

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله ششم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/مهر/۲۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره یک

پایه						
مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۱ (درس ۱) صفحه ۱ تا ۱۲	فصل ۱ (درس ۲ تا ۴) صفحه ۲۸ تا ۶۹
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۱ (درس ۱) صفحه ۲۱ تا ۲۹	—
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۱ (درس ۱) صفحه ۸ تا ۱۵	—
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: عادل حسینی - سجاد داوطلب - سامان سلامیان - میلاد منصوری حسین نادری - محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن زاده - سروش موئینی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب	مصطفی دیداری

سرپرست محتوای آزمون: فاطمه آقاچانیپور

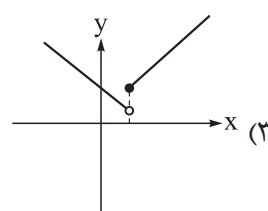
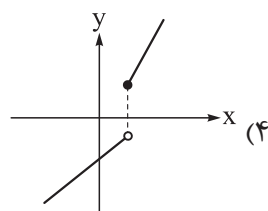
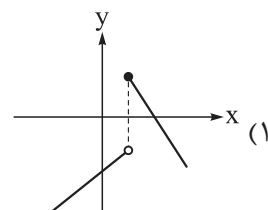
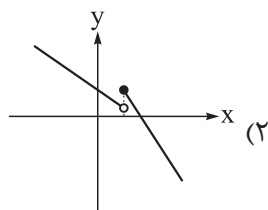
این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

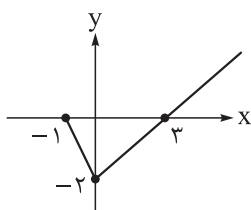
دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



۱- اگر $f(x) = 2x + |x|$ باشد، نمودار تابع $g(x) = \begin{cases} f(2x) & ; x \geq 1 \\ f(2-x) & ; x < 1 \end{cases}$ کدام است؟



۲- نمودار تابع $y = f(2x+1)$ به صورت زیر است. حدود a کدام باشد تا نمودار تابع $y = f(x) + a$ بالای محور x ها باشد؟



(۱) $a > 2$

(۲) $a \geq 2$

(۳) $a > 3$

(۴) $a \geq 3$

۳- نقطه $A(-1, 2)$ روی نمودار تابع $y = f(\frac{1}{4} - \frac{x}{4})$ قرار دارد. کدام نقطه روی نمودار تابع $g(x) = f(x) + f(2x-1)$ قرار دارد؟

(۱) $(1, 4)$

(۱) $(1, 2)$

(۲) $(1, 3)$

(۳) $(1, 6)$

۴- کمترین مقدار تابع $f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 18$ را با M و کمترین مقدار تابع

$g(x) = (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 20$ را با m نمایش می دهیم. حاصل $|M - m|$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) ۶

۵- تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. ابتدا نمودار این تابع را با ضریب $\frac{1}{4}$ در راستای محور x ها منقبض می کنیم، سپس آن

را ۲ واحد به سمت راست انتقال می دهیم. نمودار حاصل را $y = g(x)$ می نامیم. عرض نقطه تلاقی نمودار توابع f و g کدام است؟

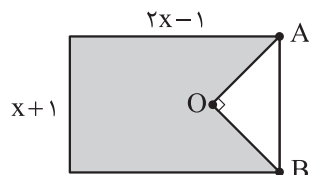
(۱) ۲

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۱

۶- در مستطیل شکل زیر، مثلث AOB قائم الزاویه متساوی الساقین است. اگر مساحت قسمت سایه خورده برابر ۱۶ باشد، محیط مستطیل کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۸

(۳) ۲۴

(۴) ۳۰

۷- اگر m و n جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $A = (3m + \frac{2}{n})(3n + \frac{2}{m})$ کدام است؟

(۴) ۳۶

(۳) ۲۸

(۲) ۴۴

(۱) ۳۲

۸- اختلاف جواب‌های معادله $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3} + 1 = 0$ کدام است؟

(۲) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$

(۱) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$

(۴) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$

(۳) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$

۹- حاصل ضرب دو عدد حقیقی از مجموع آن‌ها ۱۷ واحد بیشتر است. اگر اختلاف این دو عدد ۳ واحد باشد، نسبت آن‌ها کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $\frac{9}{5}$

(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{8}{3}$

(۱) $\frac{7}{3}$

۱۰- نمودار تابع $f(x) = (x-1)(x^2 - 2mx - m - 1)$ محور x ها را در ۳ نقطه قطع می‌کند. اگر مجموع مربعات طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور x ها برابر ۹ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای m کدام است؟

(۴) $\frac{9}{2}$

(۳) $\frac{7}{2}$

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

۱۱- اگر نقطه $A(2, k)$ رأس سهمی $f(x) = ax^2 - 2bx + a$ باشد، حاصل $\frac{f(5)}{f(-1)}$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) -۱

(۲) -۳

(۱) ۳

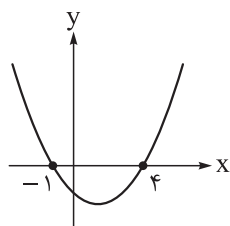
۱۲- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{c-3b}{a}$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۳



۱۳- اگر $(-2, 3)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که در آن سهمی $y = x^2 - ax - b$ پایین‌تر از خط $y = 2ax + 4b$ قرار می‌گیرد، حاصل ab کدام است؟

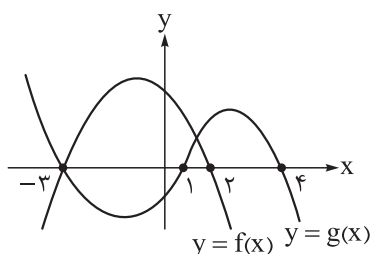
- (۱) $0/1$ (۲) $0/2$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

۱۴- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = (a+4)x^2 + (a-b+4)x - b$ به صورت زیر است. حاصل ab کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{Z})$

x	$-\infty$	$a+1$	-1	$+\infty$
$P(x)$	+	+	-	+

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۶

۱۵- اگر نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به صورت زیر باشند، مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{(x+1)g(x)}{f(x)} \leq 0$ شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶- با فرض $a+b \neq 0$ و $ab \neq 0$ ، معادله $\frac{1}{x+a+b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ دارای جواب‌های α و β است. حاصل $\alpha\beta$ کدام است؟

- (۱) ab (۲) ۱ (۳) a^2b^2 (۴) $ab(a+b)$

۱۷- اگر $x = a$ ، جواب معادله $\frac{x+1}{x+a} = \frac{x-2}{x+3}$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{9}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۷ (۳) ۸۶ (۴) ۷۰

۱۸- جواب معادله $\sqrt{8x+\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{x-2} + a$ در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف جواب‌های معادله درجه دوم برابر $\frac{7}{4}$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۴۰ (۳) ۴۶ (۴) ۵۶

۱۹- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی هستند. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $x < y$ (۲) $x = z$ (۳) $y > z$ (۴) $y = z$

۲۰- اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند، آن گاه حاصل $x - y$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۶ (۴) -۶

۲۱- ماتریس های A و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A + B$ ماتریسی اسکالر و مجموع درایه های ماتریس BA

برابر با ۱۸ باشد، آن گاه بزرگ ترین درایه ماتریس A کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۲- اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که $A^2 = A - I$ ، آن گاه ماتریس $I + A^{36}$ برابر با کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) $2I$ (۳) $A - I$ (۴) $I - A$

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه ماتریس $10B^2 - 8BAB + 2BA^2B$ برابر با کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $\bar{O}$ (۴) I

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0/2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه جزء صحیح مجموع درایه های ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۱۹ (۳) -۱۷ (۴) -۱۶

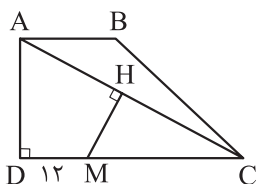
۲۵- دو نقطه متمایز P و Q را در صفحه در نظر بگیرید. اگر تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از P به فاصله ۳ و از Q به فاصله ۴ باشد، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای طول پاره خط PQ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۲۶- در مثلث قائم الزاویه ABC که در آن $\hat{A} = 90^\circ$ ، نقطه P واقع بر ضلع AB از وتر و رأس زاویه قائمه به یک فاصله است. اگر در این مثلث $\hat{B} = 4\hat{C}$ ، آن گاه زاویه حاده بین CP و ضلع AB چند درجه است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۷۲ (۳) ۷۵ (۴) $67/5$

۲۷- در دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ ، عمود منصف قطر AC ، قاعده CD را در نقطه M قطع کرده است. اگر $DM = ۱۲$ و $AD = \frac{1}{3}CD$ باشد، اندازه قطر AC کدام است؟



$$۱۸\sqrt{۳} \quad (۲) \quad ۳۶ \quad (۱)$$

$$۹\sqrt{۱۰} \quad (۴) \quad ۲۷ \quad (۳)$$

۲۸- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز خارجی زاویه C ، امتداد ضلع AB را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $BC = CD$ ، آن گاه زاویه BAC چند درجه است؟

$$۱۰۵ \quad (۴) \quad ۷۵ \quad (۳) \quad ۷۲ \quad (۲) \quad ۱۰۸ \quad (۱)$$

۲۹- از هر رأس مثلث ABC ، خطی موازی با ضلع مقابل به همان رأس رسم می‌کنیم. از تقاطع این سه خط، مثلث MNP تشکیل می‌شود، کدام گزینه درست است؟

- (۱) ارتفاع‌های مثلث MNP ، عمود منصف‌های مثلث ABC هستند.
- (۲) ارتفاع‌های مثلث MNP ، نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ABC هستند.
- (۳) ارتفاع‌های مثلث ABC ، عمود منصف‌های مثلث MNP هستند.
- (۴) ارتفاع‌های مثلث ABC ، میانه‌های مثلث MNP هستند.

۳۰- طول اضلاع یک مثلث n ، $n-۱$ و $n^۲-۱$ است. حدود مقادیر n کدام است؟

$$۱ < n < \sqrt{۳} \quad (۲) \quad n > \sqrt{۲} \quad (۱)$$

$$\sqrt{۲} < n < ۲ \quad (۴) \quad ۱ < n < \sqrt{۲} \quad (۳)$$

۳۱- کدام گزاره فاقد مثال نقض است؟

(۱) حاصل ضرب یک عدد گویا در معکوس یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۲) اگر عدد k برابر با حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن گاه $\sqrt{4k+1} \in \mathbb{N}$.

(۳) اگر برای سه مجموعه A ، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ ؛ آن گاه $B = C$.

(۴) میانگین ۵ عدد فرد برابر با عدد وسطی است.

۳۲- مجموعه S برابر با اعداد طبیعی یک‌رقمی بوده و $n \in S$. اگر عدد $\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$ زوج باشد، آن گاه $n \in A$.

مجموعه A چند عضو دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۳- α و β دو عدد گنگ و $\alpha + \beta$ ، عددی گویا است. کدام گزینه در مورد اعداد $\alpha - \beta$ و $\alpha\beta$ به ترتیب درست است؟

(۱) گنگ - گنگ

(۲) گنگ - ممکن است گنگ یا گویا باشد.

(۳) ممکن است گنگ یا گویا باشد. - گنگ

(۴) ممکن است گنگ یا گویا باشد. - ممکن است گنگ یا گویا باشد.

۳۴- میانگین اعداد صحیح a_1 ، a_2 و a_3 با میانگین اعداد صحیح b_1 ، b_2 و b_3 برابر است. با استفاده از روش

می‌توان ثابت کرد که عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ همواره عددی است.

(۱) برهان خلف - زوج (۲) برهان خلف - فرد (۳) اثبات مستقیم - زوج (۴) اثبات بازگشتی - فرد

۳۵- برای اثبات درستی رابطه $6x^2 + 5y^2 \geq 2x + 8yx - 1$ به روش بازگشتی، به کدام نامساوی همواره درست می‌رسیم؟

(۱) $(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (2y - x)^2 \geq 0$ (۲) $(x - 2y)^2 + (x + 1)^2 + (2y - x)^2 \geq 0$

(۳) $(x - 1)^2 + (x - 2y)^2 + (2x - y)^2 \geq 0$ (۴) $(x - 1)^2 + (x - 2y)^2 + (2y - x)^2 \geq 0$

۳۶- p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه است. ارزش گزاره‌های $(p \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

و $\sim p \Leftrightarrow (q \vee r)$ به ترتیب چگونه است؟

(۱) $F - T$ (۲) $T - F$ (۳) T - مانند r (۴) T - مانند $\sim r$

۳۷- گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ، نادرست است. گزاره $((p \Rightarrow s) \wedge (q \vee s)) \Rightarrow r$ ، هم‌ارز کدام گزاره است؟

(۱) s (۲) $\sim s$ (۳) $r \Rightarrow s$ (۴) $s \Rightarrow p$

۳۸- عکس نقیض گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ به کدام صورت است؟

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \quad (۲) \quad (p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \quad (۱)$$

$$(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \quad (۴) \quad (p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \quad (۳)$$

۳۹- p و q گزاره‌های دلخواهی هستند. گزاره $[p \vee (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \vee (p \Leftrightarrow \sim q)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

$$p \vee q \quad (۴) \quad p \wedge q \quad (۳) \quad \sim p \wedge q \quad (۲) \quad \sim p \vee \sim q \quad (۱)$$

۴۰- نقیض گزاره «برخی از مقادیر گویا، با جذر خودشان برابر هستند.» به کدام صورت است؟

$$\forall x \in Q'; x \neq \sqrt{x} \quad (۲) \quad \exists x \in Q; x \neq \sqrt{x} \quad (۱)$$

$$\exists x \in Q; (x > \sqrt{x}) \wedge (x < \sqrt{x}) \quad (۴) \quad \forall x \in Q; (x > \sqrt{x}) \vee (x < \sqrt{x}) \quad (۳)$$

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله ششم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/مهر/۲۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره دو

پایه							مواد امتحانی
دهم	یازدهم	دوازدهم	مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	
فصل ۱ و ۲ صفحه ۱ تا ۵۲	—	فصل ۱ (تا ابتدای حرکت با شتاب ثابت) صفحه ۱ تا ۱۵	۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
فصل ۱ (تا ابتدای تبدیل اتمها به یونها) صفحه ۱ تا ۳۸	—	فصل ۱ (تا ابتدای ثابت تعادل و قدرت اسیدی) صفحه ۱ تا ۲۰	۳۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
—	—	—	۷۵ دقیقه	۶۵ سؤال	—	—	مجموع

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی محمدکاظم منشادی - محمدرضا باری کارشناس علمی: امین امینی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: مهدی براتی - یاسر راش - یلدا رزاقزاده - یاسر عبداللهی - وحید فارسیان محمد مرادی - مرتضی نصیرزاده کارشناس علمی: مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللهی

سرپرست محتوای آزمون: فاطمه آقاچانیپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمونهای خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤالها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینهها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



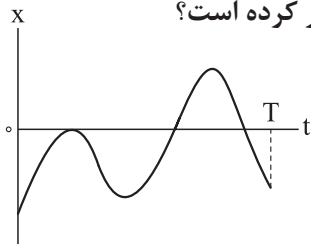
۴۱- متحرکی با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = 3 \text{ s}$ و $t_2 = 12 \text{ s}$ به ترتیب از

مکان‌های $x_1 = 15 \text{ m}$ و $x_2 = -12 \text{ m}$ عبور می‌کند. بردار مکان اولیه متحرک بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $21\vec{i}$ (۲) $-21\vec{i}$ (۳) $24\vec{i}$ (۴) $-24\vec{i}$

۴۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا T ،

جهت حرکت متحرک و جهت بردار مکان آن، به ترتیب از راست به چپ، چند مرتبه تغییر کرده است؟



(۱) ۲، ۳

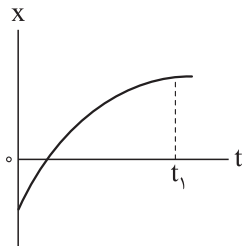
(۲) ۳، ۳

(۳) ۲، ۲

(۴) ۳، ۲

۴۳- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا t_1 چه

تعداد از موارد زیر درباره این متحرک درست است؟



(الف) اندازه بردار مکان متحرک، به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

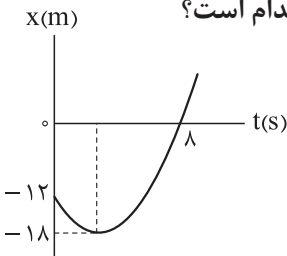
(ب) تندی متحرک به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

(پ) شتاب متحرک، پیوسته در جهت محور x است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۴۴- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی ای که بردار

مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، سرعت متوسط متحرک بر حسب متر بر ثانیه کدام است؟



(۱) $1/5\vec{i}$

(۲) $-1/5\vec{i}$

(۳) $3\vec{i}$

(۴) $-3\vec{i}$

۴۵- معادله سرعت - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = t^2 - 4t + 5$ است. شتاب

متوسط این متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که سرعت آن به $\vec{v} = (1 \text{ m/s})\vec{i}$ می‌رسد، بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

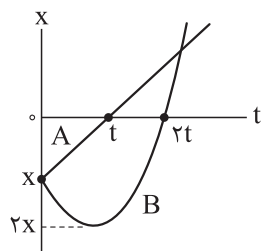
- (۱) $4\vec{i}$ (۲) $-4\vec{i}$ (۳) $2\vec{i}$ (۴) $-2\vec{i}$

۴۶- شتاب متوسط متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در ۲ ثانیه چهارم برابر $(-5 \text{ m/s}^2)\vec{i}$ و در ۶ ثانیه

دوم برابر $(3 \text{ m/s}^2)\vec{i}$ است. شتاب متوسط این متحرک در ۴ ثانیه سوم برابر چند متر بر مربع ثانیه است؟

- (۱) $2\vec{i}$ (۲) $-2\vec{i}$ (۳) $7\vec{i}$ (۴) $-7\vec{i}$

۴۷- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. کدام مقایسه درباره تندی متوسط (s_{av}) و اندازه سرعت متوسط (v_{av}) این دو متحرک در بازه زمانی که هر متحرک از مکان اولیه اش به مبدأ مکان می رسد، درست است؟



$$(1) v_{avA} > v_{avB}, s_{avA} > s_{avB}$$

$$(2) v_{avA} < v_{avB}, s_{avA} > s_{avB}$$

$$(3) v_{avA} > v_{avB}, s_{avA} < s_{avB}$$

$$(4) v_{avA} < v_{avB}, s_{avA} < s_{avB}$$

۴۸- معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = -3t^2 + 12t + 10$ است. در لحظه t_1 جهت حرکت متحرک تغییر می کند. در لحظه t_2 متحرک از مکان اولیه خود عبور می کند. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 چند متر بر ثانیه است؟

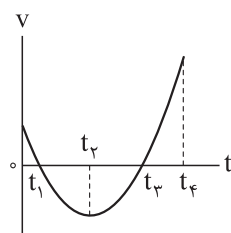
$$(4) 12$$

$$(3) 9$$

$$(2) 6$$

$$(1) 3$$

۴۹- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر، قسمتی از یک سهمی است. کدام یک از عبارتهای زیر درباره این متحرک درست است؟



(الف) بزرگی شتاب متحرک در لحظه های t_1 و t_3 برابر است.

(ب) در بازه زمانی ۰ تا t_2 ، شتاب متحرک پیوسته در جهت حرکت آن است.

(پ) در بازه زمانی ۰ تا t_4 ، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر کرده است.

(ت) در بازه زمانی t_2 تا t_4 تندی متحرک به طور پیوسته افزایش می یابد.

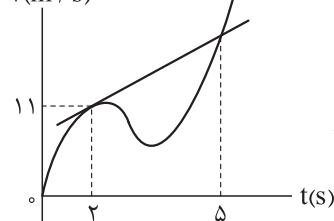
$$(4) \text{ ب - ت}$$

$$(3) \text{ الف - پ}$$

$$(2) \text{ پ - ت}$$

$$(1) \text{ الف - ب}$$

v(m/s)



۵۰- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل مقابل است.

اگر اندازه شتاب متحرک در لحظه $t = 2 \text{ s}$ برابر با 3 m/s^2 باشد، اندازه شتاب

متوسط متحرک در ۵ ثانیه اول چند متر بر مربع ثانیه است؟ (خط مماس بر نمودار

در لحظه $t = 2 \text{ s}$ رسم شده است.)

