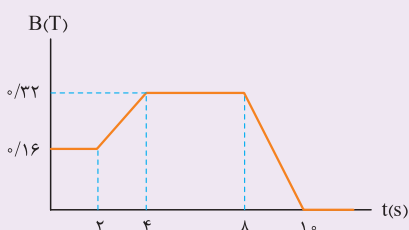
$$|I_{av}| = \frac{|\mathcal{E}_{av}|}{R} = \frac{|-N \frac{\Delta B}{\Delta t} A \cos \theta|}{R} = \frac{|-1 \times (-0.016) \times (0.05 \times 0.05) \times \cos 0|}{0.1}$$

$$= \frac{4 \times 10^{-5}}{0.1} = 4 \times 10^{-4} \text{ A} \xrightarrow{1 \text{ A} = 10^3 \text{ mA}} |I_{av}| = 0.4 \text{ mA}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع ۲ cm و مقاومت الکتریکی 1Ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می‌کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t = 2$ s تا $t = 10$ s چند میلی آمپر است؟

(سوال ۷۱ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت اول)



(۱) صفر

(۲) ۰/۰۴

(۳) ۰/۰۶

(۴) ۰/۰۸

کنکور

طول سیملوله آرمانی و بدون هسته A، ۴ برابر طول سیملوله آرمانی و بدون هسته B است. اگر تعداد حلقه‌های سیملوله A، ۲ برابر تعداد حلقه‌های سیملوله B، و سطح مقطع سیملوله A، ۳ برابر سطح مقطع سیملوله B باشد، ضریب القاوری سیملوله A، چند برابر ضریب القاوری سیملوله B است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

تعداد حلقه‌های سیملوله

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \rightarrow \begin{array}{l} \text{سطح مقطع سیملوله} \\ \text{طول سیملوله} \end{array}$$

$$(A = \pi r^2 \rightarrow \text{شعاع مقطع سیملوله})$$

رابطه ضریب القاوری سیملوله را به صورت نسبی می‌نویسیم:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \frac{A_A}{A_B} \times \frac{\ell_B}{\ell_A} = (2)^2 \times 3 \times \frac{1}{4} = 3$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر فرضی A ۲۰۰ و انرژی ذخیره شده در آن یک کیلووات ساعت است. ضریب القاوری این القاگر چند هانری است؟

۳۶۰ (۴)

۱۸۰ (۳)

۳۶ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

انرژی ذخیره شده در سیملوله:

ضریب القاوری سیملوله

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \rightarrow \text{جریان عبوری از سیملوله}$$

گام اول: انرژی ذخیره شده در سیملوله را بر حسب ژول به دست می آوریم:

$$U = 1 \text{ kW} \cdot \text{h} \times \frac{10^3 \text{ W}}{1 \text{ kW}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 36 \times 10^5 \text{ W} \cdot \text{s} = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

گام دوم: ضریب القاوری سیملوله به صورت زیر حساب می شود:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow 36 \times 10^5 = \frac{1}{2} L \times (200)^2 \Rightarrow L = \frac{2 \times 36 \times 10^5}{4 \times 10^4} = 180 \text{ H}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

متخصصان صنعت برق، علاقه مندند راه های مؤثری را برای ذخیره انرژی الکتریکی تولیدی در ساعت های کم مصرف (کم باری) بیابند تا با استفاده از آن، نیاز مشترکان را در ساعت های پر مصرف (اوج بار) تأمین کنند. یک ایده فرضی، استفاده از یک القاگر بزرگ است. ضریب القاوری این القاگر چه قدر باشد تا بتواند ۱/۰ kWh انرژی الکتریکی را در پیچۀ حامل جریان A ۲۰۰ ذخیره کند؟

(فیزیک (۲) - مثال ۴ - ۶ صفحه ۱۲۱ کتاب درسی)

کتاب
درسی

معادله جریان عبوری از یک مولد جریان متناوب در SI به صورت $I = 5 \sin 100\pi t$ است. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، جریان عبوری از مولد برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

(۲) $\frac{1}{50}$

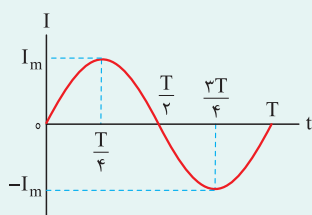
(۱) $\frac{1}{20}$

(۴) $\frac{1}{500}$

(۳) $\frac{1}{200}$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box



معادله و نمودار جریان متناوب بر حسب زمان به صورت زیر است:

بیشینه جریان متناوب $I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

جریان متناوب

دوره تناوب

گام اول: به کمک معادله جریان متناوب، دوره تناوب جریان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2\pi}{T} = 100\pi \Rightarrow T = \frac{1}{50} \text{ s}$$

گام دوم: جریان برای اولین بار در لحظه $\frac{T}{4}$ بیشینه می‌شود، پس:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{1}{50}}{4} = \frac{1}{200} \text{ s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) در سامانه‌های انتقال و توزیع برق از محل تولید تا محل مصرف، از جریان مستقیم استفاده می‌شود.
- (۲) برای انتقال توان الکتریکی در فاصله‌های دور، تا جایی که امکان دارد باید از ولتاژهای بالا و جریان‌های کم استفاده کرد.
- (۳) یکی از مزیت‌های مهم توزیع توان الکتریکی dc بر ac آن است که افزایش و کاهش ولتاژ dc، بسیار آسان‌تر از ac است.
- (۴) قبل از انتقال توان الکتریکی از نیروگاه‌ها، از مبدل‌های کاهنده استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی علت نادرستی گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴):

- گزینه (۱): در سامانه‌های انتقال و توزیع برق از محل تولید تا محل مصرف، از جریان متناوب استفاده می‌شود.
- گزینه (۳): یکی از مزیت‌های مهم توزیع توان الکتریکی ac بر dc آن است که افزایش و کاهش ولتاژ ac، بسیار آسان‌تر از dc است.
- گزینه (۴): قبل از انتقال توان الکتریکی از نیروگاه‌ها، از مبدل‌های افزایشنده استفاده می‌شود.

شیمی یازدهم

۱۱۶

A عنصری از دسته s و X و D عنصرهایی از دوره چهارم جدول دوره‌ای می‌باشند. اگر اختلاف شمار الکترون‌های ظرفیتی هر یک از اتم عنصرهای X و D با شمار این الکترون‌ها در اتم عنصر A، برابر ۳ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

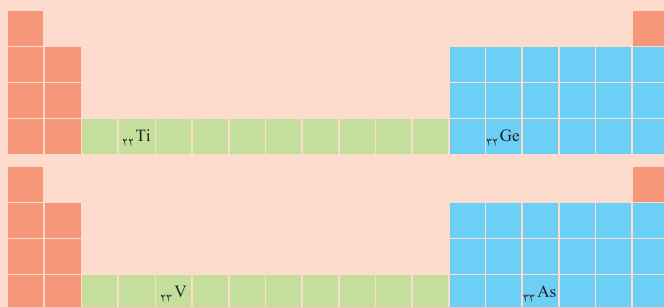
- (۱) مجموع عدد اتمی عنصرهای X و D ، عددی زوج است.
- (۲) مابین موقعیت X و D در جدول دوره‌ای، به یقین ۹ عنصر فلزی وجود دارد.
- (۳) اختلاف عدد اتمی عنصر X با A ، می‌تواند برابر ۲ باشد.
- (۴) اگر D عنصری از دسته d باشد، X به یقین یک شبه‌فلز است.