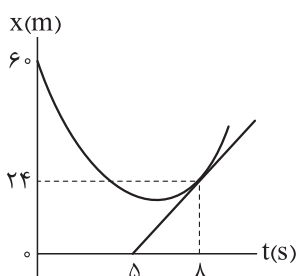
$$(2) 3$$

$$(1) 1$$

$$(4) 5$$

$$(3) 4$$

۵۱- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول، ۲۵ درصد کم تر از تندی متحرک در لحظه $t = 8 \text{ s}$ باشد، کم ترین فاصله متحرک از مبدأ مکان چند متر است؟ (خط مماس بر نمودار در لحظه $t = 8 \text{ s}$ رسم شده است.)



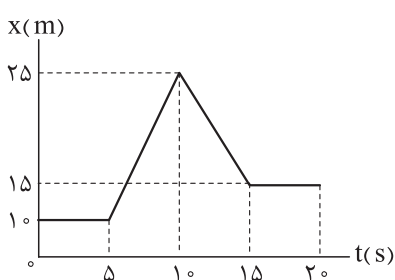
(۱) ۱۲

(۲) ۱۶

(۳) ۱۸

(۴) ۲۰

۵۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در بازه



$t_1 = 7 \text{ s}$ تا $t_2 = 12 \text{ s}$ چند متر بر مربع ثانیه است؟

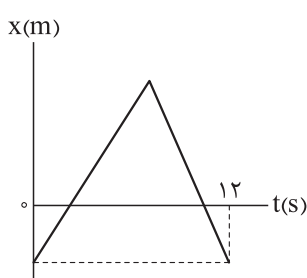
 (۱) $2 \hat{i}$

 (۲) $-2 \hat{i}$

 (۳) $\hat{i}$

 (۴) $-\hat{i}$

۵۳- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در بازه ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، تندی متوسط متحرک برابر 6 m/s باشد، بیشینه فاصله متحرک از مکان اولیه اش چند



متر است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۳۶

(۳) ۴۸

(۴) ۷۲

۵۴- خودرویی با تندی ثابت v بدون تغییر جهت، در مسیری مستقیم حرکت می کند و فاصله بین دو نقطه A و B را در مدت 40 min طی می کند. اگر خودرو در همین مسیر با تندی ثابت $v + 10 \text{ km/h}$ حرکت کند، فاصله بین این دو نقطه را در مدت 30 min طی خواهد کرد. فاصله دو نقطه A و B چند کیلومتر است؟

(۴) ۳۰

(۳) ۲۵

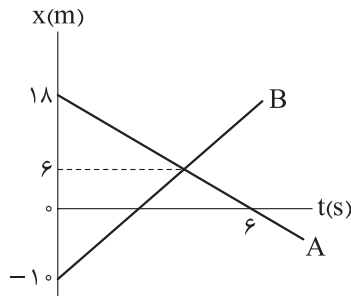
(۲) ۲۰

(۱) ۱۵

۵۵- دو متحرک A و B روی محور x در فاصله معینی از هم قرار دارند. اگر دو متحرک به ترتیب با تندی‌های ثابت v_A و v_B در یک جهت حرکت کنند، پس از ۱۲ s، و اگر با همان تندی‌ها به سمت یکدیگر حرکت کنند، پس از ۸ s به هم می‌رسند. v_A چند برابر v_B است؟ ($v_A > v_B$)

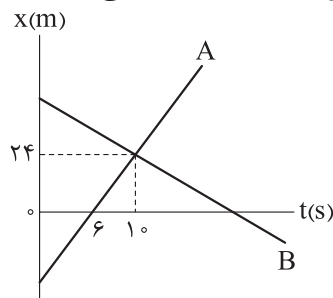
- ۱/۵ (۱) ۲/۵ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴)

۵۶- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در این حرکت، چند ثانیه، فاصله دو متحرک کم‌تر از ۷ m یا مساوی آن است؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۴ (۳)
۵ (۴)

۵۷- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر فاصله دو متحرک در مبدأ زمان برابر ۱۰۰ m باشد، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، جهت بردار مکان متحرک B تغییر می‌کند؟



- ۱۵ (۱)
۱۶ (۲)
۱۸ (۳)
۲۰ (۴)

۵۸- روی دو ریل مستقیم و موازی، دو قطار A و B به ترتیب با تندی‌های ثابت 50 km/h و 40 km/h به سمت یکدیگر حرکت می‌کند. طول دو قطار به ترتیب ۲۰۰ m و ۳۰۰ m و فاصله جلوی آن‌ها در مبدأ زمان برابر با ۴۰۰ m است. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، دو قطار به طور کامل از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟

- ۱۰ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۳۶ (۴)

۵۹- خودرویی از شهر A به شهر B رفته و بلافاصله از همان مسیر به شهر A برمی‌گردد. اگر تندی متوسط خودرو در مسیر رفت برابر 60 km/h و در مسیر برگشت برابر 40 km/h باشد، تندی متوسط خودرو در کل مسیر رفت و برگشت چند کیلومتر بر ساعت است؟

- ۴۵ (۱) ۴۸ (۲) ۵۰ (۳) ۵۴ (۴)

۶۰- متحرکی روی محیط دایره‌ای به شعاع 12 m در حال حرکت است. اگر در یک بازه زمانی 4 ثانیه‌ای، اندازه سرعت متوسط متحرک برابر 6 m/s باشد، در این بازه زمانی، تندی متوسط متحرک بر حسب متر بر ثانیه کدام می‌تواند باشد؟

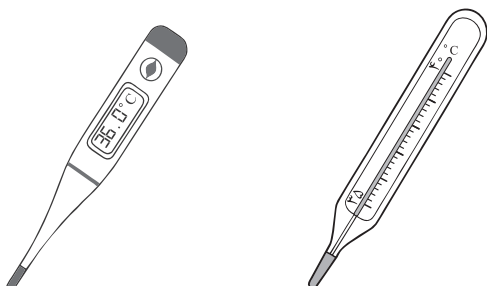
$$15\pi \text{ (۴)}$$

$$12\pi \text{ (۳)}$$

$$6\pi \text{ (۲)}$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ (۱)}$$

۶۱- در شکل زیر دو تپ‌سنج مدرج و رقمی نشان داده شده است. دقت اندازه‌گیری این دو تپ‌سنج به ترتیب از راست به چپ، چند درجه سلسیوس است؟



$$0.2, 0.1 \text{ (۱)}$$

$$0.1, 0.2 \text{ (۲)}$$

$$0.2, 0.1 \text{ (۳)}$$

$$1, 0.2 \text{ (۴)}$$

۶۲- هر میکروقرن، تقریباً چند دقیقه است؟

$$87/6 \text{ (۴)}$$

$$52/6 \text{ (۳)}$$

$$8/76 \text{ (۲)}$$

$$5/26 \text{ (۱)}$$

۶۳- چگالی نوترون تقریباً برابر $69\text{ } \mu\text{g/nm}^3$ است. چگالی نوترون در SI و بر حسب نمادگذاری علمی کدام است؟

$$69 \times 10^{16} \text{ (۴)}$$

$$69 \times 10^{13} \text{ (۳)}$$

$$6/9 \times 10^{17} \text{ (۲)}$$

$$6/9 \times 10^{15} \text{ (۱)}$$

۶۴- یک لوله استوانه‌ای توخالی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $b = 1/2 a$ و طول $L = 20a$

از ماده‌ای با چگالی $\rho = \frac{16}{\pi} \text{ g/cm}^3$ ساخته شده است. اگر جرم این لوله $m = 2/2 \text{ kg}$ باشد، a چند سانتی‌متر است؟

$$6 \text{ (۴)}$$

$$5 \text{ (۳)}$$

$$3 \text{ (۲)}$$

$$2/5 \text{ (۱)}$$

۶۵- چگالی مایع A از چگالی مایع B، ۲۵ درصد بیشتر است. اگر در مخلوطی از این دو مایع، حجم مایع A، ۳ برابر حجم

مایع B باشد، چگالی مخلوط چند درصد کم‌تر از چگالی مایع A است؟ (در اثر مخلوط شدن، حجم کل مایع‌ها ثابت می‌ماند.)

$$10 \text{ (۴)}$$

$$7/5 \text{ (۳)}$$

$$6/25 \text{ (۲)}$$

$$5 \text{ (۱)}$$

۶۶- کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۱) فاصله ذرات سازنده مایع از فاصله ذرات سازنده جامد همواره بیشتر است.

(۲) وقتی مایعی به آهستگی سرد می‌شود، اغلب جامد بی‌شکل تشکیل می‌شود.

(۳) پدیده پخش در گازها سریع‌تر از مایع‌ها رخ می‌دهد.

(۴) پلاسما، حالت چهارم ماده است که اغلب در دماهای خیلی پایین به وجود می‌آید.

۶۷- قطره‌های روغن از دهانه یک قطره‌چکان در حال خارج شدن هستند. اگر دمای روغن افزایش یابد، نیروی هم‌چسبی مولکول‌های روغن و اندازه قطره‌های روغن خارج شده از قطره‌چکان، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟

- (۱) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد. (۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
(۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد. (۴) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۶۸- قاعده مخروط توپری به ارتفاع 30 cm روی سطح افقی قرار دارد. اگر چگالی مخروط 2 g/cm^3 باشد، فشار حاصل از آن در محل تماس با سطح افقی چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) $2/0$ (۲) 2 (۳) $6/0$ (۴) 6

۶۹- اگر چگالی آب دریا 1 g/cm^3 باشد، فشار در عمق چند متری دریا برابر 5 MPa است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و فشار هوای محیط 1 bar است.)

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 40 (۴) 50

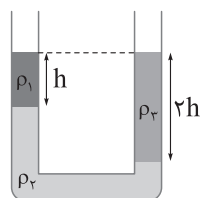
۷۰- در ظرفی استوانه‌ای به مساحت مقطع 400 cm^2 ، مخلوطی از 4 kg الکل و 6 kg آب ریخته شده است. فشار پیمانه‌ای در کف این ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، $\rho_{\text{آب}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ، $\rho_{\text{الکل}} = 800 \text{ kg/m}^3$)

- (۱) $5/2$ (۲) 25 (۳) $3/2$ (۴) 23

۷۱- چگالی متوسط هوا تا ارتفاع 2 کیلومتری از سطح دریای آزاد 1.01 kg/m^3 است. اگر فشار هوا در سطح دریای آزاد 101.3 kPa باشد، فشار هوا در شهری به ارتفاع 2 km از سطح دریای آزاد چند پاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

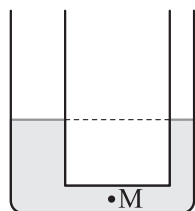
- (۱) 71000 (۲) 81100 (۳) 121500 (۴) 131600

۷۲- در شکل زیر، سه مایع مخلوط نشده با چگالی‌های ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 3\rho_1$ باشد، نسبت $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ چه قدر است؟



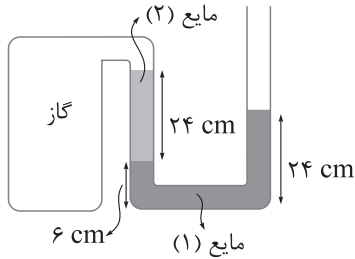
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۷۳- چگالی مایع درون لوله شکل زیر، برابر 4 g/cm^3 است. سطح مقطع شاخه سمت چپ لوله 20 cm^2 و سطح مقطع شاخه سمت راست آن 10 cm^2 است. چند کیلوگرم آب در شاخه سمت چپ بریزیم تا فشار نقطه M ، 5 kPa افزایش یابد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) $5/0$ (۲) $75/0$ (۳) 1 (۴) $1/5$

۷۴- در شکل زیر، چگالی مایع‌های (۱) و (۲) به ترتیب $6/8 \text{ g/cm}^3$ و $5/1 \text{ g/cm}^3$ است. فشار پیمانه‌ای گاز درون مخزن چند سانتی‌متر جیوه است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و $\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \text{ g/cm}^3$)



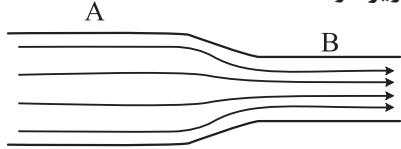
(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۵/۰

(۴) صفر

۷۵- در شکل زیر، شاره تراکم‌ناپذیری که تمام حجم لوله را پر کرده است، در راستای افقی جاری است و شعاع مقطع لوله در قسمت A دو برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است. کدامیک از موارد زیر درست است؟



الف) فشار شاره در قسمت A بیشتر از فشار شاره در قسمت B است.

ب) تندی شاره در قسمت B، ۲ برابر تندی شاره در قسمت A است.

پ) آهنگ شارش شاره در قسمت B، ۴ برابر آهنگ شارش شاره در قسمت A است.

(۲) الف - پ

(۱) الف

(۴) ب - پ

(۳) ب

۷۶- با توجه به فرمول ترکیب‌های داده‌شده، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- ۱) $C_{18}H_{35}O_2K$
- ۲) CH_3CH_2COOH
- ۳) $C_{51}H_{92}O_6$
- ۴) $CO(NH_2)_2$

الف) ترکیب (۲)، سومین عضو خانواده‌ی اسیدهای چرب محسوب می‌شود.
 ب) ترکیب (۴) مانند اتیلن گلیکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.
 پ) ترکیب (۱) همانند ترکیبی با فرمول CH_3COONH_4 ، خاصیت پاک‌کنندگی دارد و حالت فیزیکی دو ترکیب در دمای اتاق یکسان است.
 ت) ترکیب (۳) را می‌توان یک استر سه‌عاملی در نظر گرفت که زنجیرهای هیدروکربنی در آن، سیرنشده هستند.
 (۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) ب - ت (۴) پ - ت

۷۷- کدام مورد درست است؟

۱) بیماری واگیردار وبا امروزه به لطف صابون و شوینده‌ها، دیگر برای جوامع انسانی تهدید محسوب نمی‌شود.
 ۲) آهنگ رشد شاخص امید به زندگی در نواحی برخوردار بیشتر از نواحی کم‌برخوردار است.
 ۳) سدیم کلرید همانند اتانول، مولکول‌های قطبی دارد و در آب حل می‌شود.
 ۴) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اوره کم‌تر از اتیلن گلیکول است.
 ۷۸- از میان دو نمونه‌ی صابون سدیم (I) و صابون پتاسیم (II) که زنجیر هیدروکربنی در آن‌ها یکسان است، کدام صابون نقطه‌ی ذوب بالاتری دارد و تفاوت جرم مولی صابون دیگر با اسید چرب سازنده‌ی آن، چند گرم است؟
 ($H = 1, Na = 23, K = 39 : g.mol^{-1}$)

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (۱) صابون II - ۲۳ | (۲) صابون I - ۳۸ |
| (۳) صابون I - ۳۹ | (۴) صابون II - ۲۲ |

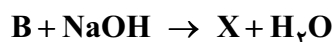
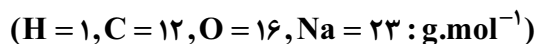
۷۹- با توجه به فرمول همگانی پاک‌کننده‌های صابونی جامد، کدام موارد زیر درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

الف) اگر بخش آب‌گریز آن، سیر شده و دارای ۱۶ اتم کربن باشد، فرمول آنیون این صابون $C_{16}H_{33}O_2^-$ است.
 ب) قسمت‌های Na^+ و $-COO^-$ در این ترکیب، بخش‌های آب‌دوست و زنجیر بلند هیدروکربنی (R) بخش آب‌گریز هستند.
 پ) اگر بخش چربی‌دوست آن دارای ۱۷ اتم کربن و ۲ پیوند دوگانه باشد، جرم مولی صابون ۲۵ / ۱ برابر جرم مولی گلوکز است.
 ت) اگر گروه آلکیل با ۳۱ اتم هیدروژن داشته باشد، درصد جرمی کربن در صابون به تقریب ۳ / ۸ برابر درصد جرمی یون فلزی است.

- | | |
|-------------|-------------|
| (۱) الف - ب | (۲) ب - ت |
| (۳) پ - ت | (۴) الف - پ |

۸۰- با توجه به واکنش‌های زیر که مراحل تولید یک نوع صابون را نشان می‌دهند، کدام مورد دربارهٔ A، B، X و نادرست است؟
(ترکیب X، زنجیره‌ای، دارای ۱۷ اتم کربن و جرم یک مول از آن برابر ۲۹۰ گرم است.)



- (۱) در ساختار مولکول B، دو پیوند دوگانه وجود دارد.
- (۲) شمار پیوندهای C—O در ساختار مولکول A برابر ۶ است.
- (۳) شمار الکترون‌های ناپیوندی در ساختار A، سه برابر شمار این الکترون‌ها در ساختار X است.
- (۴) ترکیب A یک استر بلندزنجیر بوده و در دمای اتاق، مایع است.

۸۱- کدام مورد درست است؟

- (۱) کلوئیدها، مخلوط‌هایی ناپایدارند و از توده‌های مولکولی تشکیل شده‌اند.
- (۲) آب دریا، نوشیدنی‌ها، انواع رنگ‌ها، شوینده‌ها و داروها، همگی مخلوط‌هایی همگن با خواص متفاوت هستند.
- (۳) رفتار سوسپانسیون‌ها را می‌توان رفتاری بین کلوئیدها و محلول‌ها در نظر گرفت.
- (۴) مسیر نور از میان مخلوط آب، روغن و صابون مشخص است.

۸۲- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) در فرایند پاک‌کردن چربی از روی پارچه، هر چه میزان برهم‌کنش بین مولکول‌های چربی و پارچه بیشتر باشد، چربی راحت‌تر از پارچه پاک می‌شود.
- (۲) در آب سخت برخلاف آب معمولی، یون‌های منیزیم و کلسیم وجود دارد.
- (۳) در فرایند پاک‌کنندگی با صابون، اگر لباس از جنس نخ و دما $30^{\circ}C$ باشد، درصد لکهٔ چربی باقی‌مانده کم‌تر از زمانی خواهد بود که لباس از جنس پلی‌استر و دما $40^{\circ}C$ باشد.
- (۴) از صابون‌های کلردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

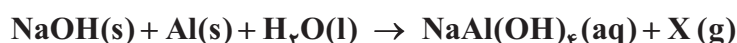
۸۳- کدام مورد، نادرست است؟

- (۱) احساس لیزی هنگام تماس پوست دست با محلول بازی، به دلیل تشکیل صابون است.
- (۲) اسید معده، همان اسیدی است که به جوهرنمک نیز معروف است.
- (۳) همهٔ اکسیدهای نافلزی با حل‌شدن در آب، pH آب را کاهش می‌دهند.
- (۴) اگر کاغذ pH با فراوردهٔ آلی حاصل از واکنش پتاسیم هیدروکسید با اسید چرب تماس پیدا کند، به رنگ آبی درمی‌آید.

۸۴- اگر مجموع شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی یک پاک‌کننده صابونی جامد و اتم‌های هیدروژن حلقه بنزنی در یک پاک‌کننده غیرصابونی، برابر ۳۵ باشد و هر دو دارای تعداد کربن برابر در زنجیر هیدروکربنی سیرشده خود باشند، کدام مورد درباره آن‌ها درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23, S = 32 : g.mol^{-1}$)

- (۱) جرم مولی پاک‌کننده صابونی، برابر با جرم مولی بخش ناقطبی پاک‌کننده غیرصابونی است.
- (۲) اگر به جای گروه آلکیل متصل به حلقه بنزنی در پاک‌کننده غیرصابونی، گروه آلکیل ۷ کربنی جایگزین کنیم، جرم مولی پاک‌کننده صابونی و غیرصابونی، برابر می‌شود.
- (۳) تفاوت مجموع شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی این دو پاک‌کننده، برابر ۱۴ است.
- (۴) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده غیرصابونی، دو برابر این شمار در پاک‌کننده صابونی است.

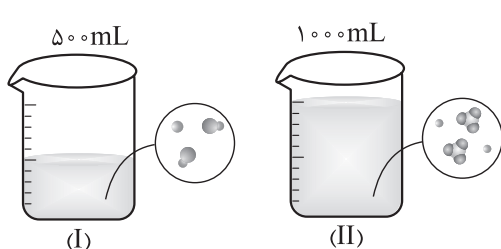
۸۵- با توجه به معادله واکنش سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم با آب، کدام مورد، نادرست است؟ ($Al = 27 g.mol^{-1}$)



- (۱) از این پاک‌کننده می‌توان برای باز کردن لوله‌هایی که در اثر تجمع چربی بسته شده‌اند، استفاده کرد.
- (۲) علامت ΔH واکنش، منفی است و مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در آن پس از موازنه برابر ۱۵ است.
- (۳) گاز تولیدشده در فرآورده‌ها، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.
- (۴) به ازای مصرف ۲/۷ گرم آلومینیم، ۱۵/۰ مول گاز اکسیژن تولید می‌شود.

۸۶- کدام مورد درست است؟

- (۱) پیش از شناخت ساختار اسیدها و بازها توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با ویژگی‌های این مواد آشنا نبودند.
 - (۲) مولکول CH_3CH_2OH به دلیل داشتن گروه OH در ساختار خود، باز آرنیوس محسوب می‌شود.
 - (۳) برای کاهش pH خاک، می‌توان به آن آهک (کلسیم اکسید) اضافه کرد.
 - (۴) ملاک مقایسه قدرت دو اسید در شرایط یکسان، میزان $[H_3O^+]$ در محلول آبی آن‌ها است.
- ۸۷- با توجه به شکل‌های زیر که از حل شدن دی‌نیتروژن پنتاکسید و باریم اکسید در آب به دست آمده‌اند، کدام موارد درست است؟ (هر ذره نشان داده شده معادل ۰/۱ مول است، $N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)



الف) غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (I)، دو برابر غلظت مولار یون نیترات در محلول (II) است.

ب) با افزودن ۱/۰۸ گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید جامد به محلول آن، می‌توان غلظت مولار یون هیدرونیوم در محلول را دو برابر کرد.

پ) هر دو محلول، رسانایی الکتریکی بیشتری از محلول هیدروبرمیک اسید ۱/۰ مولار دارند.

ت) کاغذ pH در محلول‌های (I) و (II) به ترتیب به رنگ سرخ و آبی درمی‌آید.

- (۱) پ - ت (۲) الف - ت (۳) الف - ب (۴) ب - پ

۸۸- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) حرکت یون‌ها به سوی قطب‌های همنام خود در مدار الکتریکی، علت رسانایی محلول‌های الکترولیت، مانند NaCl(aq) می‌باشد.

ب) در بین مواد «گرافیت، NaCl(s) و $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6\text{(aq)}$ »، هیچ رسانای یونی وجود ندارد.

پ) کربوکسیلیک اسیدها با آزاد کردن هیدروژن‌های متصل به کربن در ساختارشان، خاصیت اسیدی در محلول ایجاد می‌کنند.

ت) مواد مولکولی، می‌توانند غیرالکترولیت، الکترولیت ضعیف و یا الکترولیت قوی باشند.

(۱) الف - ب

(۲) ب - ت

(۳) الف - پ

(۴) ب - پ

۸۹- شکل زیر غلظت نسبی اجزای یک محلول اسیدی به حجم 25 L را نشان می‌دهد. کدام مطلب، درست است؟

(۱) درصد یونش اسید، برابر 20% است.

(۲) اگر غلظت یون هیدرونیوم پس از یونش $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ باشد، شمار مولکول‌های HA

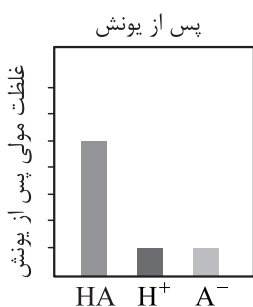
پیش از یونش، برابر $10^{-2} \times 612 / 3$ است.

(۳) شمار یون‌های حاصل از انحلال 6% مول HA در آب، با شمار یون‌های حاصل از

واکنش 1% مول لیتیم اکسید با آب برابر است.

(۴) با افزودن آب به محلول، غلظت مولار محلول و در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم در آن

افزایش می‌یابد.



۹۰- کدام مورد نادرست است؟

(۱) فرایند تبدیل یک ترکیب مولکولی به یون‌ها در آب، تنها در مورد اسیدها صدق می‌کند.

(۲) بخش عمده‌ای از گونه‌های موجود در سرکه، به شکل مولکول‌های یونیده نشده دیده می‌شوند.

(۳) رسانایی الکتریکی بالا در یک محلول اسیدی، دلیلی بر غلظت بالای یون‌های آب پوشیده است.

(۴) در شرایط معین، غلظت همه گونه‌های موجود در محلول هیدروفلوئوریک اسید، همانند دیگر اسیدهای ضعیف ثابت است.

۹۱- x گرم از یک کربوکسیلیک اسید تک‌ظرفیتی ۵ کربنه با زنجیر هیدروکربنی سیر شده را به ۱۲ لیتر آب اضافه می‌کنیم.

اگر تعداد یون‌های هیدرونیوم حاصل برابر $10^{-2} \times 72 / 16$ و درجه یونش اسید، برابر 50% باشد، x کدام است؟

(از تغییر حجم آب صرف نظر کنید، $\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) $612 / 0$

(۲) $686 / 4$

(۳) $720 / 0$

(۴) $734 / 4$

۹۲- در محلولی از اسید HA با غلظت ۱/۰ مولار، غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم، ۴ برابر غلظت مولی مولکول‌های یونیده‌نشده است. درصد یونش اسید در محلول کدام است و اگر در دمای ثابت، غلظت محلول را به صورتی تغییر دهیم که درجه یونش محلول نصف شود، نسبت غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده اسید به غلظت یون‌های هیدرونیوم در محلول نهایی کدام است؟

(۱) ۴۰ - ۱/۵ (۲) ۸۰ - ۱/۵ (۳) ۴۰ - ۲/۵ (۴) ۸۰ - ۲/۵

۹۳- کدام مورد به یقین درست است؟

- (۱) مطابق مدل آرنیوس، اسید ماده‌ای است که در ساختار آن، اتم هیدروژن وجود دارد.
- (۲) اسیدهایی که انحلال پذیری زیادی در آب دارند، جزء اسیدهای قوی دسته‌بندی می‌شوند.
- (۳) اسیدهای تک‌پروتون‌دار، اسیدهایی هستند که در ساختار آن‌ها، تنها یک اتم هیدروژن وجود دارد.
- (۴) در اسیدهای ضعیف تک‌پروتون‌دار همانند اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، غلظت مولی آنیون حاصل از یونش با غلظت مولی یون هیدرونیوم برابر است.

۹۴- اگر اتم‌های X_{m-1}^{m+1} و X_{m+2}^m ، ایزوتوپ یکدیگر باشند، عنصر X به کدام گروه جدول دوره‌ای تعلق دارد و تفاوت شمار نوترون‌های این ایزوتوپ‌ها کدام است؟

(۱) ۱۴ - ۲ (۲) ۱۶ - ۳ (۳) ۱۴ - ۳ (۴) ۱۶ - ۲

۹۵- کدام مورد درست است؟

- (۱) مشتری یک سیاره گازی است و در بین عنصرهای سازنده آن، عنصری که در شرایط معمولی زمین به حالت جامد باشد، وجود ندارد.
- (۲) تهیه شناسنامه فیزیکی و شیمیایی سیاره‌های مشتری، زحل، مریخ و اورانوس، جزء مأموریت‌های فضاپیماهای وویجر بود.
- (۳) آهن و هیدروژن به ترتیب فراوان‌ترین عنصرهای سازنده سیاره‌های زمین و مشتری هستند که درصد فراوانی بالای ۵۰٪ در این سیاره‌ها دارند.
- (۴) با انجام واکنش‌های هسته‌ای درون ستاره‌ها، عنصرهای سبک‌تر به عنصرهای سنگین‌تر تبدیل می‌شوند.

۹۶- نمونه‌ای فرضی از هیدروژن حاوی ایزوتوپ‌های طبیعی آن را در نظر بگیرید. اگر درصد فراوانی سبک‌ترین ایزوتوپ در این نمونه، ۸۰٪ و جرم اتمی میانگین هیدروژن، ۱/۲۱ amu باشد، درصد فراوانی سنگین‌ترین ایزوتوپ در نمونه کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۱

۹۷- کدام مورد درباره تکنسیم (${}^{99}_{43}\text{Tc}$) و اورانیم (${}^{235}_{92}\text{U}$)، نادرست است؟

- (۱) تکنسیم به دسته d و اورانیم به دسته f جدول دوره‌ای تعلق دارد.
- (۲) تکنسیم، نخستین عنصر ساخت بشر و اورانیم، شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزا است.
- (۳) هر دو رادیوایزوتوپ بوده و نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها در هسته آن‌ها، بیشتر از ۱/۵ است.
- (۴) تکنسیم در جدول دوره‌ای با ${}^{55}_{25}\text{Mn}$ هم‌گروه و با ${}^{85}_{37}\text{Rb}$ هم‌دوره است.

۹۸- دو قطعه جداگانه از فلزهای آلومینیم و آهن را در اختیار داریم. اگر مجموع جرم این دو قطعه برابر ۶۸۵ گرم و شمار اتم‌های آلومینیم سه برابر شمار اتم‌های آهن باشد، مجموع حجم این دو قطعه چند سانتی متر مکعب است؟

چگالی (g.cm^{-3})	جرمی مولی (g.mol^{-1})	فلز
۸ / ۰	۵۶	آهن
۲ / ۷	۲۷	آلومینیم

۵۵۵ (۴)

۳۶۵ (۳)

۱۸۵ (۲)

۱۵۵ (۱)

۹۹- کدام مورد درست است؟

- (۱) تعداد خطوط طیف نشری خطی عنصرها در گستره مرئی، با عدد اتمی آن‌ها رابطه مستقیم دارد.
- (۲) پرتوهای منتشرشده از کنترل تلویزیون همانند نور نشرشده از شمع، انرژی بیشتری از پرتوهای سبزرنگ و طول موج کوتاه‌تری از آن‌ها دارند.

- (۳) براساس مدل کوانتومی اتم، علت منحصربه‌فرد بودن طیف نشری خطی عنصرها، با تفاوت عدد اتمی آن‌ها توجیه می‌گردد.
- (۴) در نمایش امواج پرتوهای الکترومغناطیسی، فاصله بین هر دو قله متوالی در پرتوهای گاما به مراتب بیشتر از امواج رادیویی است.

۱۰۰- کدام مطلب در رابطه با ساختار لایه‌ای اتم، نادرست است؟

- (۱) همانند مدل اتمی بور می‌تواند طیف نشری خطی عنصر هیدروژن را توجیه کند.
 - (۲) مطابق آن، دادوستد انرژی هنگام انتقال الکترون از یک لایه به لایه دیگر، کوانتومی است.
 - (۳) براساس آن، الکترون وقت خود را تنها می‌تواند در فاصله معینی از هسته سپری کند.
 - (۴) در هر یک از لایه‌های الکترونی آن با عدد کوانتومی اصلی برابر n ، حداکثر $2n^2$ الکترون جای می‌گیرد.
- ۱۰۱- طول موج پرتو نشرشده مربوط به انتقال الکترونی $n = 1 \rightarrow n = 2$ در اتم هیدروژن با طول موج پرتو نشرشده مربوط به انتقال الکترونی $n = 4 \rightarrow n = 5$ ، است و انتقال، در ناحیه مرئی قرار

(۱) برابر - یکی از این دو - نمی‌گیرد

(۲) نابرابر - هر دو - نمی‌گیرند

(۳) برابر - هر دو - می‌گیرند

(۴) نابرابر - یکی از این دو - نمی‌گیرد

۱۰۲- اتم X دارای ۵ الکترون با $l = 2$ در آرایش الکترونی خود است. کدام گزینه می‌تواند نسبت شمار الکترون‌های ظرفیتی به شمار الکترون‌هایی با $l = 0$ در آن را به درستی نشان دهد؟

 $\frac{5}{6}$ (۴)

 $\frac{7}{8}$ (۳)

 $\frac{6}{8}$ (۲)

 $\frac{7}{6}$ (۱)

۱۰۳- با توجه به آرایش الکترونی فشرده عناصر زیر، کدام مطلب، نادرست است؟

عنصر	X	D	A
آرایش الکترونی فشرده	$[Ar]3d^1 4s^2 4p^6$	$[He]2s^2$	$[Ne]3s^2 3p^3$

(۱) اتم D فاقد زیرلایه‌هایی با $n + 1$ یکسان در آرایش الکترونی خود است.

(۲) تعداد الکترون‌ها با $n + 1 \geq 4$ در اتم X برابر ۲۴ است.

(۳) تعداد الکترون‌هایی با $l = 1$ و $n = 2$ در اتم A، کمتر از تعداد الکترون‌های ظرفیتی آن است.

(۴) تفاوت عدد اتمی عنصرهای X و D، برابر با شمار ذرات زیراتمی باردار در اتم ${}^{32}_{16}M$ است.

۱۰۴- کدام مورد دربارهٔ چهار گاز نجیب نخست جدول دوره‌ای، درست است؟

(۱) همهٔ لایه‌های الکترونی اشغال‌شدهٔ اتم آن‌ها به طور کامل پر است.

(۲) واکنش‌پذیری ناچیزی داشته و همگی به دستهٔ p جدول تعلق دارند.

(۳) همهٔ عنصرهای هم‌دورهٔ این گازها می‌توانند با از دست دادن، گرفتن و یا به اشتراک گذاشتن الکترون به آرایش یکی از آن‌ها برسند.

(۴) در آرایش الکترون - نقطه‌ای همهٔ آن‌ها، الکترون تک (جفت‌نشده) وجود ندارد.

۱۰۵- اگر شمار الکترون‌های موجود در آخرین زیرلایهٔ اشغال‌شده در اتم دو عنصر دورهٔ سوم جدول تناوبی برابر باشد،

کدام مورد درست است؟

(۱) شمار الکترون‌های جفت‌نشده در آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم این دو عنصر، می‌تواند برابر باشد.

(۲) شمار الکترون‌های ظرفیتی یکی از این عناصر، با شمار الکترون‌های ظرفیتی Cr برابر است.

(۳) عدد اتمی یکی از عنصرها، می‌تواند برابر با مجموع عدد اتمی چهار عنصر ابتدایی دورهٔ دوم باشد.

(۴) مجموع مقدار $n + 1$ برای الکترون‌های ظرفیتی اتم یکی از این عناصر، می‌تواند با عدد اتمی آن برابر باشد.



پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

داندود رایگان تمام آزمون های آزمایشی

در کانال تلگرام ما :

آزمونها آزمایشتی

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

سازمان پژوهش و آموزش کشور

سند

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

آکا

زبختار

خدیجه
آزمون

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم چی

آزمونهای سراسری
گاج



join us ...

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله ششم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/مهر/۲۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	عادل حسینی - سجاد داوطلب - سامان سلامیان - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - کیوان دارایی - عطا صادقی
فیزیک	یاشار انگوتی - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی - محمدکاظم منشادی - محمدرضا یاری
شیمی	مهدی براتی - یاسر راش - یلدا رزاق زاده - یاسر عبداللہی - وحید فارسیان - محمد مرادی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	فرشاد حسن زاده سروش موئینی	محمد مهدی حسینی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	سید عباس حسینی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	علیرضا کاظمی بقا	امیرحسین ابومحبوب	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	امین امینی مسعود خندانی	امین امینی	پوریا علاقه مند مریم گلی حسنلو امیر محمودی انزلی محمدرضا یاری
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	یلدا رزاق زاده	مرتضی نصیرزاده	صدرا عبادی مهدیس محبت پناه

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاچانپور

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

شروع مجدد دوازدهم از مهر

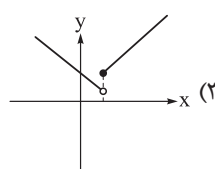
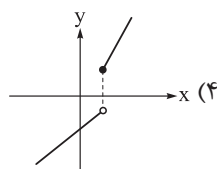
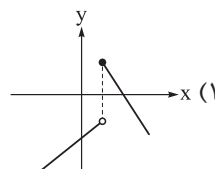
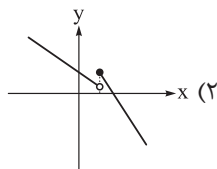


آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی الهه صفری - زهرا صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر - مهرآسا قدیری نادره نازآوری - ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی



۱ اگر $f(x) = 2x + |x|$ باشد، نمودار تابع $g(x) = \begin{cases} f(2x) & ; x \geq 1 \\ f(2-x) & ; x < 1 \end{cases}$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ۳

Hint

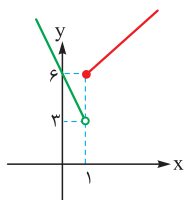
ضابطه تابع $g(x)$ رو با توجه به تعریف تابع $f(x)$ در دو بازه $x \geq 1$ و $x < 1$ به صورت دوضابطه‌ای بنویس. بعد قدم‌مطلق‌ها رو هم تعیین علامت کن تا نمودار مشخص بشه.

گام اول: ابتدا ضابطه تابع g با توجه به ضابطه تابع f را تشکیل می‌دهیم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$g(x) = \begin{cases} 2(2x) + |2x| & ; x \geq 1 \\ 2(2-x) + |2-x| & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 4x + |2x| & ; x \geq 1 \\ 4 - 2x + |2-x| & ; x < 1 \end{cases}$$

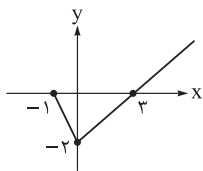
گام دوم: حال به کمک محدوده x علامت قدم‌مطلق‌ها را مشخص کرده و ضابطه تابع g را بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} 4x + 2x & ; x \geq 1 \\ 4 - 2x + 2 - x & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 6x & ; x \geq 1 \\ -3x + 6 & ; x < 1 \end{cases}$$



در نتیجه نمودار تابع g به صورت مقابل است.

نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ به صورت زیر است. حدود a کدام باشد تا نمودار تابع $y = f(x) + a$ بالای محور x ها باشد؟



(۱) $a > 2$

(۲) $a \geq 2$

(۳) $a > 3$

(۴) $a \geq 3$

پاسخ: گزینه ۱

برای این که نمودار تابع $f(x) + a$ بالای محور x ها باشد، باید کمترین مقدارش مثبت باشد. کمترین مقدار تابع $f(x)$ از روی نمودار مشخصه.

Hint

درس Box

خلاصه تبدیلات نمودار توابع

با دانستن نمودار یک تابع پایه مانند $y = f(x)$ می توان نمودار توابع پیچیده تر را از طریق تبدیلات رسم کرد.

۱) انتقال عمودی و افقی

انتقال عمودی $y = f(x) + k$

• اگر $k > 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد به بالا منتقل می شود.

• اگر $k < 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه $|k|$ واحد به پایین منتقل می شود.

انتقال افقی $y = f(x - h)$:

• اگر $h > 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه h واحد به راست منتقل می شود.

• اگر $h < 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه $|h|$ واحد به چپ منتقل می شود.

۲) انبساط و انقباض

انبساط و انقباض عمودی $y = kf(x)$ (با فرض $k > 0$):

• اگر $k > 1$ باشد، نمودار در راستای محور y ها کشیده (منبسط) می شود. (انبساط عمودی)

• اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در راستای محور y ها فشرده (منقبض) می شود. (انقباض عمودی)

انبساط و انقباض افقی $y = f(kx)$ (با فرض $k > 0$):

• اگر $k > 1$ باشد، نمودار در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده (منقبض) می شود. (انقباض افقی)

• اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده (منبسط) می شود. (انبساط افقی)

۳) قرینه سازی

• قرینه نسبت به محور x ها $(y = -f(x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه می شود.

• قرینه نسبت به محور y ها $(y = f(-x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها قرینه می شود.

۴) تبدیلات قدرمطلق:

قدرمطلق روی کل تابع $(y = |f(x)|)$:

• قسمتی از نمودار $f(x)$ که بالای محور x هاست، بدون تغییر باقی می ماند.

• قسمتی از نمودار که پایین محور x هاست، حذف شده و قرینه آن نسبت به محور x ها به بالا منتقل می شود.

قدرمطلق روی متغیر $(y = f(|x|))$:

• قسمتی از نمودار $f(x)$ که در سمت راست محور y ها قرار دارد ($x \geq 0$)، بدون تغییر باقی می ماند.

• قسمتی از نمودار که در سمت چپ محور y ها قرار دارد ($x < 0$)، حذف می شود.