پاسخ: گزینہ ۲

✓ پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این که عنصر A در دسته S قرار دارد، شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم آن برابر ۱ یا ۲ است. از طرفی اختلاف شمار الکترون‌های ظرفیتی هر یک از اتم‌های X و D با الکترون‌های ظرفیتی اتم A برابر ۳ می‌باشد، پس شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌های X و D برابر ۴ یا ۵ است؛ بنابراین، در این حالت، اتم‌های X و D می‌توانند متعلق به دو گروه ۴ و ۱۴ یا دو گروه ۵ و ۱۵ باشند.

موقعیت فرضی عنصرهای X و D در جدول تناوبی می‌تواند به صورت زیر باشد:



$۳ = ۴ - ۱$: حالت اول
↓ ↘
A: گروه ۱ D و X: گروه‌های ۴ و ۱۴

حالت دوم: $5 - 2 = 3$
 A: ۲ گروه X و D: گروه‌های ۵ و ۱۵

اگر اتم‌های X و D ، متعلق به گروه‌های ۴ و ۱۴ باشند، مابین موقعیت این دو عنصر در جدول تناوبی، ۹ عنصر فلزی (V تا Ga)، اما اگر اتم‌های X و D متعلق به گروه‌های ۵ و ۱۵ باشند، مابین موقعیت این دو عنصر، ۸ عنصر فلزی (Cr تا Ga) و همچنین یک شبه‌فلز (Ge) وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینۀ (۱): مجموع عدد اتمی، دو عنصر در هر دو حالت، عددی زوج خواهد بود.

$$۵۴ = ۳۲ + ۲۲: \text{حالت اول گروه‌های } ۴ \text{ و } ۱۴$$

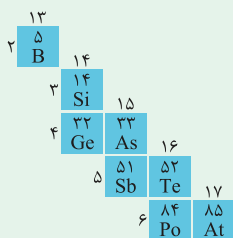
$$۲۳ + ۳۳ = ۵۶$$
 : حالت دوم گروه‌های ۵ و ۱۵

گزینه (۳): اگر A را عنصر ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ (از گروه ۲) در نظر بگیریم، اختلاف عدد اتمی آن با عنصر ${}_{22}^{48}\text{Ti}$ از گروه ۴، برابر با ۲ خواهد بود.

گزینه (۴): اگر D عنصری از دسته d جدول تناوبی باشد، به یقین متعلق به یکی از گروه‌های ۴ یا ۵ است. در این حالت عنصر X

به ترتیب متعلق به پیکه‌های ۱۴ یا ۱۵ می‌باشد که در هر دو گروه، اتم X یک عنصر شبه‌فلزی (^{33}As و ^{32}Ge) است.

موقعیت شبه‌فلزها در جدول دوره‌ای:



- در جدول دوره‌ای عناصرها، ۸ شبه‌فلز وجود دارد.
- این شبه‌فلزها همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند.
- در گروه‌های ۱۳ تا ۱۷ جدول جای دارند.
- یک شبه‌فلز در هر یک از گروه‌های ۱۳ و ۱۷ و همچنین دو شبه‌فلز در هر یک از گروه‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶ قرار دارد.
- شبه‌فلزها در همهٔ دوره‌های جدول تناوبی به‌جز دورهٔ اول (و همچنین دورهٔ هفتم که اطلاعاتی از شون نداریم!) وجود دارند.
- در هر یک از دوره‌های ۲ و ۳، یک شبه‌فلز و در هر یک از دوره‌های ۴، ۵ و ۶ دو شبه‌فلز حضور دارند.

اگر شمار الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر Y از دسته d جدول تناوبی، دو برابر شمار الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر X از دسته s باشد، کدام مورد درباره آن‌ها به یقین درست است؟ (Y ، در دوره چهارم جدول تناوبی جای دارد.)

(سوال ۸۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

- ۱) در واکنش X و Y با گاز کلر، به ترتیب، ۲ و ۴ مول الکترون مبادله می‌شود.
- ۲) حالت فیزیکی هر دو جامد است و واکنش‌پذیری X ، از واکنش‌پذیری Y بیشتر است.
- ۳) بالاترین عدد اکسایش اتم دو عنصر X و Y در ترکیب‌هایشان، به ترتیب برابر ۲ و ۴ است.
- ۴) اگر هر دو در دوره چهارم جدول تناوبی جای داشته باشند، تفاوت عدد اتمی آن‌ها، حداقل برابر ۲ است.

بر پایه واکنش داده شده، ۴۰ گرم کلسیم سولفات ناخالص بر اثر حرارت تجزیه می شود. اگر تفاوت جرم فراورده جامد با جرم گاز اکسیژن تولیدشده برابر ۸ گرم باشد، درصد خلوص نمونه اولیه کدام است؟ (معادله واکنش موازنه شود و $(O = 16, S = 32, Ca = 40 : g.mol^{-1})$)



۴۶ (۲)

۳۴ (۱)

۸۲ (۴)

۶۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



با توجه به این معادله، اگر ۲ مول یا $2 \times 136 = 272$ گرم $CaSO_4$ خالص مصرف شود، تفاوت جرم CaO و O_2 تولیدشده برابر با $80 = (2 \times 56) - 32$ گرم خواهد بود؛ پس اگر بخواهیم ۸ گرم تفاوت جرم داشته باشیم، باید $27/2$ گرم $CaSO_4$ خالص مصرف شود:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم خالص}}{\text{جرم ناخالص}} \times 100 = \frac{27/2}{40} \times 100 = 68\%$$

په جور دیگه

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{تفاوت جرم}}{(\text{جرم مولی} \times \text{ضریب} B) - (\text{جرم مولی} \times \text{ضریب} A)}$$

$$\Rightarrow \frac{40 \times \frac{x}{100}}{2 \times 136} = \frac{8}{(2 \times 56) - (1 \times 32)} \Rightarrow \frac{x}{5 \times 136} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = 68$$

فلز X را در صنعت مطابق واکنش زیر به دست می آورند. اگر از واکنش ۱۵ گرم فلز منیزیم با بازده ۶۲/۵ درصد، ۹/۳۷۵ گرم فلز X تولید شود، نسبت جرم مولی فلز X به ظرفیت آن (n) کدام است؟ ($Mg = 24 \text{ g.mol}^{-1}$)

(معادله موازنه شود.) $Mg + XCl_n \rightarrow X + MgCl_2$

۴۸ (۴)

۳۶ (۳)

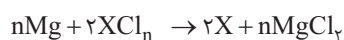
۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا معادله واکنش را موازنه می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



حالا اگر بین Mg و فلز X تناسب برقرار کنیم، نسبت جرم مولی (M) به ظرفیت فلز X (n) به دست می آید:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{15 \times \frac{62.5}{100}}{n \times 24} = \frac{9.375}{2 \times M} \Rightarrow \frac{M}{n} = \frac{24}{2} = 12$$