• بخش باقی مانده سمت راست، نسبت به محور y ها قرینه شده و جایگزین بخش حذفی سمت چپ می شود.

با توجه به این که برد تابع $y = f(2x + 1)$ و $y = f(x)$ یکسان است و مقدار a فقط روی برد تابع اثر می گذارد، برای این که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای محور x ها باشد، کافی است نمودار تابع اولیه را بالای محور x قرار دهیم:

$$\Rightarrow R_{f(x)+a} = [-2 + a, +\infty)$$

$$\Rightarrow -2 + a > 0 \Rightarrow a > 2$$

نقطه $A(-1, 2)$ روی نمودار تابع $y = f(\frac{1}{x} - \frac{x}{4})$ قرار دارد. کدام نقطه روی نمودار تابع $g(x) = f(x) + f(2x - 1)$ قرار دارد؟

- (۱) $(1, 2)$ (۲) $(1, 4)$
(۳) $(1, 6)$ (۴) $(1, 3)$

پاسخ: گزینه ۲



اول مقدار $f(1)$ رو با جای گذاری نقطه داده شده پیدا کن. بعد برای پیدا کردن نقطه جدید روی نمودار $g(x)$ ، بین ورودی و خروجی تابع چه طور تغییر کرده.



پیدا کردن مختصات نقطه در نمودار تبدیل یافته

گاهی اوقات مختصات یک نقطه خاص مانند (x_0, y_0) از نمودار $y = f(x)$ را داریم و می خواهیم مختصات جدید همان نقطه را پس از اعمال یک سری تبدیلات و رسیدن به نمودار $y = kf(ax + b) + h$ پیدا کنیم.

(۱) تبدیل مختصات y (تغییرات عمودی): تغییرات عمودی به همان ترتیب روی y_0 اعمال می شوند. ابتدا ضرب در k و سپس جمع با h .

$$y_{\text{new}} = k.y_0 + h$$

(۲) تبدیل مختصات x (تغییرات افقی): به صورت معکوس روی x_0 اعمال می شوند. یعنی برای یافتن x_{new} باید معادله زیر را حل کنیم:

$$a.x_{\text{new}} + b = x_0 \Rightarrow x_{\text{new}} = \frac{x_0 - b}{a}$$

مثال نقطه $(4, 5)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. مختصات این نقطه روی نمودار $y = 2f(3x - 2) + 1$ کدام است؟

اطلاعات اولیه: $x_0 = 4$, $y_0 = 5$

ضرایب تبدیل: $k = 2$, $a = 3$, $b = -2$, $h = 1$

محاسبه y جدید:

$$y_{\text{new}} = k.y_0 + h = 2(5) + 1 = 10 + 1 = 11$$

محاسبه x جدید:

$$x_{\text{new}} = \frac{x_0 - b}{a} = \frac{4 - (-2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

پاسخ نهایی: مختصات نقطه جدید $(2, 11)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به این که نقطه A روی نمودار تابع $y = f(\frac{1}{x} - \frac{x}{4})$ قرار دارد داریم:

$$f(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}) = 2 \Rightarrow f(1) = 2$$

گام دوم: حال با جای گذاری $x = 1$ در g داریم:

$$g(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow g(1) = 2f(1) \Rightarrow g(1) = 4$$

$$\Rightarrow (1, 4) \in g$$

کمترین مقدار تابع $f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 18$ را با M و کمترین مقدار تابع $g(x) = (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 20$ را با m نمایش می‌دهیم. حاصل $|M - m|$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳



انتقال افقی (چپ و راست) روی مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع (برد تابع) تأثیری ندارد، ولی انتقال عمودی (بالا و پایین) مستقیم روی اون اثر می‌ذاره.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به ضابطه توابع f و g می‌توان نوشت:

$$g(x) = f(x+2) + 2$$

گام دوم: حال اگر β کمترین مقدار تابع f باشد، با توجه به این که انتقال‌های افقی روی مقادیر تابع (برد) اثری ندارند، پس $\beta + 2$ کمترین مقدار تابع g است و داریم:

$$|M - m| = |\beta - (\beta + 2)| = 2$$



دسته‌بندی تبدیلات براساس تأثیر بر دامنه و برد

تبدیلات نمودار را می‌توان به دو دسته اصلی تقسیم کرد. تبدیلات عمودی که بر روی برد تابع اثر می‌گذارند و تبدیلات افقی که دامنه تابع را تغییر می‌دهند.

دسته اول: تبدیلات عمودی (تغییردهنده برد)

این تبدیلات روی خروجی تابع (محور y) اثر می‌گذارند و دامنه تابع را تغییر نمی‌دهند.

● انتقال عمودی $(y = f(x) + k)$: برد تابع به اندازه k واحد جابه‌جا می‌شود.

● انبساط / انقباض عمودی $(y = kf(x))$: برد تابع در ضریب k ضرب می‌شود.

● قرینه نسبت به محور x ها $(y = -f(x))$: برد تابع قرینه می‌شود.

● قدرمطلق روی کل تابع $(y = |f(x)|)$: قسمت‌های منفی برد حذف و قرینه شده و به بالای محور x ها منتقل می‌شوند. برد نهایی همواره نامنفی خواهد بود.

دسته دوم: تبدیلات افقی (تغییردهنده دامنه)

این تبدیلات روی ورودی تابع (محور x) اثر می‌گذارند و معمولاً برد تابع را تغییر نمی‌دهند.

● انتقال افقی $(y = f(x - h))$: دامنه تابع به اندازه h واحد جابه‌جا می‌شود.

● انبساط / انقباض افقی $(y = f(kx))$: دامنه تابع بر ضریب k تقسیم می‌شود.

● قرینه نسبت به محور y ها $(y = f(-x))$: دامنه تابع قرینه می‌شود.

نکته استثنای تبدیل $y = f(|x|)$ یک تبدیل افقی است که می‌تواند هم دامنه و هم برد را تغییر دهد. دامنه جدید به صورت متقارن درمی‌آید و برد جدید، تنها شامل خروجی‌های تابع برای $x \geq 0$ خواهد بود.

۵

تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. ابتدا نمودار این تابع را با ضریب $\frac{1}{4}$ در راستای محور x ها منقبض می کنیم، سپس آن را ۲ واحد به سمت راست انتقال می دهیم. نمودار حاصل را $y = g(x)$ می نامیم. عرض نقطه تلاقی نمودار توابع f و g کدام است؟

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} \quad (2) \\ & 1 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \quad (1) \\ & \sqrt{2} \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

مراحل تبدیل رو به ترتیب روی ضابطه تابع $f(x)$ اعمال کن تا ضابطه $g(x)$ به دست بیاد. بعد دو تا ضابطه رو مساوی هم قرار بده تا نقطه تلاقیشون پیدا بشه.

درس Box

ترتیب اعمال تبدیلات نمودار

قانون کلی و ترتیب پیشنهادی برای تبدیلات:

برای رسم نمودار تابع $y = af(b(x-h)) + k$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، بهتر است تبدیلات را با ترتیب مشخصی انجام دهیم تا دچار اشتباه نشویم. تبدیلات افقی (مربوط به x) و عمودی (مربوط به y) مستقل از هم عمل می کنند.

ترتیب پیشنهادی (انبساط، انقباض و قرینه، سپس انتقال):

(۱) **انبساط / انقباض و قرینه افقی**: نمودار را براساس ضریب b در راستای افقی منبسط / منقبض یا قرینه می کنیم تا به $y = f(bx)$ برسیم.

(۲) **انتقال افقی**: نمودار حاصل را به اندازه h واحد در راستای افقی جابه جا می کنیم تا به $y = f(b(x-h))$ برسیم.

(۳) **انبساط / انقباض و قرینه عمودی**: نمودار حاصل را براساس ضریب a در راستای عمودی منبسط / منقبض یا قرینه می کنیم تا به $y = af(b(x-h))$ برسیم.

(۴) **انتقال عمودی**: نمودار نهایی را به اندازه k واحد در راستای عمودی جابه جا می کنیم تا به $y = af(b(x-h)) + k$ برسیم.

نکته

تفاوت $y = f(b(x+c))$ و $y = f(bx+c)$:

مهم ترین نکته در تبدیلات افقی، تشخیص درست مقدار انتقال است. برای این کار، باید ضریب متغیر x را به یک تبدیل کنیم.

راهبرد: همیشه از ضریب b در داخل پرانتز فاکتور بگیرید تا مقدار دقیق انتقال افقی مشخص شود.

$$y = f(bx+c) \Rightarrow y = f(b(x+\frac{c}{b}))$$

از این فرم مشخص می شود که:

● انقباض / انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{b}$ اعمال می شود.

● انتقال افقی به اندازه $-\frac{c}{b}$ (نه $-c$) انجام می شود.

مثال برای رسم نمودار $y = f(2x+6)$:

● ابتدا از ۲ فاکتور می گیریم: $y = f(2(x+3))$.

● این یعنی نمودار $y = f(x)$ ابتدا با ضریب $\frac{1}{2}$ دچار انقباض افقی شده و سپس ۳ واحد به چپ منتقل می شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: انتقال های انجام شده را مرحله به مرحله اعمال می کنیم تا ضابطه تابع g مشخص شود:

$$y = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{انقباض طولی با ضریب } \frac{1}{4}} y = \sqrt{2x-1} \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y = \sqrt{2(x-2)-1}$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{2x-5}$$

گام دوم: حال مختصات محل تلاقی دو نمودار را به دست می آوریم.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow 2x-5 = x-1 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=\sqrt{3}$$

نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها کدام است؟

(سؤال ۱۱۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

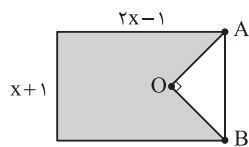
۲ (۴)

۱ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

در مستطیل شکل زیر، مثلث AOB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. اگر مساحت قسمت سایه‌خورده برابر ۱۶ باشد، محیط مستطیل کدام است؟



۱۲ (۱)

۱۸ (۲)

۲۴ (۳)

۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

مساحت قسمت رنگی یعنی «مساحت کل مستطیل» منهای «مساحت مثلث سفیده». مساحت هر دو رو برحسب x بنویس، سپس از هم کم کن و مساوی ۱۶ قرار بده تا به معادله درجه‌دو به دست بیاد.



درس‌Box

روش‌های حل معادله درجه‌دوم

تعریف معادله درجه‌دوم:

هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن a, b و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ باشند، یک معادله درجه‌دوم نامیده می‌شود. منظور از حل معادله، پیدا کردن مقادیر حقیقی برای x است که در تساوی صدق کنند.

روش اول: حل معادله‌های ناقص

اگر یکی از ضرایب b یا c (یا هر دو) صفر باشد، معادله ناقص است و به راحتی حل می‌شود.

• اگر $c = 0$ ، $b = 0$ باشد، معادله به شکل $ax^2 = 0$ درآمده و تنها جواب آن $x = 0$ است.

• اگر $c = 0$ باشد، معادله به شکل $ax^2 + bx = 0$ است. با فاکتورگیری از x به $x(ax + b) = 0$ می‌رسیم و جواب‌ها $x = 0$

و $x = -\frac{b}{a}$ هستند.

• اگر $b = 0$ باشد، معادله به شکل $ax^2 + c = 0$ است که به $x^2 = -\frac{c}{a}$ تبدیل می‌شود. اگر $-\frac{c}{a} \geq 0$ باشد، جواب‌ها

$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ هستند و در غیر این صورت معادله جواب حقیقی ندارد.

روش دوم: حل معادله‌های کامل:

(الف) روش تجزیه: در این روش با استفاده از اتحادها (مانند اتحاد جمله‌مشتک)، معادله را به صورت حاصل ضرب دو عبارت تبدیل کرده و جواب‌ها را پیدا می‌کنیم.

(ب) روش مربع کامل کردن:

(۱) معادله را به شکل $x^2 + mx = n$ مرتب می‌کنیم (اگر ضریب x^2 یک نبود، همه جملات را بر آن تقسیم می‌کنیم).

(۲) مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{m}{2})^2$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

(۳) سمت چپ را به صورت مربع کامل $(x + \frac{m}{2})^2$ می‌نویسیم و سپس با ریشه‌گیری معادله را حل می‌کنیم.

(ج) روش کلی با فرمول دلتا: این روش برای هر معادله درجه‌دومی جواب می‌دهد. ابتدا دلتا (Δ) را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

• اگر $\Delta \geq 0$ باشد، جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

روش سوم: تکنیک‌های خاص و میان‌برها

• روش ریشه‌گیری: برای معادلات به فرم $(ax + b)^2 = c$ ، اگر $c \geq 0$ باشد، داریم $ax + b = \pm \sqrt{c}$ و از آن x به دست

می‌آید. اگر $c < 0$ باشد، جواب حقیقی وجود ندارد.

● استفاده از اتحاد مزدوج: برای معادلات به فرم $A^2 = B^2$ می‌توان آن را به $A^2 - B^2 = 0$ تبدیل و با استفاده از اتحاد مزدوج $(A - B)(A + B) = 0$ آن را حل کرد.

● حالت‌های خاص مجموع ضرایب:

● اگر $a + b + c = 0$ باشد، یکی از جواب‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

● اگر $a - b + c = 0$ باشد، یکی از جواب‌ها $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

حل مسائل کاربردی با معادله درجه دوم

راهبرد کلی حل مسئله:

بسیاری از مسائل در علوم مختلف، پس از مدل‌سازی به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شوند. راهبرد کلی برای حل این مسائل به صورت زیر است:

(۱) درک مسئله و تعریف متغیر: مسئله را به دقت بخوانید و کمیت مجهول اصلی را با یک متغیر (مانند x) نمایش دهید. سایر مقادیر مجهول را برحسب x بنویسید.

(۲) تشکیل معادله: با استفاده از روابط شناخته شده (مانند روابط هندسی، فیزیکی و غیره) یک معادله درجه دوم برحسب x تشکیل دهید.

(۳) حل معادله: معادله درجه دوم به دست آمده را با یکی از روش‌های مرسوم (تجزیه، دلتا و ...) حل کنید.

(۴) بررسی جواب(ها): جواب‌های به دست آمده را با شرایط فیزیکی مسئله مقایسه کنید. جواب‌های غیر قابل قبول (مانند طول منفی) باید حذف شوند.

گام اول: برای محاسبه مساحت قسمت رنگی ابتدا، مساحت مثلث OAB را مشخص می‌کنیم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$AB = x + 1, OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$$

$$\Rightarrow OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + 1)$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (x + 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x + 1)}{2} = \frac{(x + 1)^2}{4}$$

گام دوم: حال برای مساحت سایه خورده داریم:

$$S_{\text{سایه خورده}} = (x + 1)(2x - 1) - \frac{(x + 1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{4(x + 1)(2x - 1) - (x + 1)^2}{4} = \frac{8x^2 + 4x - 4 - (x^2 + 2x + 1)}{4}$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{7x^2 + 2x - 5}{4} \Rightarrow 7x^2 + 2x - 5 = 64$$

$$\Rightarrow 7x^2 + 2x - 69 = 0 \quad \Delta = 2^2 - 4(7)(-69) = 1936 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{1936}}{14}$$

$$\xrightarrow{1936 = 44^2} x = \frac{-2 \pm 44}{14} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{23}{7} & \text{غی} \\ x = 3 & \checkmark \end{cases}$$

گام سوم: برای محاسبه محیط مستطیل با داشتن مقدار x داریم:

$$\text{محیط} = 2(x + 1 + 2x - 1) = 2(3x) = 6x = 18$$

۷ اگر m و n جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $A = (3m + \frac{2}{n})(3n + \frac{2}{m})$ کدام است؟

۳۲ (۱)

۴۴ (۲)

۲۸ (۳)

۳۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

اول حاصل عبارت خواسته شده رو به دست بیار. می‌بینی که نتیجه برحسب mn (یعنی حاصل ضرب ریشه‌ها) ساده می‌شه. حاصل ضرب ریشه‌ها رو هم که از خود معادله راحت به دست میاری.

گام اول: ابتدا عبارت داده شده را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$A = (3m + \frac{2}{n})(3n + \frac{2}{m}) = 9mn + 6 + 6 + \frac{4}{mn}$$

گام دوم: حال با توجه به روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله درجه دوم داریم:

$$mn = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow A = 9 \times 2 + 6 + 6 + \frac{4}{2} = 18 + 12 + 2 = 32$$

اختلاف جواب‌های معادله $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x^2+(\sqrt{2}-2\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}+1=0$ کدام است؟

(۱) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

(۲) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)$

(۳) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

(۴) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)$

پاسخ: گزینه ۱

برای پیدا کردن اختلاف جواب‌ها، یک فرمول مستقیم و سریع وجود داره که از دلتا و ضریب a استفاده می‌کنه. اول دلتا رو حساب کن.

Hint

درس Box

روابط بین جواب‌ها و ضرایب معادله درجه دوم

برای معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که دارای جواب‌های x_1 و x_2 است، می‌توان مجموع، حاصل ضرب و تفاضل جواب‌ها را بدون محاسبه مستقیم خود جواب‌ها و تنها با استفاده از ضرایب a, b, c به دست آورد:

مجموع جواب‌ها (S): این رابطه از جمع دو ریشه در فرمول کلی به دست می‌آید.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

حاصل ضرب جواب‌ها (P): این رابطه از ضرب دو ریشه در فرمول کلی به دست می‌آید.

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

قدرمطلق تفاضل جواب‌ها:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (\Delta = b^2 - 4ac \text{ که در آن})$$

گام اول: با توجه به رابطه بین ضرایب و جواب‌های معادله درجه دوم برای محاسبه اختلاف جواب‌ها، ابتدا مقدار Δ معادله را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = (\sqrt{2}-2\sqrt{3}-1)^2 - 4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \Delta = 2+12+1-4\sqrt{6}-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}-4(3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \Delta = 3+2\sqrt{2}$$

گام دوم: حال با جای گذاری مقدار Δ در رابطه داریم:

$$\text{اختلاف جواب‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

گام سوم: با گویا کردن مقدار به دست آمده داریم:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$$

مجموع ضرایب معادله صفر است:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1=0$$

پس یکی از جواب‌ها $x_1=1$ و جواب دیگر $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ است. ابتدا مخرج x_2 را گویا می‌کنیم:

$$x_2 = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 3+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

حالا اختلاف جواب‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|x_2 - x_1| = 2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + \sqrt{3}(1+\sqrt{2}) \Rightarrow |x_2 - x_1| = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یه جور دیگه

حاصل ضرب دو عدد حقیقی از مجموع آن‌ها ۱۷ واحد بیشتر است. اگر اختلاف این دو عدد ۳ واحد باشد، نسبت آن‌ها کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{9}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

روابطی که سؤال داده رو برحسب مجموع جواب‌ها (S) و حاصل‌ضربشون (P) بنویس. بعد از رابطه $(\alpha - \beta)^2 = S^2 - 4P$ استفاده کن تا به معادله برای S پیدا کنی.

نکته

محاسبه عبارات متقارن برحسب S و P:

اگر جواب‌های معادله درجه دوم α و β باشند، می‌توان بسیاری از عبارت‌های شامل جواب‌ها را بدون محاسبه مستقیم آن‌ها و تنها برحسب مجموع $(S = \alpha + \beta)$ و حاصل‌ضرب $(P = \alpha\beta)$ جواب‌ها به دست آورد.

مجموع معکوس جواب‌ها: با مخرج‌مشترک گرفتن به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

مجموع مربع‌های جواب‌ها: با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

مجموع مکعب‌های جواب‌ها: با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3SP$$

قدرمطلق تفاضل جواب‌ها:

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنید دو عدد حقیقی α و β باشد، در نتیجه:

$$S = \alpha + \beta, P = \alpha\beta \xrightarrow{\text{طبق فرض}} P = S + 17$$

گام دوم: حال اختلاف دو عدد را برحسب S و P می‌نویسیم:

$$d = |\alpha - \beta| \Rightarrow d^2 = (\alpha - \beta)^2 \Rightarrow d^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = S^2 - 4P$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{S^2 - 4P}$$

و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{S^2 - 4P} = 3 \Rightarrow \sqrt{S^2 - 4(S + 17)} = 3 \Rightarrow S^2 - 4S - 68 = 9$$

$$\Rightarrow S^2 - 4S - 77 = 0 \Rightarrow (S + 7)(S - 11) = 0 \Rightarrow S = -7, S = 11$$

گام سوم: حال برای دو مقدار S، مقادیر P را نوشته و معادله درجه دومی را که جواب‌های آن α و β باشد، تشکیل می‌دهیم:

$$S = 11 \Rightarrow P = 28 \Rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{7}, \frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{4}$$

$$S = -7 \Rightarrow P = 10 \Rightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{2}, \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{5}$$

با توجه به گزینه‌ها نسبت دو عدد $\frac{5}{2}$ می‌تواند باشد.