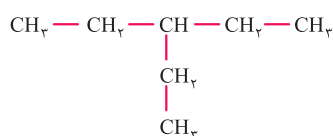
کدام مورد درست است؟

- (۱) ساده‌ترین آلکن، بخش عمده گاز شهری را تشکیل می‌دهد.
- (۲) حذف عدد از نام ترکیب‌های ۳-اتیل پنتان و ۳-اتیل هگزان، باعث نادرست شدن نام‌گذاری آن‌ها نمی‌شود.
- (۳) اگر یک مول از ترکیبی با فرمول $C_{24}H_{36}$ با ۵ مول برم مایع واکنش دهد، در ساختار آن سه حلقه کربنی وجود دارد.
- (۴) هر مول از هیدروکربنی با فرمول C_1H_8 ، فاقد پیوند سه‌گانه که دارای دو حلقه در ساختار خود می‌باشد، در واکنش با ۷ مول گاز هیدروژن به یک ترکیب حلقوی سیرشده تبدیل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

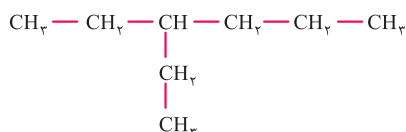
پاسخ خیلی تشریحی ✓

وقتی زنجیر اصلی ۵ یا ۶ کربنی است، شاخه فرعی اتیل راهی جز قرارگرفتن روی کربن شماره (۳) ندارد؛ پس می‌توانیم در نام‌گذاری این آلکان شاخه‌دار، به دلیل *تاب‌بودن*! شماره (۳) را ننویسیم.



۳-اتیل پنتان یا اتیل پنتان:

۳-اتیل هگزان یا اتیل هگزان:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): متان (CH_4) بخش عمده گاز شهری را تشکیل می‌دهد که ساده‌ترین آلکان است و نه ساده‌ترین آلکن!

گزینه (۳):

فرمول پیدا کردن شمار اتم‌های هیدروژن در یک هیدروکربن n کربنی:

$$\left(\begin{array}{c} \text{شمار اتم‌های هیدروژن} \\ \text{یک هیدروکربن n کربنی} \end{array} \right) = (2n + 2) - 2 \times (\text{تعداد پیوندهای دوگانه}) - (4 \times \text{تعداد پیوندهای سه‌گانه})$$

با توجه به فرمول، ترکیب مورد نظر در مجموع ۷ پیوند دوگانه (X) و حلقه (Y) دارد:

$$36 = 2(24) + 2 - 2(x + y) \Rightarrow (x + y) = 7$$

از آن‌جا که هر مول برم (Br_2) با یک پیوند دوگانه کربن - کربن واکنش می‌دهد، پس این ترکیب، ۲ حلقه در ساختار خود دارد.

$$x + y = 7 \Rightarrow 5 + y = 7 \Rightarrow y = 2$$

گزینه (۴): ترکیب مورد نظر (C_1H_8) نسبت به آلکان هم‌کربن خود (C_1H_{14})، ۱۴ اتم هیدروژن کم‌تر دارد که ۴ اتم هیدروژن آن به دلیل وجود دو حلقه است و ۱۰ اتم هیدروژن آن به دلیل وجود ۵ پیوند دوگانه در ساختار آن است، پس هر مول از آن با ۵ مول گاز هیدروژن به طور کامل واکنش می‌دهد:



از سوختن آلکان A در شرایط STP، گازهای CO و CO₂ با حجم برابر به همراه آب تولید می‌شود. اگر نسبت مجموع حجم این گازها به حجم اکسیژن مصرفی برابر ۷۵/۰ باشد، چند ایزومر ساختاری با فرمول شیمیایی A می‌توان یافت و در چه تعداد از این ایزومرها، فقط یک شاخه فرعی وجود دارد؟

$$۲ - ۷ (۲)$$

$$۳ - ۷ (۱)$$

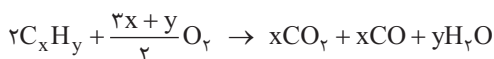
$$۲ - ۵ (۴)$$

$$۳ - ۵ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برابر بودن حجم دو گاز به این مفهوم است که شمار مول‌های آن‌ها با هم برابر است، و این یعنی، ضریب استوکیومتری گازهای CO و CO₂ در معادله موازنه‌شده واکنش با هم برابر است. اگر فرمول هیدروکربن را C_xH_y فرض کنیم، خواهیم داشت:



در دما و فشار یکسان، حجم گاز با شمار مول‌های آن برابر است.

$$\frac{\text{مجموع حجم گازهای CO}_2, \text{CO}}{\text{حجم O}_2 \text{ مصرفی}} = \frac{2x}{\frac{3x+y}{2}} = \frac{4x}{3x+y} \stackrel{75/0}{=} \frac{4x}{3x+y} = \frac{3}{4} \Rightarrow 16x = 9x + 3y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{7}{3} = \frac{14}{6}$$

ترکیب مورد نظر، آلکانی ۶ کربنه با فرمول مولکولی C₆H₁₄ می‌باشد.

برای محاسبه تعداد ایزومر آلکان‌هایی با ۴ تا ۷ اتم کربن می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد که در آن n، شمار اتم‌های کربن است.

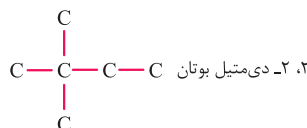
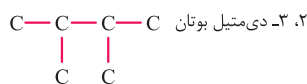
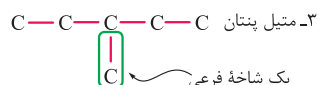
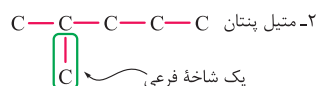
$$(4 \leq n \leq 7) \quad \text{تعداد ساختارهای متفاوت برای یک فرمول مولکولی (تعداد ایزومرها) در این آلکان‌ها} = 2^{n-4} + 1$$

$$C_4H_{10} : n = 4 \Rightarrow \text{تعداد ساختارها} = 2^{4-4} + 1 = 2^0 + 1 = 2$$

$$C_6H_{14} : n = 6 \Rightarrow \text{شمار ایزومرها} = 2^{6-4} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

مثال

این ترکیب دارای ۵ ایزومر است که دوتای آن، فقط یک شاخه فرعی دارد.



دو نمونه ماده با مشخصات زیر در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند. اگر دمای نهایی پس از تعادل گرمایی برابر با 50°C باشد، گرمای ویژه ماده Y بر حسب $\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$ کدام است؟

نمونه	جرم (g)	دمای اولیه ($^{\circ}\text{C}$)	گرمای ویژه ($\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$)
X	۲۰۰	۹۰	۰/۳
Y	۲۰۰	۳۰	؟

۰/۴ (۲)

۰/۲ (۱)

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

مسائل هم‌دمایی:

درسی Box

وقتی دو ماده با دمای متفاوت را در تماس با هم قرار می‌دهیم، ماده با دمای بالاتر گرما از دست می‌دهد و ماده با دمای پایین‌تر، همین مقدار گرما را جذب می‌کند تا جایی که به یک دما برسند. برای حل این‌گونه مسائل، با فرض عدم اتلاف گرما، کافی است مقدار گرمایی که یکی از مواد از دست می‌دهد را با مقدار گرمایی که ماده دیگر جذب می‌کند، برابر قرار دهیم:

$$|Q_A + Q_B + \dots| = |Q_C + Q_D + \dots|$$

موادی که گرما از دست می‌دهند
موادی که گرما می‌گیرند

در ضمن برای حل مسائل هم‌دمایی، زمانی که جرم یا گرمای ویژه یکی از مواد یا دمای تعادل، مجهول است، می‌توانید از رابطه زیر هم استفاده کنید:

$$\theta = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 + \dots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots} \quad (\theta \text{ دمای تعادل})$$

با توجه به جدول، نمونه X، مقداری گرما از دست می‌دهد و نمونه Y، همان مقدار گرما را دریافت می‌کند تا جایی که این دو نمونه هم‌دما بشوند. می‌دانیم که قدرمطلق گرمای این دو نمونه با هم برابر است:

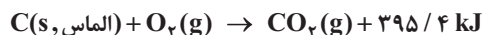
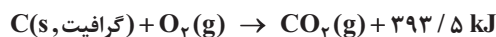
$$|Q_X| = |Q_Y| \Rightarrow |m_X c_X \Delta\theta_X| = |m_Y c_Y \Delta\theta_Y| \Rightarrow 200 \times 0.3 \times (90 - 50) = 200 \times c_Y (50 - 30) \Rightarrow 12 = 2c_Y \Rightarrow c_Y = 0.6$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به چور دیگه

$$\theta_{\text{تعادل}} = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \Rightarrow 50 = \frac{0.3 \times 90 + c_Y \times 30}{0.3 + c_Y} \Rightarrow 15 + 50c_Y = 27 + 30c_Y \Rightarrow c_Y = 0.6$$

با توجه به واکنش‌های ترموشیمیایی سوختن آلوتروپ‌های کربن، در تبدیل ۶۰ گرم گرافیت به الماس در شرایط مناسب، چند کیلوژول گرما مبادله می‌شود؟ ($C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)



۹ / ۱ (۲)

۹ / ۵ (۱)

۵ / ۹ (۴)

۱ / ۹ (۳)

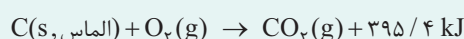
پاسخ: گزینه ۱

گرافیت و الماس:

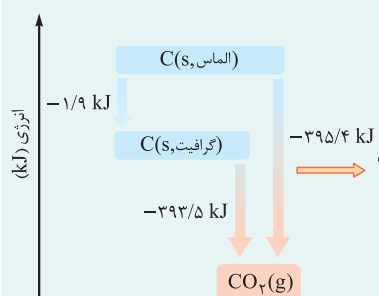
درس Box

به شکل‌های گوناگون مولکولی یا بلوری یک عنصر، آلوتروپ یا دگرشکل می‌گویند. کربن (C)، دارای چند آلوتروپ است که دوتاش قبلی معروف‌تر! الماس و گرافیت. شیوه اتصال اتم‌های کربن به یکدیگر در این دو آلوتروپ متفاوت است.

معادله واکنش سوختن کامل الماس و گرافیت به صورت مقابل است: $C(s, \text{گرافیت}) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 393/5 \text{ kJ}$



همان‌طور که می‌بینید از سوختن الماس، گرمای بیشتری آزاد می‌شود ($395/4 > 393/5$). از آن‌جا که فرآورده سوختن هر دو، $CO_2(g)$ است، تفاوت گرمای آزاد شده، فقط و فقط! به سطح انرژی خود واکنش‌دهنده‌ها یعنی الماس و گرافیت بستگی دارد. چون از سوختن الماس گرمای بیشتری آزاد شده است؛ پس باید سطح انرژی آن از گرافیت بالاتر باشد تا تفاوت سطح انرژی الماس با فرآورده حاصل از سوختن ($CO_2(g)$) بیشتر شود.

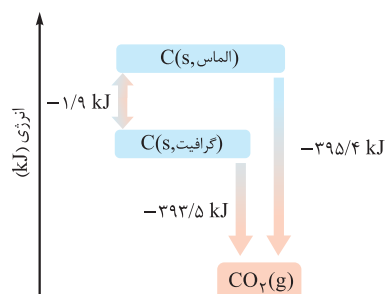


با توجه به نمودار مقابل، سطح انرژی الماس بالاتر از سطح انرژی گرافیت است، یعنی الماس ناپایدارتر از گرافیت می‌باشد. با توجه به نمودار، سطح انرژی یک مول گرافیت نسبت به یک مول الماس، به اندازه $1/9 \text{ kJ}$ (تفاوت بین $393/5$ و $395/4$) پایین‌تر است.

گرافیت < الماس: پایداری $\Rightarrow$ گرافیت > الماس: سطح انرژی

نمودار انرژی در سوختن الماس و گرافیت را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



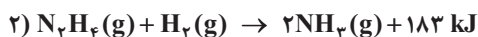
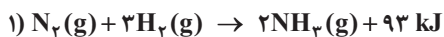
با توجه به نمودار، فرایند تبدیل گرافیت به الماس ($C(s, \text{گرافیت}) \rightarrow C(s, \text{الماس})$)، گرماگیر است؛ در ضمن تفاوت سطح انرژی یک مول از این دو ماده، $1/9 \text{ kJ}$ ($395/4 - 393/5 = 1/9$) است.

$$60 \text{ g C (گرافیت)} \times \frac{1 \text{ mol C (گرافیت)}}{12 \text{ g C (گرافیت)}} \times \frac{1/9 \text{ kJ}}{1 \text{ mol C (گرافیت)}} = 9/5 \text{ kJ}$$

از آن‌جا که این فرایند گرماگیر است، برای تبدیل ۶۰ گرم از گرافیت به الماس باید ۹/۵ کیلوژول گرما از محیط جذب شود.

با توجه به واکنش‌های زیر،

۱۳۳



اگر آنتالپی پیوند $\text{H}-\text{H}$ برابر با $436 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ و آنتالپی پیوند $\text{N} \equiv \text{N}$ برابر $945 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ باشد، کدام گزینه به عنوان میانگین آنتالپی پیوند $\text{N}-\text{N}$ برحسب کیلوژول بر مول، قابل قبول است؟

۴۰۱ (۴)

۵۲ (۳)

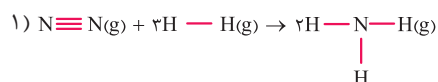
۲۸۹ (۲)

۱۶۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

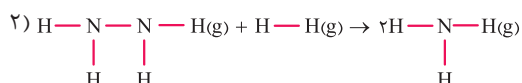
ابتدا از طریق واکنش (۱)، مقدار میانگین آنتالپی پیوند $\text{N}-\text{H}$ را به دست می‌آوریم:



[مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده] - [مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده] = $\Delta H_{\text{واکنش}}$

$$-93 = [945 + 2(436)] - 6\Delta H(\text{N}-\text{H}) \Rightarrow \Delta H(\text{N}-\text{H}) = +391 \text{ kJ}$$

حالا با استفاده از واکنش (۲)، میانگین آنتالپی پیوند $\text{N}-\text{N}$ را پیدا می‌کنیم:



$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\Delta H(\text{N}-\text{N}) + 4\Delta H(\text{N}-\text{H}) + \Delta H(\text{H}-\text{H})] - [6\Delta H(\text{N}-\text{H})]$$

$$-183 = [\Delta H(\text{N}-\text{N}) + 4(391)] - [2(782)] \Rightarrow \Delta H(\text{N}-\text{H}) = 163$$

هنگامی که می‌خواهید پیوندهای تکراری را از دو طرف معادله یک واکنش حذف کنید، *مواستون* به ضرایب استوکیومتری مواد هم باشه! مثلاً اگر این جا *مواستون* به ضریب ۲ در فراورده‌ها نباشد، ۳ پیوند $\text{N}-\text{H}$ را از دو طرف حذف می‌کنید و فکر می‌کنید در فراورده‌ها دیگر پیوندی وجود نداره و مقدار میانگین آنتالپی $\text{N}-\text{H}$ را اشتباه حساب می‌کنید.