۱۰ نمودار تابع $f(x) = (x-1)(x^2 - 2mx - m - 1)$ محور x ها را در ۳ نقطه قطع می کند. اگر مجموع مربعات طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور x ها برابر ۹ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ: گزینه ۲



یکی از صفرها که معلومه $x = 1$ هست. دوتا صفر دیگر (آلفا و بتا) مربوط به بخش درجه دو هستن. شرط مجموع مربعات صفرها رو بنویس. $(\alpha^2 + \beta^2 + 1^2 = 9)$ و بعدش از رابطه $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فرض کنید α ، β و γ طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور x ها باشند:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 2mx - m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2 - 2mx - m - 1 = 0 \end{cases}$$

فرض می کنیم $\gamma = 1$ و α و β جواب های معادله روبه رو باشند:

گام دوم: حال طبق فرض مسئله داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 1 = 9 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 8$$

گام سوم: حال با توجه به روابط بین جواب ها و ضرایب معادله درجه دوم داریم:

$$\xrightarrow{(*)} \alpha + \beta = 2m, \alpha\beta = -m - 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8 \xrightarrow{\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P} (2m)^2 - 2(-m - 1) = 8 \Rightarrow 4m^2 + 2m + 2 = 8$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2m^2 + m + 1 = 4 \Rightarrow 2m^2 + m - 3 = 0$$

گام چهارم: مجموع ضرایب معادله بالا برابر صفر است، پس $m_1 = 1$ و $m_2 = -\frac{3}{2}$ جواب های آن هستند. اختلاف این جواب ها برابر است با:

$$|m_1 - m_2| = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

۱۱ اگر نقطه $A(2, k)$ رأس سهمی $f(x) = ax^2 - 2bx + a$ باشد، حاصل $\frac{f(5)}{f(-1)}$ کدام است؟

۳ (۱)

-۳ (۲)

-۱ (۳)

۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

مختصات رأس سهمی رو که بلدی! طول رأس رو مساوی ۲ قرار بده تا به رابطه بین a و b پیدا کنی. بعد این رابطه رو نوی ضابطه سهمی جای گذاری کن تا همه چیز برحسب a ساده بشه.

درس Box

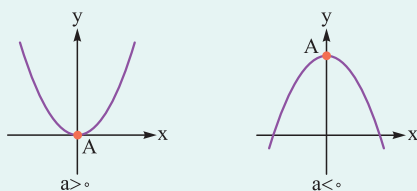
تعریف سهمی و ویژگی‌های اصلی

• نمودار معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ (به شرط $a \neq 0$) یک سهمی نامیده می‌شود.

• علامت ضریب a جهت دهانه سهمی را مشخص می‌کند: اگر $a > 0$ دهانه رو به بالا و اگر $a < 0$ دهانه رو به پایین است.

• پایین‌ترین یا بالاترین نقطه نمودار، رأس سهمی نام دارد.

• خط عمودی که از رأس می‌گذرد، محور تقارن سهمی است.



• رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه $A(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است و خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن این سهمی است

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا به کمک طول رأس سهمی داریم:

$$x_s = \frac{2b}{2a} \Rightarrow 2 = \frac{b}{a} \Rightarrow b = 2a$$

گام دوم: حال با جای گذاری مقدار معادل b ، ضابطه سهمی را بازنویسی می‌کنیم.

$$f(x) = ax^2 - 4ax + a \Rightarrow f(x) = a(x^2 - 4x + 1)$$

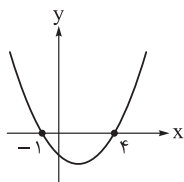
گام سوم: حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{f(5)}{f(-1)} = \frac{a(25 - 20 + 1)}{a(1 - 4 + 1)} = \frac{6}{6} = 1$$

چون $x = 2$ محور تقارن سهمی است و از آن جا که $5 - 2 = 2 - (-1)$ ، نتیجه می‌گیریم که $f(5) = f(-1)$ است.

یه جور دیگه

۱۲ نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{c-3b}{a}$ کدام است؟



۶ (۱)

۵ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

وقتی ریشه‌های سهمی روی نمودار مشخصه، بهترین کار نوشتن معادله به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ هست. بعد ضرایب a, b و c رو با این فرمول پیدا کن.

درس Box

معادله سهمی با استفاده از ریشه‌ها (نقاط برخورد با محور طول‌ها)

بسته به این که سهمی محور x ها را در چند نقطه قطع کند، معادله آن را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت (به شرط $a \neq 0$):

حالت اول: سهمی محور x ها را در دو نقطه x_1 و x_2 قطع می‌کند.

معادله: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

محور تقارن: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

حالت دوم: سهمی بر محور x ها در یک نقطه x_1 مماس است.

معادله: $y = a(x - x_1)^2$

محور تقارن: $x = x_1$ (در این حالت، رأس سهمی روی محور x ها قرار دارد).

گام اول: با توجه به محل برخورد نمودار تابع با محور x ها می‌توان نوشت:

$$f(x) = a(x+1)(x-4) \Rightarrow f(x) = a(x^2 - 3x - 4)$$

$$\Rightarrow f(x) = ax^2 - 3ax - 4a$$

گام دوم: با مقایسه ضابطه به دست آمده با ضابطه داده شده داریم:

$$b = -3a, c = -4a$$

$$\Rightarrow \frac{c-3b}{a} = \frac{-4a+9a}{a} = \frac{5a}{a} = 5$$

پاسخ خیلی تشریحی

اگر $(-2, 3)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که در آن سهمی $y = x^2 - ax - b$ پایین‌تر از خط $y = 2ax + 4b$ قرار می‌گیرد، حاصل ab کدام است؟

- ۱) $0/1$
- ۲) $0/2$
- ۳) $0/3$
- ۴) $0/4$

پاسخ: گزینه ۴



شرط سؤال رو به صورت یک نامعادله درج‌دهو بنویس. وقتی جواب‌های یک نامعادله درج‌دهو به صورت بازه بین دو عدد درمیاد، یعنی اون دو عدد، ریشه‌های خود معادله هستن.

کارت Box

تعیین علامت عبارت درج‌دهوم $(ax^2 + bx + c)$

علامت عبارت درج‌دهوم به مقدار دلتا $(\Delta = b^2 - 4ac)$ و علامت ضریب a بستگی دارد. سه حالت کلی برای تعیین علامت وجود دارد:

• حالت اول: $\Delta > 0$

معادله دو ریشه حقیقی متمایز $(\{x_1, x_2\})$ دارد. علامت عبارت در بازه بین دو ریشه مخالف علامت a و در خارج از دو ریشه موافق علامت a است.

• حالت دوم: $\Delta = 0$

معادله یک ریشه حقیقی مضاعف $(\{x_0\})$ دارد. علامت عبارت در همه‌جا موافق علامت a است. به جز در خود ریشه که مقدار عبارت صفر می‌شود.

• حالت سوم: $\Delta < 0$

معادله ریشه حقیقی ندارد. علامت عبارت برای تمام مقادیر x ، همواره موافق علامت a است.

نکات:

• اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد، عبارت همواره مثبت است.

• اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد، عبارت همواره منفی است.

• اگر $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد، عبارت همواره نامنفی (مثبت یا صفر) است.

• اگر $a < 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد، عبارت همواره نامثبت (منفی یا صفر) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: برای این که نمودار سهمی پایین‌تر از خط قرار گیرد باید $(-2, 3)$ مجموعه جواب‌های نامعادله زیر باشد:

$$x^2 - ax - b < 2ax + 4b \Rightarrow x^2 - 3ax - 5b < 0$$

گام دوم: با توجه به تعیین علامت عبارت درجه ۲، می‌توان نتیجه گرفت که $x = -2$ و $x = 3$ جواب‌های معادله $x^2 - 3ax - 5b = 0$ هستند، در نتیجه:

$$\begin{cases} x = 3: 9 - 9a - 5b = 0 \\ x = -2: 4 + 6a - 5b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی را از پایینی کم می‌کنیم}} 5 - 15a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow ab = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5} = 0/4$$

می‌تونستی برای مشخص کردن a و b از S و P استفاده کنی.



$$S = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$P = -6 \Rightarrow -5b = -6 \Rightarrow b = \frac{6}{5}$$

جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = (a+4)x^2 + (a-b+4)x - b$ به صورت زیر است. حاصل ab کدام است؟

$(a, b \in \mathbb{Z})$

x	$-\infty$	$a+1$	-1	$+\infty$
$P(x)$	+	+	-	+

۳ (۲)

۶ (۱)

-۶ (۴)

-۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به جدول داده شده $x = a+1$ و $x = -1$ ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)$ هستند. به کمک روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله درجه دوم می‌توان نوشت:

$$S = a+1+(-1) = a \Rightarrow a = \frac{-(a-b+4)}{a+4}$$

$$P = (a+1)(-1) = -a-1 \Rightarrow -a-1 = \frac{-b}{a+4}$$

$$a^2 + 4a = -a + b - 4 \Rightarrow a^2 + 5a + 4 = b \quad (*)$$

گام دوم: با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $P(x)$ متوجه می‌شویم که ضریب x^2 در چندجمله‌ای $P(x)$ مثبت است، پس داریم:

$$a+4 > 0 \Rightarrow a > -4 \quad (۱)$$

از طرفی عبارت دو ریشه متمایز دارد، پس $a+1$ از -1 باید کوچک‌تر باشد:

$$\Rightarrow a+1 < -1 \Rightarrow a < -2 \quad (۲)$$

از شرط‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $-4 < a < -2$ است و از آن‌جا که طبق فرض سؤال a و b اعداد صحیح هستند، تنها

مقدار صحیح قابل قبول برای a مقدار $a = -3$ است.

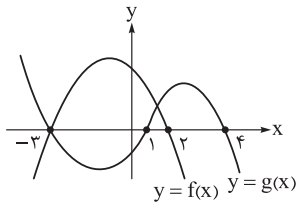
گام سوم: حالا $a = -3$ را در عبارت (*) جای‌گذاری می‌کنیم و داریم:

$$b = 9 - 15 + 4 = -2 \Rightarrow a \times b = 6$$



۱۵

اگر نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به صورت زیر باشند، مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{(x+1)g(x)}{f(x)} \leq 0$ شامل



چند عدد صحیح است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

یه جدول تعیین علامت برای کل عبارت بکش. علامت هر کدوم از تابع‌ها رو با توجه به این که نمودارشون بالای محور x هست یا پایین، توی هر بازه مشخص کن.

Hint

درس‌Box

تعیین علامت حاصل ضرب و تقسیم عبارت‌ها

برای تعیین علامت یک عبارت که از ضرب یا تقسیم چند عبارت دیگر تشکیل شده است، از جدول تعیین علامت تجمعی استفاده می‌کنیم.

مراحل انجام کار:

(۱) یافتن ریشه‌ها: ابتدا ریشه‌های تمام عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را به دست می‌آوریم و روی محور اعداد مشخص می‌کنیم.
(۲) تعیین علامت هر عبارت: جدول تعیین علامت را تشکیل داده و در سطرهای جداگانه، علامت هر یک از عبارت‌ها را در بازه‌های مختلف مشخص می‌کنیم.

(۳) تعیین علامت نهایی: در سطر آخر جدول، با در نظر گرفتن قوانین ضرب و تقسیم علامت‌ها (تعداد زوجی از منفی‌ها، مثبت و تعداد فردی از آن، منفی می‌شود)، علامت کل عبارت را در هر بازه به دست می‌آوریم.

نکات مهم:

در ریشه‌های صورت، کل عبارت برابر با صفر است (به شرطی که هم‌زمان ریشه مخرج نباشد).

در ریشه‌های مخرج، کل عبارت تعریف نشده است.

گام اول: جدول تعیین علامت عبارت داده شده را رسم کرده و علامت‌های f و g را از روی نمودار مشخص می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

	$-\infty$	-3	-1	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$	-	+	+	+	-	-	-
$g(x)$	+	-	-	+	+	-	-
$x+1$	-	-	+	+	+	+	+
$\frac{(x+1)g(x)}{f(x)}$	+	+	-	+	-	+	+

گام دوم: با توجه به جدول، مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in [-1, 1] \cup (2, 4]$$

که شامل ۵ عدد صحیح $\{-1, 0, 1, 3, 4\}$ است.

۱۶ با فرض $a + b \neq 0$ و $ab \neq 0$ ، معادله $\frac{1}{x+a+b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ دارای جواب‌های α و β است. حاصل $\alpha\beta$ کدام است؟

(۱) ab

(۲) 1

(۳) a^2b^2

(۴) $ab(a+b)$

پاسخ: گزینه ۱

اول سمت راست تساوی رو مخرج‌مشترک بگیر. معادله خیلی ساده می‌شه و به یه معادله درجه‌دو می‌رسی که حاصل‌ضرب ریشه‌هاش رو راحت می‌تونی پیدا کنی.

Hint

درس‌Box

روش حل معادله‌های گویا

هدف اصلی در حل معادلات گویا، حذف مخرج‌ها و تبدیل معادله به یک معادله چندجمله‌ای ساده (معمولاً به فرم $P(x) = 0$) است.

مراحل ساده‌سازی معادله: برای ساده‌سازی می‌توان از یکی از روش‌های زیر استفاده کرد:

- (۱) ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها و ساده کردن
- (۲) استفاده از طرفین وسطین (در حالتی که دو طرف تساوی یک کسر باشد) و ساده کردن
- (۳) گرفتن مخرج‌مشترک و ساده‌سازی

مهم: بررسی جواب‌های قابل قبول: جوابی برای معادله گویا قابل قبول است که هیچ‌کدام از مخرج‌های موجود در معادله اصلی را صفر نکند. بهترین راه برای این کار، تعیین دامنه عبارت‌های گویا در ابتدای حل مسئله است. جواب‌های نهایی که در این دامنه قرار ندارند، باید حذف شوند.

استفاده از تغییر متغیر در برخی معادلات گویای پیچیده که ساختار تکرارشونده دارند: می‌توان از روش تغییر متغیر برای ساده‌سازی و حل معادله استفاده کرد.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با مخرج‌مشترک‌گیری سمت راست تساوی، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{x+a+b} = \frac{ab+bx+ax}{abx} \Rightarrow \frac{1}{x+a+b} = \frac{ab+(a+b)x}{abx}$$

گام دوم: حال برای حل معادله اخیر داریم:

$$abx = (x+a+b)(ab+(a+b)x)$$

$$\Rightarrow abx = abx + (a+b)x^2 + (a+b)ab + (a+b)^2x$$

$$\Rightarrow (a+b)x^2 + (a+b)^2x + (a+b)ab = 0$$

گام سوم: چون $a+b \neq 0$ و $ab \neq 0$ ، پس معادله درجه‌دوم زیر را داریم:

$$\xrightarrow{\div (a+b)} x^2 + (a+b)x + ab = 0$$

که در آن حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با:

$$P = \alpha\beta = ab$$

۱۷ اگر $x = a$ ، جواب معادله $\frac{x+1}{x+a} = \frac{x-2}{x+3}$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{9}{a^2}$ کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۱۷

(۳) ۸۶

(۴) ۷۰

پاسخ: گزینه ۴

Hint

مقدار $x = a$ رو که خود سؤال به عنوان جواب داده، توی معادله جای گذاری کن. یه معادله برحسب a به دست میاد که با حل کردنش به یه رابطه ساده بین a و $\frac{1}{a}$ می رسی.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به این که $x = a$ ، جواب معادله است، پس در معادله صدق می کند.

$$\frac{a+1}{2a} = \frac{a-2}{a+3}$$

گام دوم: برای حل معادله گویای اخیر داریم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (a+3)(a+1) = (a-2)2a$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a + 3 = 2a^2 - 4a \Rightarrow a^2 - 8a - 3 = 0$$

گام سوم: مقدار خواسته شده را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$a^2 - 8a - 3 = 0 \xrightarrow{\substack{a \neq 0 \\ a \neq -3}} \frac{a^2}{a} - \frac{8a}{a} - \frac{3}{a} = 0$$

$$\Rightarrow a - \frac{3}{a} = 8 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2 + \frac{9}{a^2} - 6 = 64$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{9}{a^2} = 70$$

۱۸ جواب معادله $\sqrt{8x} + \sqrt{4-x^2} = \sqrt{x-2} + a$ در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف

جواب‌های معادله درجه دوم برابر $\frac{7}{4}$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

۴۰ (۲)

۳۲ (۱)

۵۶ (۴)

۴۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

اول دامنه معادله رادیکالی رو مشخص کن. گاهی وقتا دامنه فقط شامل یک یا چند عدد خاص می‌شه که همون جواب‌های معادله هستن!

Hint

گام اول: ابتدا توجه کنید که:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=2$$

در نتیجه تنها $x=2$ در دامنه این تساوی قرار دارد، پس $x=2$ جواب معادله است.

$$\sqrt{16} + \sqrt{0} = \sqrt{0} + a \Rightarrow a=4$$

گام دوم: حال با جای گذاری مقدار a و این که $x=2$ جواب معادله درجه دوم است، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$4x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=2} 16 + 2b + c = 0$$

گام سوم: هم‌چنین برای اختلاف جواب‌های معادله درجه دوم داریم:

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{\sqrt{b^2 - 16c}}{4}$$

$$\Rightarrow 14 = \sqrt{b^2 - 16c} \xrightarrow{c=-16-2b} 14 = \sqrt{b^2 - 16(-16-2b)} \Rightarrow 14 = \sqrt{b^2 + 32b + 256}$$

$$\Rightarrow 14 = \sqrt{(b+16)^2} \Rightarrow 14 = |b+16|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+16=14 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow c=-12 \\ b+16=-14 \Rightarrow b=-30 \Rightarrow c=44 \end{cases}$$

گام چهارم: دقت کنید در هر دو حالت برای مقادیر b و c ، Δ معادله درجه دوم مثبت است و مقادیر b و c قابل قبول‌اند، در نتیجه اختلاف مقادیر ممکن برای c برابر است با:

$$|-12-44| = 56$$

۱۹ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی هستند. کدام گزینه درست است؟

$$x = z \quad (2)$$

$$x < y \quad (1)$$

$$y = z \quad (4)$$

$$y > z \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

دو ماتریس با هم مساوی هستند، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

درس Box

از $A = B$ نتیجه می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \\ z-1=5 \Rightarrow z=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

بنابراین $x = z$ و سایر گزینه‌ها نادرست هستند.

دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی هستند. مقدارهای x ، y و z را به دست آورید.

(سؤال ۷ - امتحان نوبتی فردار ۱۴۰۴)

امتحان
نهایی

۲۰ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند، آن گاه حاصل $x - y$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۶ (۴) -۶

پاسخ: گزینه ۲

AB را با BA برابر قرار دهید.

Hint

درس Box

نکته

دو ماتریس مربعی A و B را تعویض پذیر می نامند، در صورتی که $AB = BA$.

شرط تعویض پذیر بودن دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ آن است که:

$$\frac{a-d}{m-q} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ماتریس AB را حساب می کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2x & 6+2y \\ 15+4x & 18+4y \end{bmatrix}$$

گام دوم: ماتریس BA را حساب می کنیم:

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ x+3y & 2x+4y \end{bmatrix}$$

گام سوم: شرط تعویض پذیر بودن دو ماتریس A و B آن است که $AB = BA$ ، یعنی:

$$\begin{bmatrix} 5+2x & 6+2y \\ 15+4x & 18+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ x+3y & 2x+4y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5+2x=23 \Rightarrow x=9 \\ 6+2y=34 \Rightarrow y=14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - y = -5$$

از آن چه در قسمت نکته درس باکس گفتیم، استفاده می کنیم:

پیچور دیگه

شرط تعویض پذیر بودن دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix}$ آن است که:

$$\frac{1-4}{5-y} = \frac{2}{6} = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{-3}{5-y} = \frac{1}{3} = \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-3}{5-y} = \frac{1}{3} \Rightarrow 5-y = -9 \Rightarrow y = 14 \\ \frac{1}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

۲۱ ماتریس‌های A و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A + B$ ماتریسی اسکالر و مجموع درایه‌های ماتریس BA

برابر با ۱۸ باشد، آن گاه بزرگ‌ترین درایه ماتریس A کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$A + B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \text{ در نظر بگیرید}$$

Hint

درس‌Box

ماتریس اسکالر: ماتریس‌های مربعی که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن با هم برابر و سایر درایه‌های آن صفر باشند، اسکالر نامیده می‌شوند.