نکته

کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) ΔH واکنش تشکیل متان از گرافیت و هیدروژن را نمی‌توان به روش تجربی تعیین کرد.
 (۲) فرایند فتوسنتز برخلاف فرایند انحلال کلسیم کلرید در آب، فرایندی گرماگیر است.
 (۳) انرژی حاصل از اکسایش یک گرم کربوهیدرات، کم‌تر از یک گرم چربی است.
 (۴) ارزش سوختی متان از متانول بیشتر، اما از اتن کم‌تر است.

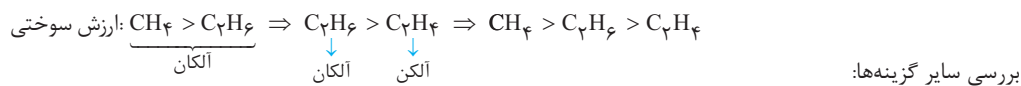
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای تحلیل گزینه (۴)، فکر نکنید که حتماً باید جدول کتاب درسی در مورد ΔH سوختن برخی از ترکیب‌های آلی را حفظ باشید! اول، به چند نکته خوب دقت کنید.

نکته

- (۱) مقایسه ارزش سوختی برخی از ترکیب‌های آلی با شمار کربن برابر:
 (۲) با افزایش جرم مولی (شمار اتم‌های کربن)، ارزش سوختی هیدروکربن‌ها (در هر خانواده) کاهش می‌یابد.
 درسته که ارزش سوختی متان (آلکان) از متانول (الکل) بیشتر است، اما *هواستون باشه* که گرمای حاصل از سوختن ۱ گرم از متان (CH_4) بیشتر از اتن (C_2H_4) نیز می‌باشد.



گزینه (۱): کاملاً درسته! به نگاهی به نکته زیر بیندازید.

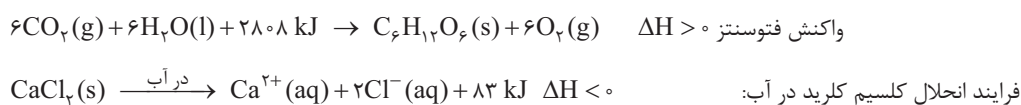
نکته

واکنش‌هایی که نمی‌توان ΔH آن‌ها را به روش تجربی اندازه‌گیری کرد.
 برخی از واکنش‌ها را نمی‌توان به سادگی در آزمایشگاه انجام داد. به عبارت دیگر ΔH آن‌ها را نمی‌توان به روش تجربی اندازه‌گیری کرد. کتاب درسی ۴ تا از این واکنش‌ها رو براتون آورده که شما باید بلدشون باشید!

(۱) واکنش تهیه گاز متان از گرافیت و گاز هیدروژن:
 $\text{C(s, گرافیت)} + 2\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{CH}_4(\text{g}) \quad , \quad \Delta H < 0$
توجه تأمین شرایط بهینه برای انجام این واکنش بسیار دشوار و پرهزینه است؛ بنابراین گاز متان را نمی‌توان به طور مستقیم از واکنش گرافیت و گاز هیدروژن در آزمایشگاه به دست آورد و برای تعیین ΔH این واکنش باید از واکنش‌های دیگر و قانون هس کمک گرفت.

(۲) واکنش تهیه هیدروژن پراکسید (H_2O_2) از گازهای هیدروژن و اکسیژن:
 $\text{H}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{H}_2\text{O}_2(\text{l}) \quad , \quad \Delta H < 0$
توجه نام تجاری هیدروژن پراکسید (H_2O_2)، آب اکسیژنه است. تهیه این ماده از واکنش مستقیم گازهای هیدروژن و اکسیژن در آزمایشگاه امکان‌پذیر نیست، زیرا از واکنش مستقیم این مواد، آب تولید می‌شود که از هیدروژن پراکسید پایدارتر است.
 (۳) واکنش سوختن ناقص گرافیت و تولید کربن مونوکسید:
 $2\text{C(s, گرافیت)} + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{CO(g)} \quad , \quad \Delta H < 0$
 (۴) واکنش تولید هیدرازین (N_2H_4) از گازهای نیتروژن و هیدروژن:
 $\text{N}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{N}_2\text{H}_4(\text{g}) \quad , \quad \Delta H > 0$

گزینه (۲): فتوسنتز فرایندی گرماگیر و انحلال کلسیم کلرید در آب، فرایندی گرماده می‌باشد.



گزینه (۳): از اکسایش یک گرم چربی، انرژی بیشتری نسبت به اکسایش یک گرم کربوهیدرات یا یک گرم پروتئین به بدن می‌رسد.

پروتئین = کربوهیدرات > چربی: ارزش سوختی (kJ.g^{-1})
 (۱۷) (۲۸)

در جدول زیر شرایط انجام چند واکنش آمده است. در این شرایط، سرعت کدام واکنش نسبت به بقیه پایین تر است؟

واکنش	شرایط انجام واکنش
۱ واکنش پتاسیم با آب	در دمای 10°C
۲ واکنش محلول‌های سدیم کلرید و نقره نیترات	در دمای اتاق
۳ واکنش اتن با گاز کلر	در حضور آهن (III) کلرید جامد
۴ واکنش پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی	در دمای 25°C

(۲) واکنش (۲)

(۱) واکنش (۱)

(۴) واکنش (۴)

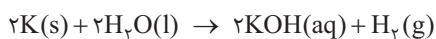
(۳) واکنش (۳)

پاسخ: گزینه ۴

محلول بنفش رنگ پتاسیم پرمنگنات (KMnO_4) با یک اسید آلی در دمای اتاق «به کندی» واکنش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): پتاسیم با آب سرد نیز «به شدت» واکنش می‌دهد:

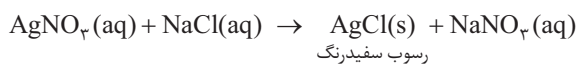


مقایسه واکنش پذیری و سرعت واکنش با آب در گروه‌های اول و دوم جدول تناوبی:

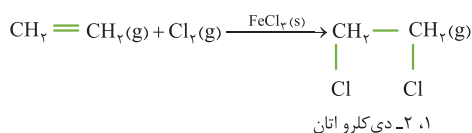
گروه اول: $\text{Li} < \text{Na} < \text{K} < \text{Rb} < \text{Cs}$ واکنش پذیری و سرعت واکنش با آب در گروه اول

گروه دوم: $\text{Be} < \text{Mg} < \text{Ca} < \text{Sr} < \text{Ba}$ واکنش پذیری و سرعت واکنش با آب در گروه دوم

گزینه (۲): این واکنش باعث تشکیل «سریع» رسوب سفید رنگ نقره کلرید (AgCl(s)) می‌شود.



گزینه (۳): در این واکنش، آهن (III) کلرید ($\text{FeCl}_3\text{(s)}$) نقش کاتالیزگر را دارد و سرعت واکنش را بالا می‌برد؛ پس این واکنش

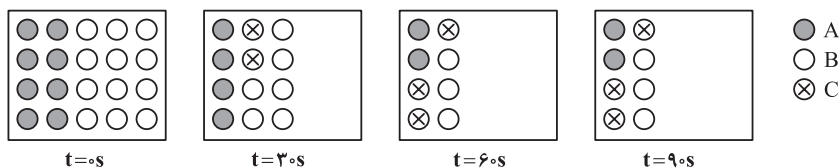


نیز در حضور کاتالیزگر، «سریع» است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

دو ماده A و B در دمای ثابت در یک ظرف ۵ لیتری وارد می‌شوند. اگر شکل زیر، تغییرات شمار مول مواد را در واکنش $A + B \rightarrow C$ ، در بازه‌های زمانی متفاوت نشان دهد، کدام مورد درست است؟ (هر ذره معادل 0.5 مول است).



(۱) اگر همه مواد، گازی باشند، رابطه $\frac{-\Delta[A]}{3\Delta t} = -\frac{\Delta[B]}{2\Delta t} = \frac{\Delta[C]}{\Delta t}$ برقرار است.

(۲) سرعت واکنش برابر با 0.2 مول بر لیتر بر دقیقه است.

(۳) غلظت فراورده در ثانیه 30 ام برابر 0.2 مولار است.

(۴) در معادله موازنه‌شده واکنش، مجموع ضرایب مواد برابر ۶ و با یکای ثابت، سرعت واکنش در 30 ثانیه اول با 30 ثانیه دوم برابر است.

پاسخ: گزینه ۲

تا ثانیه 30 ، دو ذره C تولید شده است؛ پس غلظت آن برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{مول حل شده}}{\text{حجم محلول}} = \frac{(2 \times 0.5) \text{ mol}}{5 \text{ L}} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با توجه به این که شمار ذره‌ها از ثانیه 60 به بعد تغییر نکرده است، نتیجه می‌گیریم که واکنش در زمان $t = 60 \text{ s}$ به اتمام رسیده است.

فب اول بریم سراغ معادله واکنش: در بازه زمانی $0-60$ ثانیه، شمار ذره‌های A و B به ترتیب از ۸ و ۱۲ به ۲ و ۳ رسیده‌اند؛ یعنی A، ۶ واحد و B، ۹ واحد تغییر کرده است. از طرفی شمار ذره‌های C از صفر به ۳ رسیده، یعنی ۳ واحد تغییر کرده است، پس معادله موازنه‌شده واکنش را می‌توان با توجه به کوچک‌ترین ضریب ممکن به صورت $2A + 3B \rightarrow C$ نشان داد؛ بنابراین با توجه به ضریب خواهیم داشت:

$$-\frac{\Delta[A]}{2\Delta t} = -\frac{\Delta[B]}{3\Delta t} = \frac{\Delta[C]}{\Delta t}$$

گزینه (۲): برای محاسبه سرعت واکنش، کافیست که سرعت C را محاسبه کنیم! زیرا ضریب استوکیومتری آن برابر ۱ و در نتیجه سرعت تولید آن با سرعت واکنش برابر است. واکنش در ثانیه 60 (۱ min) پایان یافته است:

$$\bar{R}_{\text{(واکنش)}} = \bar{R}_{(C)} \Rightarrow \bar{R}_{(C)} = \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{(3 \times 0.5) \text{ mol}}{1 \text{ min}} = 0.3 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

گزینه (۴): معادله موازنه شده واکنش به صورت $2A + 3B \rightarrow C$ و مجموع ضرایب استوکیومتری مواد برابر ۶ است، اما سرعت واکنش در دو بازه 0 تا 30 و 30 تا 60 با هم برابر نیست! چرا که در 30 ثانیه اول، ۴ ذره A و در 30 ثانیه دوم، ۲ ذره A مصرف می‌شود. کاملاً مشهوده که سرعت در این دو بازه زمانی، برابر نیست.

کدام گزینه درست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, F = 19, Cl = 35.5 : g.mol^{-1}$)

(۱) به تقریب ۴۲/۱ درصد جرم پلی‌وینیل کلرید را کلر تشکیل می‌دهد.

(۲) ویتامین D برخلاف ویتامین A یک ترکیب آروماتیک بوده و در ساختار مولکول هر دو ویتامین، گروه عاملی الکلی وجود دارد.

(۳) در مونومر تشکیل‌دهنده پلیمر سازنده سرنگ، شمار پیوندهای $C=C$ با شمار پیوندهای $C-C$ برابر است.

پلی‌پروپن

(۴) اختلاف جرم مولی مونومرهای تشکیل‌دهنده پتو و نخ دندان، برابر جرم مولی ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید است.

HCOOH

تفلون

پلی‌سیانواتن

پاسخ: گزینه ۳

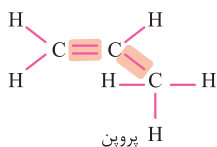
پاسخ خیلی تشریحی

نکته

برخی پلیمرهای ساختگی کتاب درسی:

نام و ساختار مونومر	نام و ساختار پلیمر	کاربرد
اتن	پلی‌اتن	کیسه پلاستیک، لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب یا بطری پلاستیکی
سیانو اتن	پلی‌سیانو اتن	پتو
پروپن	پلی‌پروپن	سرنگ
استیرن	پلی‌استیرن	به عنوان پلاستیک در صنعت بسته‌بندی مواد غذایی مانند ظروف یکبارمصرف
تترافلوئورو اتن	پلی‌تترافلوئورو اتن یا تفلون	ظروف نجسب، نخ دندان، کف‌اتو و نوارهای آب‌بندی لوله‌ها
وینیل کلرید (کلرو اتن)	پلی‌وینیل کلرید	کیسه خون

مونومر سازندهٔ سرنگ، پلی‌پروپن است که در ساختار آن، ۱ پیوند $C=C$ و ۱ پیوند $C-C$ وجود دارد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با توجه به فرمول واحد تکرار شوندهٔ پلی‌وینیل کلرید $(C_2H_3Cl)_n$ ، خواهیم داشت:

$$[2(12) + 3(1) + 35.5] \times n = 62.5n \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{درصد جرمی کلر در پلی‌وینیل کلرید} = \frac{\text{مقدار کلر موجود در پلی‌وینیل کلرید (برحسب گرم)}}{\text{جرم مولی پلی‌وینیل کلرید (برحسب گرم)}} \times 100 = \frac{35.5 \times n}{62.5n} \times 100 = 56.8\%$$

گزینه (۲): درسته که در ساختار هر دو ویتامین A و D، یک گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) وجود دارد، اما هر دو ویتامین، غیرآروماتیک‌اند.