گام اول: ماتریس اسکالر $A + B$ را به صورت $A + B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$A + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-3 & -2 \\ 2 & x-1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ماتریس BA را به دست می‌آوریم و مجموع درایه‌های آن را برابر با ۱۸ قرار می‌دهیم تا x به دست بیاید.

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-3 & -2 \\ 2 & x-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-5 & 2x-8 \\ -2x+8 & x+3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (3x-5) + (2x-8) + (-2x+8) + (x+3) = 18 \Rightarrow 4x-2 = 18 \Rightarrow x = 5$$

گام سوم: اگر $x = 5$ ، آن گاه $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، پس بزرگ‌ترین درایه ماتریس A برابر با ۴ است.

۲۲

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که $A^2 = A - I$ ، آن گاه ماتریس $I + A^{36}$ برابر با کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) $2I$
(۳) $A - I$ (۴) $I - A$

مشاوره محاسبه توان‌های بزرگ ماتریس‌ها، از تیپ‌های پرتکرار در امتحان‌های تشریحی و تستی است.

پاسخ: گزینه ۲

ماتریس A^3 را به دست آورید.

Hint

درس Box

ماتریس همانی: ماتریسی اسکالر است که همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند، مثلاً $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و ...

ماتریس همانی، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها است، یعنی اگر A و B قابل ضرب در I باشند، آن گاه $AI = A$ و $IB = B$.

اگر k عددی حقیقی باشد، آن گاه $(kI)^n = k^n I$.

نکته

گام اول: طرفین تساوی $A^2 = A - I$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$A.A^2 = A(A - I) \Rightarrow A^3 = A^2 - A \xrightarrow{A^2 = A - I} A^3 = (A - I) - A \Rightarrow A^3 = -I \quad (*)$$

گام دوم: با توجه به این که $A^{36} = (A^3)^{12}$ ، داریم:

$$\xrightarrow{(*)} A^{36} = (-I)^{12} = (-1)^{12} I = I$$

گام سوم: خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$I + A^{36} = I + I = 2I$$

پاسخ خیلی تشریحی

۲۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه ماتریس $-2BA^2B + 8BAB - 10B^2$ برابر با کدام است؟

A (۱)

B (۲)

$\bar{O}$ (۳)

I (۴)

مشاوره رابطه مهمی در ماتریس‌های 2×2 وجود دارد که به رابطه کیلی - همیلتون معروف است. این رابطه را که در درس‌بکس گفته‌ایم، حتماً فرابگیرید.

پاسخ: گزینه ۲

در عبارتی که سؤال، حاصل آن را خواسته، B را هم از سمت راست و هم از سمت چپ فاکتور بگیرد و از رابطه کیلی - همیلتون استفاده کنید.

Hint

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ آن گاه } A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$

درس‌بکس

گام اول: در عبارتی که سؤال، حاصل آن را خواسته است، هم از سمت راست و هم از سمت چپ از B فاکتور می‌گیریم:

$$-2BA^2B + 8BAB - 10B^2 = 2B(-A^2 + 4A - 5I)B \quad (*)$$

گام دوم: رابطه کیلی - همیلتون را برای ماتریس A می‌نویسیم، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (1+3)A + (3+2)I = \bar{O} \xrightarrow{\times -1} -A^2 + 4A - 5I = \bar{O} \quad (**)$$

گام سوم: با در نظر گرفتن معادله‌های (*) و (**)، عبارت مورد نظر سؤال برابر است با:

$$2B\bar{O}B = \bar{O}$$

پاسخ خیلی تشریحی

۲۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0/2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه جزء صحیح مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) -۱۸
(۲) -۱۹
(۳) -۱۷
(۴) -۱۶

مشاوره این تیپ سؤال‌ها، در آزمون‌های آزمایشی و کنکور، بسیار پرتکرار هستند.

پاسخ: گزینه ۲

لازم نیست کلی درایه‌های ماتریس A^3 را حساب کنید.

Hint

درس Box

فرض کنید $D = ABC$ ، در این صورت درایه d_{ij} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$d_{ij} = [\text{ستون } j\text{ام ماتریس } C] \cdot B \cdot [\text{سطر } i\text{ام ماتریس } A]$$

با این توضیح، ستون j ام ماتریس D به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[\text{ستون } j\text{ام ماتریس } D] = A \cdot B \cdot [\text{ستون } j\text{ام ماتریس } C]$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ماتریس A^3 را به صورت $A \cdot A \cdot A$ می‌نویسیم، تا بتوانیم از آن چه در درس باکس گفته شد، استفاده کنیم، پس با توجه

به درس باکس، باید حاصل $A \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ را حساب کنیم، برای این منظور، ابتدا $A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ را حساب کرده و سپس حاصل آن را

از سمت راست در A ضرب می‌کنیم.

گام دوم: ماتریس $A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -2/4 \end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس به دست آمده در گام دوم را از سمت راست در A ضرب می‌کنیم:

$$A \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -2/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -2/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/8 \\ 0/6 \\ -10/48 \end{bmatrix}$$

گام چهارم: خواسته سؤال برابر است با:

$$[-8/8 + 0/6 - 10/48] = [-18/8] = -19$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 ، کدام است؟

(سؤال ۱۳۷ کنکور ریاضی ۹۹)

- (۱) $[30 \ 6 \ 64]$
(۲) $[30 \ 6 \ 78]$
(۳) $[24 \ 8 \ 86]$
(۴) $[30 \ 6 \ 86]$

دو نقطه متمایز P و Q را در صفحه در نظر بگیرید. اگر تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از P به فاصله ۳ و از Q به فاصله ۴ باشد، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای طول پاره خط PQ کدام است؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

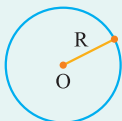
پاسخ: گزینه ۴

دو دایره $C(P, 3)$ و $C'(Q, 4)$ ، باید تنها یک نقطه مشترک داشته باشند.

Hint

درس Box

۱) همه نقاطی از صفحه که از نقطه معلوم O به فاصله معلوم R هستند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R واقع‌اند.

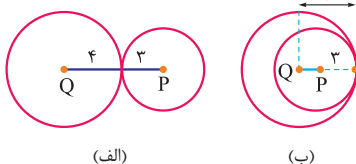


۲) دو دایره، تنها زمانی دارای دقیقاً یک نقطه مشترک هستند که بر هم مماس باشند. توجه کنید که مماس بودن دو دایره دو حالت دارد: مماس خارج یا مماس داخل.

گام اول: تمام نقاطی که از P به فاصله ۳ هستند، روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۳ واقع‌اند و به همین ترتیب، تمام نقاطی که از Q به فاصله ۴ هستند، روی دایره‌ای به مرکز Q و شعاع ۴ واقع‌اند.

گام دوم: دو دایره‌ای که در گام اول به آن‌ها اشاره کردیم، باید دارای دقیقاً یک نقطه مشترک باشند، یعنی باید این دو دایره بر هم مماس باشند.

گام سوم: با توجه به گام قبل، باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد.



در حالت (الف)، $PQ = 4 + 3 = 7$ و در حالت (ب)، $PQ = 4 - 3 = 1$ ، پس خواسته سؤال برابر است با $1 + 7 = 8$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در آن $\hat{A} = 90^\circ$ ، نقطه P واقع بر ضلع AB از وتر و رأس زاویه قائمه به یک فاصله است.

اگر در این مثلث $\hat{B} = 4\hat{C}$ ، آن گاه زاویه حاده بین CP و ضلع AB چند درجه است؟

- | | |
|----------|--------|
| ۷۲ (۲) | ۸۱ (۱) |
| ۶۷/۵ (۴) | ۷۵ (۳) |

پاسخ: گزینه ۱

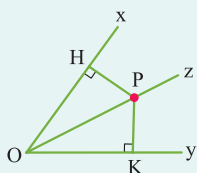
شکل مناسب را رسم کنید، نقطه P بر نیمساز زاویه C واقع است.

Hint

کریس Box

(۱) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، 180° است.

(۲) یک نقطه، از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله است، اگر و فقط اگر روی نیمساز آن زاویه واقع باشد.



یعنی در شکل بالا، داریم:

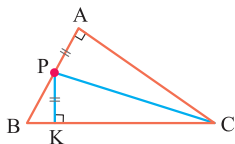
$PH = PK \Leftrightarrow Oz \text{ نیمساز } xOy \text{ است.}$

گام اول: در مثلث ABC ، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow[\hat{B} = 4\hat{C}]{\hat{A} = 90^\circ} 90^\circ + 4\hat{C} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 18^\circ$$

گام دوم: شکل مناسب را رسم می‌کنیم.

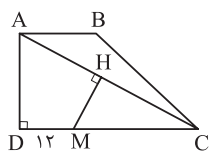


همان‌طور که می‌بینید، نقطه P از دو ضلع زاویه C به یک فاصله است، پس CP نیمساز زاویه C است.

گام سوم: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ACP را برابر با 180° قرار می‌دهیم:

$$90^\circ + \frac{18^\circ}{2} + \hat{APC} = 180^\circ \Rightarrow \hat{APC} = 81^\circ$$

در دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ ، عمود منصف قطر AC ، قاعده CD را در نقطه M قطع کرده است. اگر $DM = ۱۲$ و $AD = \frac{1}{3} CD$ باشد، اندازه قطر AC کدام است؟



$$۱۸\sqrt{۳} \quad (۲)$$

$$۳۶ \quad (۱)$$

$$۹\sqrt{۱۰} \quad (۴)$$

$$۲۷ \quad (۳)$$

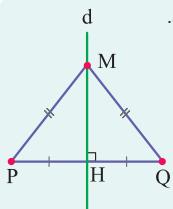
پاسخ: گزینه ۴

از M به A وصل کنید.

Hint

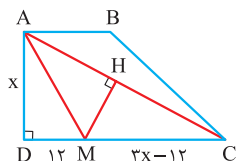
درس Box

یک نقطه، از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است، اگر و فقط اگر روی عمود منصف آن پاره خط واقع باشد.



$d \Leftrightarrow MP = MQ$ عمود منصف PQ است.

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: مطابق شکل از A به M وصل می کنیم. فرض کنید $AD = x$ باشد. در

این صورت $CD = 3x$ و در نتیجه $CM = 3x - ۱۲$ است. از طرفی M روی

عمود منصف AC قرار دارد، پس $AM = CM = 3x - ۱۲$.

گام دوم: طبق قضیه فیثاغورس در مثلث AMD داریم:

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 \Rightarrow (3x - ۱۲)^2 = x^2 + ۱۲^2 \Rightarrow 9x^2 - 72x + ۱۴۴ = x^2 + ۱۴۴ \Rightarrow 8x^2 - 72x = 0$$

$$\Rightarrow 8x(x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = 9 & \Rightarrow AD = 9, CD = ۲۷ \end{cases}$$

گام سوم: طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ADC داریم:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 9^2 + ۲۷^2 = 9^2(1 + 3^2) = 9^2 \times ۱۰ \Rightarrow AC = 9\sqrt{۱۰}$$

در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز خارجی زاویه C ، امتداد ضلع AB را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $BC = CD$ ، آن‌گاه زاویه BAC چند درجه است؟

۷۲ (۲)

۱۰۸ (۱)

۱۰۵ (۴)

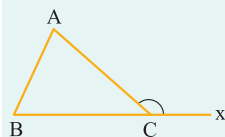
۷۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

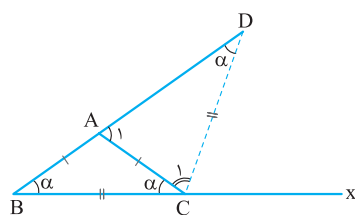
درس Box

(۱) در مثلث متساوی الساقین، زاویه‌های روبه‌روی ساق‌ها با هم برابرند.

(۲) هر زاویه خارجی یک مثلث، برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن. مثلاً در شکل مقابل، داریم:



$$\widehat{ACx} = \widehat{A} + \widehat{B}$$



گام اول: در مثلث متساوی الساقین ABC ، در نظر می‌گیریم $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ و شکل مناسب را رسم می‌کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، مثلث BCD متساوی الساقین است، در نتیجه $\widehat{D} = \widehat{B} = \alpha$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: زاویه $\widehat{A_1}$ برای مثلث ABC ، زاویه خارجی است، پس $\widehat{A_1} = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

از طرفی CD ، نیمساز زاویه $\widehat{ACx}$ است، پس:

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{2} \widehat{ACx} = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

گام سوم: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ACD را برابر با 180° قرار می‌دهیم:

$$\widehat{A_1} + \widehat{C_1} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \frac{5\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

پس:

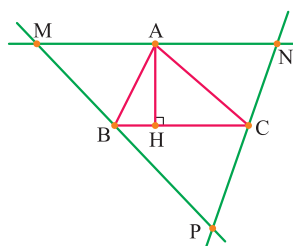
$$\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{A_1} = 180^\circ - (2 \times 36^\circ) = 108^\circ$$

از هر رأس مثلث ABC ، خطی موازی با ضلع مقابل به همان رأس رسم می‌کنیم. از تقاطع این سه خط، مثلث MNP تشکیل می‌شود، کدام گزینه درست است؟

- (۱) ارتفاع‌های مثلث MNP ، عمودمنصف‌های مثلث ABC هستند.
- (۲) ارتفاع‌های مثلث MNP ، نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ABC هستند.
- (۳) ارتفاع‌های مثلث ABC ، عمودمنصف‌های مثلث MNP هستند.
- (۴) ارتفاع‌های مثلث ABC ، میانه‌های مثلث MNP هستند.

مشاوره این سؤال، از اثبات قضیه «همرسی ارتفاع‌های مثلث» طرح شده است، پس علاوه بر آزمون‌های تشریحی، برای موفقیت در آزمون‌های تستی هم لازم است با اثبات قضایا آشنایی داشته باشید.

پاسخ: گزینه ۲



گام اول: چهارضلعی $ABCN$ ، متوازی‌الاضلاع است (اضلاع روبه‌روی آن، با هم موازی‌اند)، پس $AN = BC$ و چهارضلعی $ACBM$ نیز متوازی‌الاضلاع است، پس $AM = BC$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $AM = AN$ ؛ یعنی A وسط MN است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: فرض کنید AH ارتفاع نظیر ضلع BC باشد. پاره‌خط MN مطابق فرض موازی BC است، چون AH بر BC عمود است، پس بر MN نیز در نقطه A عمود است؛ یعنی AH عمودمنصف MN است؛ بنابراین اگر نظیر همین استدلال را برای سایر ارتفاع‌های مثلث ABC نیز انجام دهیم، نتیجه می‌گیریم ارتفاع‌های مثلث ABC ، عمودمنصف‌های مثلث MNP هستند.

۳۰

طول اضلاع یک مثلث n ، $n-1$ و n^2-1 است. حدود مقادیر n کدام است؟

$$1 < n < \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$n > \sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\sqrt{2} < n < ۲ \quad (۴)$$

$$1 < n < \sqrt{2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

در مثلثی به طول اضلاع a ، b و c ، سه نامساوی زیر برقرار است:

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b$$

به بیان دیگر در هر مثلث طول هر ضلع، از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر کم‌تر است.

می‌توانیم سه نامساوی بالا را با هم تلفیق و به صورت $|b - c| < a < b + c$ بیان کنیم.

گام اول: در نظر می‌گیریم $a = n^2 - 1$ ، $b = n$ و $c = n - 1$ ، بنا به آنچه در درس‌پاکس گفتیم، باید:

$$|b - c| < a < b + c \Rightarrow 1 < n^2 - 1 < 2n - 1 \quad (*)$$

گام دوم: با توجه به (*) از اشتراک جواب‌های دو نامعادله $\begin{cases} 1 < n^2 - 1 \\ n^2 - 1 < 2n - 1 \end{cases}$ به دست می‌آید.

گام سوم: دو نامعادله‌ای را که در گام قبل به آن‌ها اشاره کردیم، حل می‌کنیم:

$$1 < n^2 - 1 \Rightarrow 2 < n^2 \xrightarrow{n > 0} n > \sqrt{2} \quad (۱)$$

$$n^2 - 1 < 2n - 1 \Rightarrow n^2 - 2n < 0 \Rightarrow n(n - 2) < 0 \Rightarrow 0 < n < 2 \quad (۲)$$

از اشتراک نامعادله‌های (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم $\sqrt{2} < n < 2$.

کرتس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام گزاره فاقد مثال نقض است؟

- (۱) حاصل ضرب یک عدد گویا در معکوس یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
- (۲) اگر عدد k برابر با حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن گاه $\sqrt{4k+1} \in \mathbb{N}$.
- (۳) اگر برای سه مجموعه A ، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ ؛ آن گاه $B = C$.
- (۴) میانگین ۵ عدد فرد برابر با عدد وسطی است.

مشاوره درس اول نظریه اعداد در مورد روش‌های استدلال است. خطبه‌خط کتاب درسی در این قسمت خیلی خیلی مهم است و بیشتر تست‌های این درس مشابه تمرین‌های کتاب هستند. درست است که تا به حال از این درس سوآلی در کنکور نیامده است، اما در امتحان نهایی بارم خوبی دارد.

پاسخ: گزینه ۲

فاقد مثال نقض است، یعنی درست است.

Hint

درسی Box

بخش‌پذیری‌های مهم کتاب درسی:

ردیف	فارسی	ریاضی
۱	ضرب دو عدد صحیح متوالی، زوج است.	$n(n+1) = 2q$
۲	ضرب سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ است.	$n(n+1)(n+2) = 6q$ یا $n(n-1)(n+1) = n^3 - n = 6q$
۳	ضرب n عدد صحیح متوالی، بر $n!$ بخش‌پذیر است.	—
۴	مربع هر عدد فرد، در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر یک دارد.	$n = 2k+1 \rightarrow n^2 = 4k+1$
۵	اگر k ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، $4k+1$ مربع کامل است.	$k = n(n+1) \rightarrow 4k+1 = (2n+1)^2$

گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

 گزینه (۱): نادرست است؛ برای مثال نقض کافی است عدد گویا را برابر صفر و عدد گنگ را برابر $\sqrt{2}$ بگیریم، پس داریم:

$$0 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{گویا}$$

 گزینه (۲): درست است؛ اگر k را به صورت ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یعنی $n(n+1)$ بگیریم.

$$k = n(n+1) \rightarrow 4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2 + 4n+1 = (2n+1)^2$$

$$\sqrt{4k+1} = \sqrt{(2n+1)^2} = 2n+1 \in \mathbb{N}$$

 گزینه (۳): نادرست است؛ کافی است ۳ مجموعه A ، B و C را طوری مثال بزنیم که رابطه $A \cup B = A \cup C$ درست باشد، ولی $B \neq C$. مثلاً:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1\}, \quad C = \{2\}$$

 گزینه (۴): نادرست است؛ کافی است ۵ عدد فرد ۱۱ و ۹ و ۷ و ۳ و ۱ را مثال بزنیم که میانگین آن‌ها برابر با عدد وسطی نیست. **حواست باشه:** میانگین ۵ عدد صحیح متوالی برابر با عدد وسط است.

۳۲

مجموعه S برابر با اعداد طبیعی یک‌رقمی بوده و $n \in S$. اگر عدد $\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$ زوج باشد، آن‌گاه $n \in A$.

مجموعه A چند عضو دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

مشاوره نکته کلی این سؤال را حتماً خوب‌خوب یاد بگیرید، چون پای ثابت تمام کنکورهای آزمایشی (یا شاید کنکور) است.

پاسخ: گزینه ۲

Hint

$$\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ است. کافی است ببینیم به ازای کدام اعداد عضو S عبارت $\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$ زوج می‌شود.