ویتامین‌های بررسی‌شده در کتاب درسی:

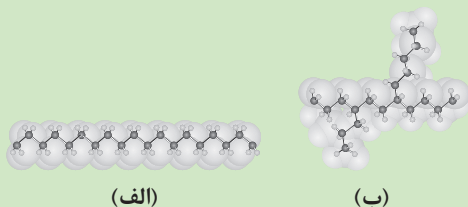


نام ویتامین	فرمول مولکولی	گروه‌های عاملی	حلال مناسب	برخی از منابع تأمین آن	آروماتیک یا غیرآروماتیک
آ (A)	$C_{20}H_{30}O$	۱ هیدروکسیل	چربی	هویج	غیرآروماتیک
ث (C)	$C_6H_8O_6$	۴ هیدروکسیل و ۱ استری	آب	مربکات مانند پرتقال	غیرآروماتیک
دی (D)	$C_{28}H_{44}O$	۱ هیدروکسیل	چربی	شیر	غیرآروماتیک
کا (K)	$C_{31}H_{46}O_2$	۲ کربونیل (کتونی)	چربی	کلم و کاهو	آروماتیک

گزینه (۴): مونومرهای سازندهٔ پتو و نخ دندان به ترتیب سیانو اتن (C_2H_3N) و تترافلوئورو اتن (C_2F_4) هستند. از طرفی متانوئیک اسید ($HCOOH$)، ساده‌ترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها می‌باشد:

$$\text{جرم مولی } HCOOH = 46 \text{ g} > 100 - 53 = 47 \text{ g} = \text{جرم مولی } C_2H_3N - \text{جرم مولی } C_2F_4$$

کدام گزینه در مورد دو نوع پلی اتیلن داده شده، درست است؟ ۱۲۸



- (۱) (الف) شفاف است و نسبت به (ب) استحکام کمتری دارد.
 (۲) واکنش تولید هر دو پلیمر با کاهش آنتالپی همراه است.
 (۳) چگالی (ب) کمتر از چگالی (الف) است، از این رو (ب) برخلاف (الف)، بر روی آب، شناور می ماند.
 (۴) ساختار مونومر سازنده دو پلیمر با یکدیگر تفاوت دارد.

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

مونومرهای اتن (C_2H_4) در شرایط گوناگون، با انجام واکنش پلیمری شدن، پلی اتن هایی با ساختار، جرم مولی میانگین و ویژگی های متفاوت پدید می آورند. جرم مولی میانگین پلی اتن های حاصل به مقدار کاتالیزگرهای واکنش مانند آلومینیم و تیتانیم بستگی دارد. واکنش پلیمری شدن اتن اینطور یاس:

$$nCH_2 = CH_2(g) \xrightarrow{\text{گرمای و فشار}} (CH_2 - CH_2)_n(s)$$

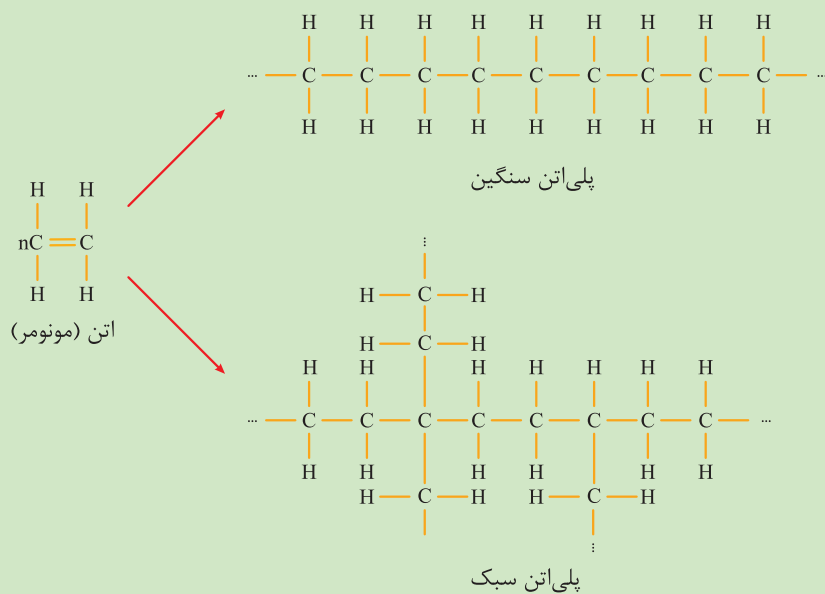
اتن پلی اتن

نوع پلی اتن	سبک	سنگین
ساختار	شاخه دار	بدون شاخه
فرمول مولکولی	$(C_2H_4)_n$	$(C_2H_4)_n$
نوع نیروی بین مولکولی	وان دروالسی	وان دروالسی
شفاف یا کدر بودن	شفاف	کدر
کاربرد	ساخت کیسه های پلاستیکی شفاف	ساخت لوله های پلاستیکی، دبه های آب، بطری کدر شیر و اسباب بازی
چگالی	0.92 g.cm^{-3}	0.97 g.cm^{-3}
سختی و استحکام، چگالی، نقطه ذوب و قدرت نیروهای بین مولکولی	پلی اتن سبک > پلی اتن سنگین	
نحوه اتصال مولکول های اتن	از کناره ها	پشت سر هم

در هر دو واکنش، مواد گازی (مونومرها) با انرژی بالاتر به ماده جامد (پلیمر) با انرژی کمتر و پایدارتر تبدیل شده است؛ بنابراین واکنش، گرماده بوده و آنتالپی آن کاهش می یابد.
 بررسی سایر گزینه ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه (۱): پلی اتن سنگین (الف)، کدر است و نسبت به پلی اتن سبک (ب)، استحکام بیشتری دارد.
 گزینه (۳): چگالی هر دو پلی اتن کمتر از 1 g.cm^{-3} است؛ بنابراین هر دو روی آب (با چگالی 1 g.cm^{-3}) شناور می ماند.
 گزینه (۴): اتن (C_2H_4) مونومر سازنده هر دو پلیمر است.



داده‌های تجربی نشان می‌دهند که چگالی پلی‌اتن‌های سبک و سنگین، برابر با ۰/۹۷ و ۰/۹۲ گرم بر سانتی‌متر مکعب است.

الف) کدام چگالی به کدام پلی اتن تعلق دارد؟ چرا؟

(ب) نیروی بین مولکولی در پلی اتن چیست؟

(پ) چرا استحکام پلی اتن سنگین از سبک بیشتر است؟

شمار اتم‌های هیدروژن، در فرمول مولکولی استری یک‌عاملی، غیر حلقوی و سیرشده برابر ۱۸ است. بر این اساس کدام مورد درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

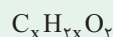


- (۱) جرم مولی کربوکسیلیک اسید و الکل سازنده آن می‌تواند برابر باشد.
- (۲) اگر کربوکسیلیک اسید سازنده، بیشترین جرم مولی ممکن را داشته باشد، شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اسید برابر ۲۳ است.
- (۳) اگر مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسید سازنده برابر ۱۷ باشد، الکل سازنده استر به هر نسبتی در آب حل می‌شود.
- (۴) اگر نسبت جرم مولی الکل سازنده به کربوکسیلیک اسید سازنده، بیشترین مقدار باشد، اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی آن‌ها برابر ۱۵ است.

پاسخ: گزینه ۱

استرها از واکنش الکل‌ها و اسیدها به دست می‌آیند. تعداد کربن استر تولیدشده با مجموع تعداد کربن‌های الکل و اسید اولیه برابر است:

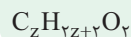
$$C_q \begin{cases} 1C + 1C \\ 2C + 1C \\ 3C + 1C \\ 4C + 1C \end{cases}$$



فرمول عمومی استرهای زنجیری سیرشده:



فرمول عمومی اسیدهای زنجیری سیرشده:



فرمول عمومی الکل‌های زنجیری سیرشده:

فرمول عمومی استرهای زنجیری سیرشده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است:

$2n = 18 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow$ فرمول استر $C_9H_{18}O_2$

با توجه به قانون پایستگی جرم، مجموع جرم الکل و اسید مصرف‌شده در واکنش با مجموع جرم استر و آب تولیدشده برابر است؛ جرم مولی استر و آب، برابر ۱۷۶ گرم بر مول است:

$$\text{جرم اسید} + \text{جرم الکل} = \text{جرم استر} + \text{جرم آب}$$

$$C_9H_{18}O_2 + H_2O = 158 + 18 = 176 \text{ g}$$

زمانی جرم مولی کربوکسیلیک اسید و الکل سازنده این استر برابر است که هر دو برابر با ۸۸ گرم بر مول باشد. با توجه به فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای خطی و سیرشده، خواهیم داشت:

کربوکسیلیک اسید سازنده: $C_nH_{2n}O_2 = 88 \Rightarrow 12n + 2n + 32 = 88 \Rightarrow n = 4$

الکل سازنده: $C_nH_{2n+2}O = 88 \Rightarrow 12n + 2n + 2 + 16 = 88 \Rightarrow n = 5$

پس کربوکسیلیک اسید ۴کربنه ($C_4H_8O_2$) و الکل ۵کربنه ($C_5H_{12}O$)، جرم مولی برابر با ۸۸ گرم بر مول دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲):

برای محاسبه شمار پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی (کووالانسی)} = \frac{(3 \times \text{تعداد اتم‌های N}) + (2 \times \text{تعداد اتم‌های O}) + (1 \times \text{تعداد اتم‌های H و هالوژن}) + (4 \times \text{تعداد اتم‌های C})}{2}$$

زمانی کربوکسیلیک اسید مورد نظر بیشترین جرم مولی را دارد که ۸کربنه باشد، در این صورت پیوندهای اشتراکی آن برابر است با:

$$C_8H_{16}O_2 \text{ در } \frac{(8 \times 4) + (16 \times 1) + (2 \times 2)}{2} = 26$$

گزینه (۳): با توجه به فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای سیرشده خطی، خواهیم داشت:

$C_nH_{2n}O_2 \text{ در } 17 = n + 2n + 2 \Rightarrow n = 5$



پاسخ خیلی تشریحی



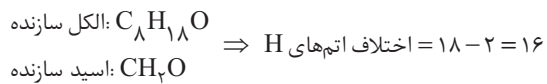
اگر اسید سازنده، ۵ اتم کربن داشته باشد، پس الکل سازنده استر مورد نظر، ۴ کربنه ($C_4H_{10}O$) است. الکل ۴ کربنه، انحلال پذیری مشخصی در آب دارد.

انحلال پذیری الکل های یک عاملی خطی سیر شده در آب:



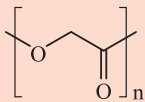
۱ تا ۳ اتم کربن: به هر نسبتی در آب حل می شود (نمی توان محلول سیر شده از آن ها تهیه کرد)
 ۴ تا ۵ اتم کربن: به خوبی در آب حل می شوند.
 ۶ تا ۸ کربن ← کم محلول
 ۹ تا بیشتر از آن ← نامحلول

گزینۀ (۴): برای این که نسبت جرم مولی ها بیشترین مقدار ممکن به دست آید، باید الکل، ۸ کربنه (صورت کسر، بزرگ تر) و اسید ۱ کربنه (مخرج کسر، کوچک تر) باشد.



۱۳۰ با توجه به شکل زیر که واحد تکرارشونده یک پلیمر را نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

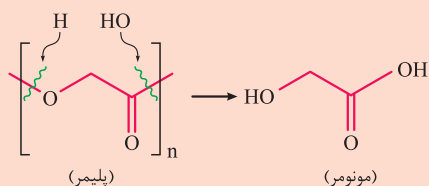


- (۱) اگر n برابر $30,000$ باشد، جرم مولی پلیمر برابر 228×10^4 گرم خواهد بود.
- (۲) اگر $n = 10^6$ باشد، ضریب استوکیومتری آب در معادله واکنش تولید پلیمر، به تقریب 10^6 است.
- (۳) این پلیمر جزء دسته پلی‌استرها بوده و از واکنش الکل دوعاملی و اسید دوعاملی به دست آمده است.
- (۴) تفاوت جرم مولی مونومر سازنده آن، با استیک اسید برابر 12 گرم است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ترکیب مورد نظر، گروه عاملی استری ($-C(=O)-O-$) وجود دارد، پس یک پلی‌استر است.



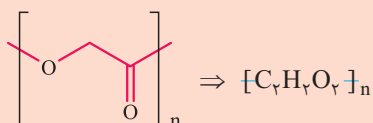
با توجه به این که مونومر آن هر دو گروه، هیدروکسیل ($-OH$) و کربوکسیل ($-COOH$) را در ساختار خود دارد، می‌تواند به تنهایی در واکنش پلیمری شدن شرکت کند. واکنش پلیمری شدن آن به صورت زیر است:



با توجه به این که مقدار n بسیار بزرگ است، ضریب استوکیومتری آب را می‌توان n در نظر گرفت و از 1 صرف نظر کرد. پس اگر $n = 10^6$ باشد، ضریب استوکیومتری آب تولیدشده برابر با 10^6 است.

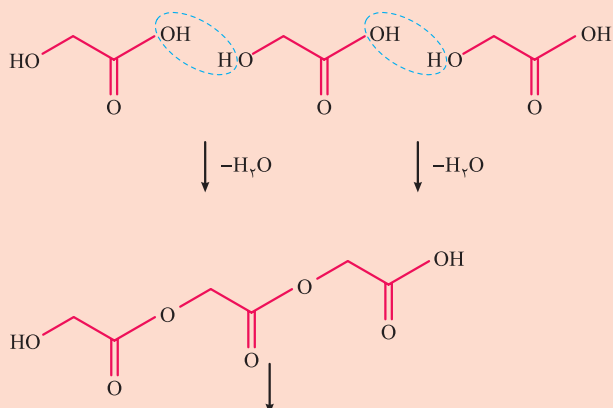
بررسی سایر گزینه‌ها:

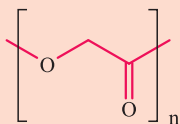
گزینه (۱): ابتدا فرمول واحد تکرارشونده را به دست می‌آوریم:



$$\text{جرم مولی پلیمر} = 30 \times 10^3 \times 58 = 174 \times 10^4 \Rightarrow \text{جرم مولی واحد تکرارشونده} \times n = \text{جرم مولی پلیمر}$$

گزینه (۳): گفتیم که مونومر سازنده این پلی‌استر به تنهایی هر دو گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) و کربوکسیل ($-COOH$) را در ساختار خود دارد. از کنار هم قرار گرفتن تعداد زیادی از این مونومر، پلی‌استر مورد نظر به وجود می‌آید. الگوی تشکیل این پلیمر به صورت زیر است:

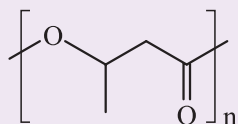




گزینۀ (۴): فرمول مولکولی مونومر سازندۀ پلیمر داده شده به صورت $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_3$ و فرمول مولکولی استیک اسید به صورت $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$ است؛ تفاوت جرم مولی این دو مولکول در جرم ۱ مول اکسیژن، یعنی ۱۶ گرم است.

با توجه به ساختار پلیمر داده شده، کدام مورد درست است؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16: \text{g.mol}^{-1}$)

(سوال ۹۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)



(۱) جرم مولی مونومر آن، دو برابر جرم مولی ساده ترین کربوکسیلیک اسید یک عاملی است.

(۲) مونومرهای سازندۀ واحد تکرارشونده پلیمر، یک الکل و یک استر است.

(۳) مجموع عدد اکسایش اتم های کربن در مونومر آن برابر ۳- است.

(۴) از مونومر آن در تهیه پلی استر می توان استفاده کرد.