گام دوم: داریم $\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. از طرفی اگر توان دوم عددی زوج باشد، خود عدد هم باید زوج باشد؛ پس $\frac{n(n+1)}{2}$ باید زوج باشد.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2k \rightarrow n(n+1) = 4k$$

گام سوم:

گام چهارم: n و $n+1$ دو عدد متوالی هستند، پس یکی فرد و دیگری زوج است. برای این‌که ضرب آن‌ها مضرب ۴ باشد، یکی از آن‌ها باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد:

$$\begin{cases} n = 4k \\ \text{یا} \\ n+1 = 4k \rightarrow n = 4k-1 \end{cases}$$

گام پنجم: اعداد مضرب ۴ (مثل ۴ و ۸) یا اعدادی که یک واحد از مضرب ۴ کمتر هستند (مثل ۳ و ۷)، قابل قبول هستند؛ پس عدد n باید متعلق به مجموعه $\{3, 4, 7, 8\}$ باشد. پس A دارای ۴ عضو است.

حواست باشه: با جست‌وجوی اعداد ۱ تا ۹ هم می‌توانستید بفهمید که چه موقع عبارت زوج می‌شود، ولی بهتر است شکل n را

حفظ باشید. پس اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، $n = 4k$ یا $n = 4k-1$.

گام ششم: $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ است و $n \in S$. اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n \in A$.

(ریاضیات گسسته - کار در کلاس (قسمت ب) صفحه ۵ کتاب درسی)

کتاب
درسی

α و β دو عدد گنگ و $\alpha + \beta$ ، عددی گویا است. کدام گزینه در مورد اعداد $\alpha - \beta$ و $\alpha\beta$ به ترتیب درست است؟

(۱) گنگ - گنگ

(۲) گنگ - ممکن است گنگ یا گویا باشد.

(۳) ممکن است گنگ یا گویا باشد. - گنگ

(۴) ممکن است گنگ یا گویا باشد. - ممکن است گنگ یا گویا باشد.

پاسخ: گزینه ۲

مثالهایی بنویسید که در فرض صدق کنند.

Hint

درس Box

اثبات گنگ بودن اعداد با برهان خلف صورت می گیرد. در کل حالت های زیر را برای جمع و تفریق و ضرب اعداد گویا و گنگ داریم:

	$x \pm y$	xy	x^y
x و y یکی گنگ و دیگری گویا	گنگ	ممکن است گنگ یا گویا باشد. (گویا) $\times$ گنگ = ۰ گنگ $\times$ گویای غیر صفر = گنگ	ممکن است گنگ یا گویا باشد.
x و y هر دو گنگ	ممکن است گنگ یا گویا باشد.	ممکن است گنگ یا گویا باشد.	ممکن است گنگ یا گویا باشد.

حواست باشه: وارون عدد گنگ، گنگ است و وارون عدد گویای ناصفر نیز گویا است.

گام اول: سعی می کنیم $\alpha - \beta$ را به اعداد داده شده ارتباط دهیم:

$$\alpha - \beta = \underbrace{\alpha + \beta}_{\text{گویا}} - \underbrace{2\beta}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ}$$

گام دوم: $\alpha\beta$ ممکن است گویا باشد یا گنگ؛ مثلاً اگر $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = -\sqrt{2}$ بگیریم، $\alpha + \beta$ گویا می شود و (گویا) $\alpha\beta = -2$.

اما اگر $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ و $\beta = -\sqrt{2}$ بگیریم، $\alpha + \beta$ گویا می شود، ولی $\alpha\beta$ گنگ است:

$$(1 + \sqrt{2})(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

میانگین اعداد صحیح a_1, a_2 و a_3 با میانگین اعداد صحیح b_1, b_2 و b_3 برابر است. با استفاده از روش می توان ثابت کرد که عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ همواره عددی است.

- (۱) برهان خلف - زوج
(۲) برهان خلف - فرد
(۳) اثبات مستقیم - زوج
(۴) اثبات بازگشتی - فرد

مشاوره تمرین مهم کتاب درسی. اثبات و نکات حاشیه‌ای مربوط به آن را به خوبی یاد بگیرید.

پاسخ: گزینه ۱

عدگذاری کرده و رد گزینه کنید (اما اثبات آن را یاد بگیرید).

Hint

درسی Box

تمرین مهم کتاب درسی:

تمرین مهمی در کتاب درسی وجود دارد که می‌گوید: «اگر a_1, a_2 و a_3 سه عدد صحیح و b_1, b_2 و b_3 همان اعداد ولی با ترتیب متفاوتی باشند، آن‌گاه $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است».

اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد؛ پس فرد است. از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب چند عدد، فقط وقتی فرد می‌شود که تک‌تک آن اعداد فرد باشند، پس $(a_1 - b_1)$ ، $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ فرد هستند. جمع سه عدد فرد، فرد است، ولی جمع این ۳ عدد صفر می‌شود؛ چون:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = 0 \quad (\text{تناقض})$$

در مورد این تمرین، خوب است نکات زیر را به یاد داشته باشید:

(۱) این قضیه برای اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ که b_i ها همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند نیز برقرار است، به شرطی که n (تعداد اعداد) فرد باشد.

(۲) اگر b_i در پرانتزها را جابه‌جا کنیم، باز هم قضیه برقرار است؛ مثلاً عدد $(a_1 - b_3)(a_2 - b_2)(a_3 - b_1)$ نیز زوج است.

(۳) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ (چون فقط ترتیب اعداد فرق دارد؛ پس مجموع اعداد یکسان می‌شود). تناقض حاصل در روش برهان خلف نیز از همین‌جا می‌آید.

(۴) تساوی زیر همواره درست است:

$$a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_n$$

(۵) اگر k فرد باشد، عبارت $(ka_1 - b_1)(ka_2 - b_2) \dots (ka_n - b_n)$ نیز زوج است.

(۶) عبارت $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)$ نیز زوج است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از روش برهان خلف می‌توانیم ثابت کنیم که عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ ، عددی زوج است.

گام دوم: فرض می‌کنیم عبارت داده‌شده فرد است، پس ضرب سه پرانتز موجود فرد است، در نتیجه همگی آن‌ها فرد هستند.

گام سوم: $a_1 - b_1$ ، $a_2 - b_2$ و $a_3 - b_3$ فرد هستند، پس جمع آن‌ها نیز فرد است.

$$A = a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 = (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3)$$

گام چهارم: میانگین a_1, a_2 و a_3 با میانگین اعداد b_1, b_2 و b_3 برابر است، پس $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$ ، پس $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$.

گام پنجم: طبق گام سوم، جمع ۳ عدد فرد، فرد است؛ ولی با توجه به گام چهارم $A = 0$. تناقض حاصل نشان می‌دهد که خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۲۵ برای اثبات درستی رابطه $6x^2 + 5y^2 \geq 2x + 8yx - 1$ به روش بازگشتی، به کدام نامساوی همواره درست می‌رسیم؟

$$(1) (x - y)^2 + (y - 1)^2 + (2y - x)^2 \geq 0$$

$$(2) (x - 2y)^2 + (x + 1)^2 + (2y - x)^2 \geq 0$$

$$(3) (x - 1)^2 + (x - 2y)^2 + (2x - y)^2 \geq 0$$

$$(4) (x - 1)^2 + (x - 2y)^2 + (2y - x)^2 \geq 0$$

مشاوره سؤال بسیار مهمی است، مشابه تمرین‌های کتاب و سؤال‌های نهایی. در کنکور ۱۴۰۴ توجه بسیار زیادی به تمرین‌های کتاب درسی شده بود و مطمئن باشید این روند در سال‌های آینده هم تکرار خواهد شد.

پاسخ: گزینه ۳

$6x^2$ و $5y^2$ را جوری خرد کنید که چندتا اتحاد مربع دربیاید.

Hint

گام اول: همه عبارت‌ها را به یک طرف منتقل می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی**

$$6x^2 + 5y^2 - 2x - 8yx + 1 \geq 0$$

گام دوم: عبارت‌های $6x^2$ ، $5y^2$ و $-8yx$ را می‌شکنیم تا بتوانیم سه‌تا اتحاد مربع درست کنیم:

$$\underline{x^2} + \underline{x^2} + \underline{4x^2} + \underline{4y^2} + \underline{y^2} - \underline{2x} - \underline{4yx} - \underline{4yx} + \underline{1} \geq 0$$

$$\underbrace{(x - 1)^2 + (x - 2y)^2 + (2x - y)^2}_{\text{همواره درست}} \geq 0$$

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$$

برای هر دو عدد حقیقی x و y به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

(سؤال ۲ - امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۲)

امتحان
نهایی

۳۶ p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه است. ارزش گزاره‌های $(p \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ و p و $(q \vee r) \Leftrightarrow \sim p$ به ترتیب چگونه است؟

(۲) $T _ F$
(۴) $\sim r$ - مانند T

(۱) $F _ T$
(۳) r - مانند T

پاسخ: گزینه ۴

اگر p درست باشد، $p \vee r$ و $r \Rightarrow p$ صرف نظر از ارزش r درست هستند.

Hint

گام اول: در گزاره شرطی « $r \Rightarrow p$ » اگر p درست باشد، صرف نظر از ارزش r ، گزاره درست است؛ پس داریم:

$$\underbrace{(p \vee r)}_T \Rightarrow \underbrace{(r \Rightarrow p)}_T$$

بنابراین گزاره شرطی اول درست است.

گام دوم: چون q نادرست است، اگر r درست باشد، $q \vee r$ درست و اگر r نادرست باشد، $q \vee r$ نادرست است، اما $\sim p$ نادرست

است؛ پس داریم:

$\sim p$	q	r	$q \vee r$	$(q \vee r) \Leftrightarrow \sim p$
ن	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د

برعکس هم

بنابراین ارزش گزاره دوم مثل $\sim r$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ نادرست است. گزاره $((p \Rightarrow s) \wedge (q \vee s)) \Rightarrow r$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) s

۲) $\sim s$

۳) $r \Rightarrow s$

۴) $s \Rightarrow p$

مشاوره به نادرست بودن گزاره « $p \Rightarrow q$ » خیلی توجه کنید. این گزاره فقط در یک حالت از ۴ ردیف جدول ارزش، نادرست است.

پاسخ: گزینه ۲

گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ را به صورت $\square \Rightarrow \bigcirc$ ببینید.

گام اول: گزاره شرطی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ نادرست است، پس فرض p درست و حکم $q \Rightarrow r$ نادرست است.

گام دوم: چون $q \Rightarrow r$ نادرست است، q درست و r نادرست است.

گام سوم: چون q درست است، $q \vee s$ درست است، اما ارزش « $p \Rightarrow s$ » چون p درست است، هم‌ارز s است (یعنی اگر s درست باشد، درست و اگر s نادرست باشد، نادرست است).

گام چهارم: چون $p \wedge T = p$ داریم:

گام پنجم: باید ببینیم ارزش گزاره « $s \Rightarrow r$ » چگونه است. چون r نادرست است، داریم:

s	r	$s \Rightarrow r$
د	ن	ن
ن	ن	د

$\Rightarrow s \Rightarrow r \equiv \sim s$

برعکس هم

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عکس نقیض گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ به کدام صورت است؟ **۳۸**

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \quad (۱)$$

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \quad (۲)$$

$$(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \quad (۳)$$

$$(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \quad (۴)$$

مشاوره هم‌ارزی ترکیب شرطی و نقیض و عکس نقیض و نقیض عکس آن خیلی مهم است و پای ثابت همه کنکورهای آزمایشی و کنکور اصلی و فرعی و ... است.

پاسخ: گزینه ۲

هم‌ارزی ترکیب شرطی به صورت $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ است.

ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید. دقت کنید که هم‌ارزی ترکیب شرطی به صورت مقابل است: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
هم‌ارز بودن دو گزاره: اگر دو گزاره p و q هم‌ارز باشند، p هم‌ارز است با q و می‌نویسیم $p \equiv q$.

هم‌ارزی‌های مهم:

$$p \wedge F \equiv F \quad p \wedge \sim p \equiv F \quad p \vee \sim p \equiv T \quad p \wedge T \equiv p \quad p \vee F \equiv p \quad p \vee T \equiv T$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad (۱) \text{ شرکت پذیری:}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (۲) \text{ پخش‌ی:}$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad (۳) \text{ دمورگان:}$$

(۴) ترکیب شرطی:

نکته‌ها	فارسی		
	جای فرض و حکم را عوض می‌کنیم. هم‌ارز خود ترکیب $p \Rightarrow q$ نیست.	$q \Rightarrow p$	عکس ترکیب شرطی
$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$	جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض می‌کنیم.	$\sim q \Rightarrow \sim p$	عکس نقیض ترکیب شرطی
$\sim (q \Rightarrow p) \equiv (\sim q \vee p) \equiv q \wedge \sim p$	جای فرض و حکم را عوض کرده و کل عبارت را نقیض می‌کنیم.	$\sim (q \Rightarrow p)$	نقیض عکس

گام اول: عکس نقیض گزاره $\square \Rightarrow \bigcirc$ ، به صورت $\bigcirc \Rightarrow \sim \square$ است. پس عکس نقیض گزاره داده‌شده به صورت زیر است:

$$\sim (\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$$

گام دوم: طبق قانون دمورگان، $\sim (\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$ است.

گام سوم: طبق هم‌ارزی ترکیب شرطی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ، پس داریم:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

پس عکس نقیض گزاره داده‌شده به صورت زیر است:

$$(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

p و q گزاره‌های دلخواهی هستند. گزاره $[p \vee (p \Leftrightarrow \sim q)] \Leftrightarrow [p \vee (p \Rightarrow q)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

(۲) $\sim p \wedge q$

(۱) $\sim p \vee \sim q$

(۴) $p \vee q$

(۳) $p \wedge q$

مشاوره سؤال خیلی خوبی است، مشابه سؤال کنکورهای اخیر. حتماً آن را بررسی کنید.

پاسخ: گزینه ۴

گروشه سمت راست ساده می‌شود و بعد از جدول ارزش استفاده کنید.

Hint

گام اول: بهتر است گزاره داده‌شده را کمی ساده‌تر کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$p \vee (p \Rightarrow q) \equiv p \vee (\sim p \vee q) \equiv \overbrace{(p \vee \sim p)}^T \vee q \equiv T$$

گام دوم: برای گروشه سمت چپ داریم:

p	q	$p \Leftrightarrow \sim q$	$p \vee (p \Leftrightarrow \sim q)$	$p \vee (p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow T$	$p \vee q$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن

گام سوم: با توجه به جدول ارزش گزینه‌ها متوجه می‌شویم که گزاره داده‌شده هم‌ارز $p \vee q$ است.

(سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

گزاره $\sim p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

(۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

(۲) $\sim [(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

(۳) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$

(۴) $\sim [(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

۴۰. نقیض گزاره «برخی از مقادیر گویا، با جذر خودشان برابر هستند.» به کدام صورت است؟

$$\exists x \in Q; x \neq \sqrt{x} \quad (۱)$$

$$\forall x \in Q'; x \neq \sqrt{x} \quad (۲)$$

$$\forall x \in Q; (x > \sqrt{x}) \vee (x < \sqrt{x}) \quad (۳)$$

$$\exists x \in Q; (x > \sqrt{x}) \wedge (x < \sqrt{x}) \quad (۴)$$

مشاوره از سور و نقیض آن فقط یک بار در سال ۹۸ سؤال مطرح شده است، پس بعید نیست که سؤال منطق کنکور ۱۴۰۵ از سور باشد.

پاسخ: گزینه ۲

با نقیض کردن سور، نوع آن عوض می‌شود (سور عمومی و وجودی).

Hint

درس Box

سور	نماد	فارسی	چه موقع درست است؟	نقیض
عمومی	$\forall$	به ازای هر	$\forall x \in U; p(x)$ وقتی به ازای هر x عضو U عبارت $p(x)$ درست باشد.	$\sim (\forall x \in U; p(x)) \equiv \exists x \in U; \sim p(x)$
وجودی	$\exists$	به ازای برخی یا وجود دارد	$\exists x \in U; p(x)$ وقتی $x \in U$ وجود داشته باشد که $p(x)$ درست باشد.	$\sim (\exists x \in U; p(x)) \equiv \forall x \in U; \sim p(x)$

$$\exists x \in Q; x = \sqrt{x}$$

گام اول: صورت ریاضی عبارت داده شده می‌شود:

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: برای نقیض عبارت بالا، $\exists$ تبدیل به $\forall$ و $x = \sqrt{x}$ نیز نقیض می‌شود:

$$\sim (\exists x \in Q; x = \sqrt{x}) \equiv \forall x \in Q; x \neq \sqrt{x}$$

گام سوم: اگر $x \neq \sqrt{x}$ ، پس $x > \sqrt{x}$ یا $x < \sqrt{x}$ و گزینه (۳) درست است.

متحرکی با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = 3 \text{ s}$ و $t_2 = 12 \text{ s}$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 15 \text{ m}$ و $x_2 = -12 \text{ m}$ عبور می‌کند. بردار مکان اولیه متحرک بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $21\vec{i}$ (۲) $-21\vec{i}$ (۳) $24\vec{i}$ (۴) $-24\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۳

Hint

درس‌Box

به کمک معادله مکان - زمان حرکت سرعت ثابت و تشکیل دستگاه معادلاتی، بردار مکان اولیه را به دست آورید.

برای متحرکی که با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، معادله مکان - زمان به صورت زیر است:

$$x = vt + x_0$$

در رابطه بالا، v سرعت جسم و x_0 مکان اولیه جسم است.

گام اول: اطلاعات عددی مسئله را در معادله مکان - زمان قرار می‌دهیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$3v + x_0 = 15 \quad (I)$$

$$12v + x_0 = -12 \quad (II)$$

گام دوم: با استفاده از معادلات به دست آمده و تشکیل دستگاه معادلاتی، مجهول مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3v + x_0 = 15 \\ 12v + x_0 = -12 \end{cases} \Rightarrow x_0 = -24 \text{ m} \Rightarrow \vec{x}_0 = (-24 \text{ m})\vec{i}$$

دونده‌ای با سرعت ثابت در جهت محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = 0 \text{ s}$ و $t_2 = 12 \text{ s}$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = -36 \text{ m}$ و $x_2 = +36 \text{ m}$ می‌گذرد. (سؤال ۲ - امتحان نهایی تهرانی فروردین ۱۴۰۴)

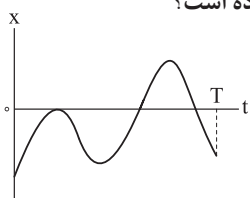
الف) بردار مکان دونده را در لحظه t_1 رسم کنید.

ب) معادله مکان - زمان دونده را در SI بنویسید.

پ) مسافت پیموده شده توسط دونده در بازه زمانی صفر تا 12 s چند متر است؟

امتحان
نهایی

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا T ، جهت حرکت متحرک و جهت بردار مکان آن، به ترتیب از راست به چپ، چند مرتبه تغییر کرده است؟



(۱) ۲، ۳

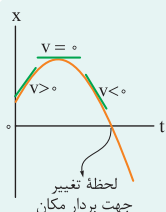
(۲) ۳، ۳

(۳) ۲، ۲

(۴) ۳، ۲

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

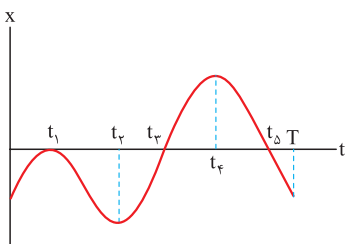


شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان بیانگر سرعت متحرک است. شرط تغییر جهت متحرک، صفر شدن سرعت ($v = 0$) و تغییر علامت آن است که در قله ها و دره های نمودار $x - t$ رخ می دهد. از طرفی در نمودار $x - t$ ، بردار مکان متحرک هنگام عبور نمودار از محور زمان تغییر جهت می دهد.

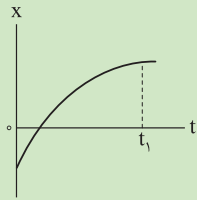
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در قله ها و دره های نمودار $x - t$ ، سرعت متحرک صفر می شود و سپس تغییر جهت می دهد. نمودار، دو قله و یک دره دارد! پس متحرک سه بار (در لحظه های t_1 ، t_2 و t_3 در شکل زیر) تغییر جهت داده است.

گام دوم: با عبور نمودار از محور زمان، بردار مکان متحرک تغییر جهت می دهد. دو مرتبه در لحظه های t_3 و t_5 نمودار از محور زمان عبور کرده است، پس بردار مکان، دو بار تغییر جهت داده است.



نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا t_1 چه



تعداد از موارد زیر درباره این متحرک درست است؟

الف) اندازه بردار مکان متحرک، به طور پیوسته افزایش می یابد.

ب) تندی متحرک به طور پیوسته کاهش می یابد.

پ) شتاب متحرک، پیوسته در جهت محور x است.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

بررسی موارد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) طبق نمودار، متحرک ابتدا به مبدأ مکان می رود و سپس از آن فاصله می گیرد؛ پس اندازه بردار مکان ابتدا کاهش و سپس

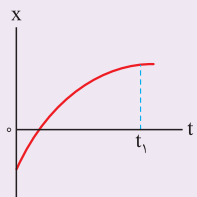
افزایش می یابد. ✗

ب) اندازه شیب مماس بر نمودار $x-t$ برابر تندی متحرک است. با توجه به نمودار، اندازه شیب و بنابراین تندی در حال کاهش است. ✓

پ) جهت تقعر نمودار به طرف پایین است؛ بنابراین شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است. ✗

شکل زیر نمودار مکان - زمان متحرکی را نشان می دهد که در امتداد محور x در حرکت است.

(فیزیک ۳ - پرسش ۱ - ۵ صفحه کتاب درسی)



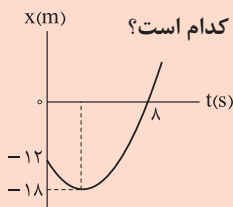
الف) از لحظه صفر تا لحظه t_1 سرعت متحرک رو به افزایش است یا کاهش؟

ب) اگر در لحظه t_1 خط مماس بر منحنی، موازی محور زمان باشد، سرعت متحرک در این

لحظه چه قدر است؟

کتاب
درسی

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، سرعت متوسط متحرک بر حسب متر بر ثانیه کدام است؟



(۱) $1/5 \vec{i}$

(۲) $-1/5 \vec{i}$

(۳) $3 \vec{i}$

(۴) $-3 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۱

بازه زمانی ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است را به دست آورید؛ سپس از رابطه $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ بردار سرعت متوسط را محاسبه کنید.

Hint

درس Box

بردار سرعت متوسط متحرک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

گام اول: در بازه زمانی ای که نمودار مکان - زمان متحرک زیر محور زمان است، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، یعنی بازه زمانی ۰ تا ۸ ثانیه.

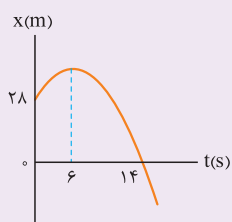
پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: با محاسبه جابه‌جایی در این بازه زمانی و جای‌گذاری در رابطه سرعت متوسط داریم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{[-12 - (-12)] \vec{i}}{8 - 0} = (1/5 \text{ m/s}) \vec{i}$$

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، چند متر بر ثانیه است؟

(سؤال ۵۲ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



(۱) $23/7$

(۲) $2/7$

(۳) ۲

(۴) ۱۲

کنکور

معادله سرعت - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می کند، در SI به صورت $v = t^2 - 4t + 5$ است. شتاب متوسط این متحرک از مبدأ زمان تا لحظه ای که سرعت آن به $\vec{v} = (1 \text{ m/s})\vec{i}$ می رسد، بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

- (۱) $4\vec{i}$ (۲) $-4\vec{i}$ (۳) $2\vec{i}$ (۴) $-2\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴



سرعت در مبدأ زمان (v_0) و لحظه t_1 که بردار سرعت در آن لحظه برابر $\vec{v}_1 = (1 \text{ m/s})\vec{i}$ است را به دست آورید و سپس از رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ خواسته سؤال را حساب کنید.

کسب Box

بردار شتاب متوسط متحرک از رابطه زیر به دست می آید:
($\vec{v}$): بردار سرعت متحرک (m/s)
t: زمان (s)

$$v_0 = (0)^2 - 4(0) + 5 = 5 \text{ m/s}$$

گام دوم: اکنون لحظه ای را که سرعت متحرک 1 m/s است، محاسبه می کنیم:

$$v = t^2 - 4t + 5 = 1 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

گام سوم: بردار شتاب متوسط متحرک را در بازه زمانی ۰ تا ۲ ثانیه به دست می آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_{2s} - v_0}{2 - 0} = \frac{(1 - 5)\vec{i}}{2} = (-2 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = 2t^2 - 8$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیه دوم چند متر بر مربع ثانیه است؟

(سؤال ۴۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۴

شتاب متوسط متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در ۲ ثانیه چهارم برابر $\vec{i} (-5 \text{ m/s}^2)$ و در ۶ ثانیه دوم برابر $\vec{i} (3 \text{ m/s}^2)$ است. شتاب متوسط این متحرک در ۴ ثانیه سوم برابر چند متر بر مربع ثانیه است؟

- (۱) $2\vec{i}$ (۲) $-2\vec{i}$
(۳) $7\vec{i}$ (۴) $-7\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از تعریف شتاب متوسط در ۲ بازه زمانی داده شده، خواسته سؤال را به دست آورید.

درس باکس تست ۴۵ را بخوانید.

Hint

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ۲ ثانیه چهارم یعنی بازه زمانی ۶ تا ۸ ثانیه؛ بنابراین داریم:

$$a_{av(6-8)} = \frac{v_{8s} - v_{6s}}{8 - 6} = -5 \Rightarrow v_{8s} - v_{6s} = -10 \quad (I)$$

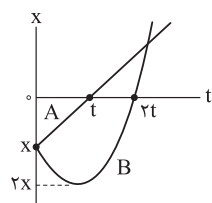
گام دوم: به همین ترتیب با داشتن شتاب متوسط در ۶ ثانیه دوم (۶ تا ۱۲ ثانیه) داریم:

$$a_{av(6-12)} = \frac{v_{12s} - v_{6s}}{12 - 6} = 3 \Rightarrow v_{12s} - v_{6s} = 18 \quad (II)$$

گام سوم: با ترکیب معادلات (I) و (II) مقدار $v_{12s} - v_{8s}$ و خواسته سؤال را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} v_{6s} - v_{8s} = 10 \\ v_{12s} - v_{6s} = 18 \end{cases} \Rightarrow v_{12s} - v_{8s} = 28 \Rightarrow \vec{a}_{av(8-12)} = \frac{\vec{v}_{12s} - \vec{v}_{8s}}{12 - 8} = \frac{28\vec{i}}{4} = (7 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. کدام مقایسه درباره تندی متوسط (s_{av}) و اندازه سرعت متوسط (v_{av}) این دو متحرک در بازه زمانی که هر متحرک از مکان اولیه اش



به مبدأ مکان می رسد، درست است؟

$$v_{avA} > v_{avB}, s_{avA} > s_{avB} \quad (1)$$

$$v_{avA} < v_{avB}, s_{avA} > s_{avB} \quad (2)$$

$$v_{avA} > v_{avB}, s_{avA} < s_{avB} \quad (3)$$

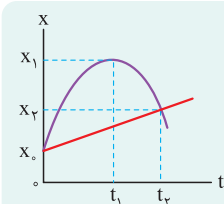
$$v_{avA} < v_{avB}, s_{avA} < s_{avB} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

v_{av} و s_{av} را برای دو متحرک A و B با استفاده از نمودار به دست آورید و سپس اندازه آنها را مقایسه کنید.

Hint

درسی Box



شیب خط قاطع در نمودار $x-t$ برابر با سرعت متوسط است:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{x}_T - \bar{x}_0}{t_T - t_0}$$

برای محاسبه تندی متوسط باید اندازه جابه جایی در دو طرف لحظه تغییر جهت (t_1) را بر زمان تقسیم کنیم:

$$s_{av} = \frac{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1|}{t_T - t_0}$$

گام اول: برای مقایسه تندی متوسط دو متحرک، ابتدا مسافت طی شده متحرک ها را در بازه زمانی ای که به مبدأ مکان می رسند،

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به دست می آوریم و سپس تندی های متوسط دو متحرک را مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} s_{avA} = \frac{x}{t} \\ s_{avB} = \frac{2x}{2t} \end{cases} \Rightarrow s_{avB} > s_{avA}$$

گام دوم: ابتدا اندازه جابه جایی ها و سپس اندازه سرعت متوسط های دو متحرک را محاسبه و آنها را مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} v_{avA} = \frac{x}{t} \\ v_{avB} = \frac{x}{2t} \end{cases} \Rightarrow v_{avA} > v_{avB}$$

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -3t^2 + 12t + 10$ است. در لحظه t_1 جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. در لحظه t_2 متحرک از مکان اولیه خود عبور می‌کند. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 چند متر بر ثانیه است؟

- ۱۲ (۴) ۹ (۳) ۶ (۲) ۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

لحظات t_1 (تغییر جهت متحرک) و t_2 (بازگشت به مکان اولیه) را به دست آورید و سپس تندی متوسط متحرک را محاسبه کنید.

Hint

کسب Box

معادله حرکت شتاب ثابت به فرم زیر می‌باشد:

سرعت اولیه (m/s) $\uparrow$
 $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \rightarrow$ مکان اولیه (m)
 $\downarrow$
 شتاب ثابت (m/s²)

لحظه تغییر جهت متحرک $t = -\frac{v_0}{a}$ و جابه‌جایی متحرک تا لحظه توقف $\Delta x = \frac{-v_0^2}{2a}$ می‌باشد.

گام اول: در لحظه تغییر جهت متحرک (t_1) سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = -3t^2 + 12t + 10 \\ v = at + v_0 = -6t + 12 \end{cases} \xrightarrow{v_{t_1}=0} -6t_1 + 12 = 0 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

گام دوم: با توجه به این که متحرک در لحظه t_2 به مکان اولیه $x_0 = 10 \text{ m}$ برمی‌گردد، داریم:

$$10 = -3t^2 + 12t + 10 \Rightarrow 3t^2 - 12t = 0 \Rightarrow 3t(t - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ ق ق} \\ t_2 = 4 \text{ s} \end{cases}$$

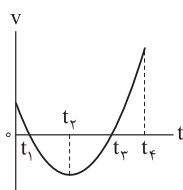
گام سوم: برای محاسبه تندی متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، با توجه به این که اندازه جابه‌جایی با مسافت طی شده بعد از لحظه تغییر جهت برابر است، داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = -3(2)^2 + 12(2) + 10 = 22 \text{ m} \\ t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 10 \text{ m} \end{cases}$$

$$s_{av} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|10 - 22|}{4 - 2} = 6$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر، قسمتی از یک سهمی است.



کدام یک از عبارتهای زیر درباره این متحرک درست است؟

الف) بزرگی شتاب متحرک در لحظه‌های t_1 و t_3 برابر است.

ب) در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، شتاب متحرک پیوسته در جهت حرکت آن است.

پ) در بازه زمانی t_2 تا t_4 ، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر کرده است.

ت) در بازه زمانی t_2 تا t_4 ، تندی متحرک به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) پ - ت

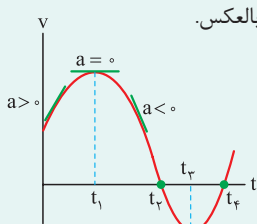
۱) الف - ب

۴) ب - ت

۳) الف - پ

پاسخ: گزینه ۲

در نمودار سرعت - زمان:



در لحظاتی که نمودار در بالای محور زمان است، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و بالعکس.

شیب خط مماس بر نمودار برابر شتاب متحرک است.

متحرک هنگام عبور نمودار از محور زمان، تغییر جهت می‌دهد (t_2 و t_4).

هنگام نزدیک شدن نمودار به محور زمان، حرکت کندشونده و هنگام فاصله گرفتن نمودار از محور زمان، حرکت تندشونده است.

بررسی تک به تک موارد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

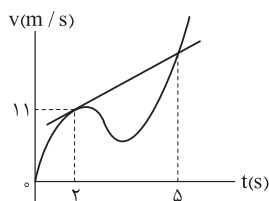
الف) در نمودار سرعت - زمان، شیب خط مماس برابر با شتاب متحرک است. از طرفی، چون نمودار، بخشی از یک سهمی است و

t_1 و t_3 نسبت به مرکز نمودار (t_2) تقارن دارند، پس اندازه شیب مماس‌ها (شتاب‌ها) با هم برابر هستند. ✓

ب) متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 در جهت محور x حرکت می‌کند، ولی شتاب در خلاف جهت محور x است. ✗

پ) در نمودار سرعت - زمان، متحرک هنگام عبور از محور زمان، تغییر جهت می‌دهد؛ پس در لحظات t_1 و t_3 (۲ مرتبه) متحرک تغییر جهت می‌دهد.

ت) تندی متحرک ابتدا کاهش (t_2 تا t_3) و سپس افزایش (t_3 تا t_4) می‌یابد. ✗



۵۰. نمودار سرعت-زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر اندازه شتاب متحرک در لحظه $t = 2$ s برابر با 3 m/s^2 باشد، اندازه شتاب متوسط متحرک در ۵ ثانیه اول چند متر بر مربع ثانیه است؟ (خط مماس بر نمودار در لحظه $t = 2$ s رسم شده است.)

۳ (۲)

۱ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

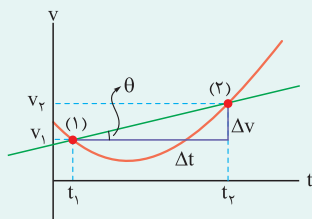
پاسخ: گزینه ۳

با توجه به مفهوم هندسی شیب خط قاطع و مماس در نمودار سرعت - زمان خواسته مسئله را به دست آورید.

Hint

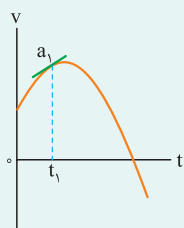
درس Box

در نمودار سرعت - زمان، شیب خط قاطع بین دو نقطه از نمودار، بیانگر شتاب متوسط است:



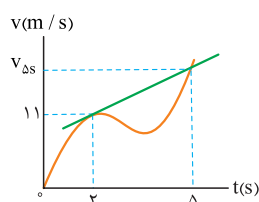
$$a_{av(t_1 - t_2)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

همچنین در هر لحظه شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان بیانگر شتاب لحظه‌ای است.



گام اول: شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر با شتاب متحرک است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

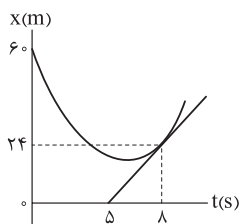


$$a_{ts} = \frac{v_{\Delta s} - v_{ts}}{\Delta - 2} = 3 \Rightarrow \frac{v_{\Delta s} - 11}{3} = 3 \Rightarrow v_{\Delta s} = 20 \text{ m/s}$$

گام دوم: با استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(0-5)} = \frac{v_{\Delta s} - v_0}{\Delta - 0} = \frac{20 - 0}{5} = 4 \text{ m/s}^2$$

نمودار مکان-زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول، ۲۵ درصد کمتر از تندی متحرک در لحظه $t = ۸$ s باشد، کمترین فاصله متحرک از مبدأ مکان چند متر است؟ خط مماس بر نمودار در لحظه $t = ۸$ s رسم شده است.



۱۲ (۱)

۱۶ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

Hint

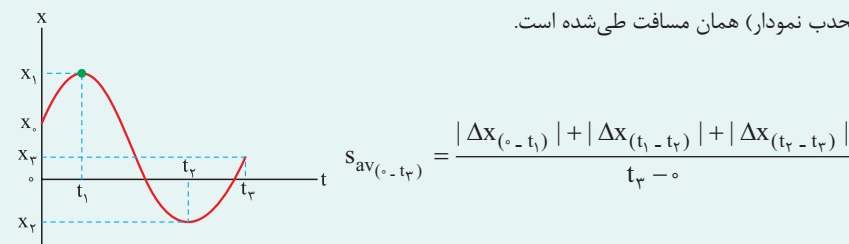
با استفاده از نمودار، S_{AS} و $S_{av(0-8)}$ را محاسبه و با توجه به رابطه داده‌شده بین آن‌ها، کمترین فاصله متحرک از مبدأ مکان را به دست آورید.

درس‌Box

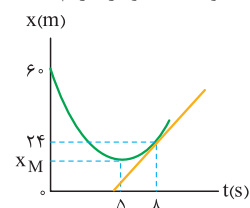
در نمودار مکان-زمان:

● تندی لحظه‌ای برابر اندازه شیب خط مماس بر نمودار است.

● تندی متوسط برابر نسبت مسافت طی‌شده به زمان است و باید دقت کنیم که مجموع اندازه جابه‌جایی در بازه‌های زمانی حول لحظه توقف (تقعر و تحدب نمودار) همان مسافت طی‌شده است.



گام اول: تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول برابر با نسبت مسافت طی‌شده به مدت‌زمان است. با توجه به نمودار داریم:



$$S_{av(0-8)} = \frac{(60 - x_M) + (24 - x_M)}{8} = \frac{84 - 2x_M}{8}$$

گام دوم: شیب خط مماس بر نمودار در لحظه $t = ۸$ s برابر با سرعت و تندی متحرک در این لحظه است:

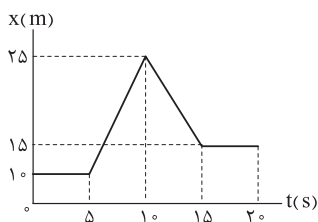
$$v_{AS} = S_{AS} = \frac{24}{8 - 5} = ۸ \text{ m/s}$$

گام سوم: با توجه به رابطه بین S_{AS} و $S_{av(0-8)}$ ، کمترین فاصله متحرک از مبدأ (x_M) را به دست می‌آوریم:

$$S_{av(0-8)} = S_{AS} - \frac{25}{100} S_{AS} = \frac{75}{100} S_{AS} \Rightarrow S_{av(0-8)} = \frac{3}{4} S_{AS} \Rightarrow \frac{84 - 2x_M}{8} = \frac{3}{4} (۸) \\ \Rightarrow 84 - 2x_M = 48 \Rightarrow 2x_M = 36 \Rightarrow x_M = ۱۸ \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در بازه $t_1 = 7\text{ s}$ تا $t_2 = 12\text{ s}$ چند متر بر مربع ثانیه است؟



(۱) $0 / 2 \hat{i}$

(۲) $-0 / 2 \hat{i}$

(۳) $\hat{i}$

(۴) $-\hat{i}$

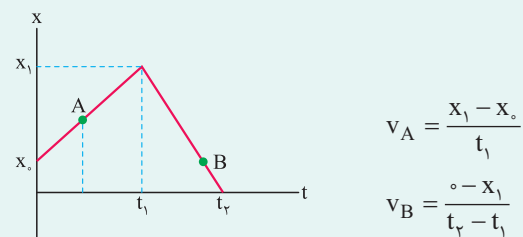
پاسخ: گزینه ۴

Hint

درس Box

با توجه به نمودار، v_{12s} و v_{7s} را محاسبه و سپس $\vec{a}_{av}$ در بازه زمانی $(12s - 7s)$ را به دست آورید.

نمودار مکان - زمان حرکت ثابت به صورت خطی با شیب ثابت است. بنابراین سرعت در همه لحظات این نوع حرکت همان شیب خط است:



گام اول: شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر با سرعت متحرک است. برای به دست آوردن v_{12s} و v_{7s} ، با توجه به این که شیب و سرعت در بازه‌های زمانی $(10s - 5s)$ و $(15s - 10s)$ ثابت است، داریم:

$$v_{7s} = \frac{x_{10} - x_5}{10 - 5} = \frac{15}{5} = 3 \text{ m/s}$$

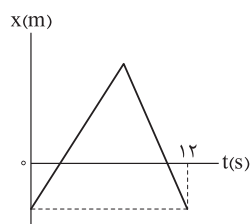
$$v_{12s} = \frac{x_{15} - x_{10}}{15 - 10} = \frac{-10}{5} = -2 \text{ m/s}$$

گام دوم: اکنون بردار شتاب متوسط متحرک را در بازه زمانی خواسته شده به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av(12-7)} = \frac{\vec{v}_{12} - \vec{v}_7}{12 - 7} = \frac{(-2 - 3)\hat{i}}{5} = (-1 \text{ m/s}^2)\hat{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در بازه ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، تندی متوسط متحرک برابر 6 m/s باشد، بیشینه فاصله متحرک از مکان اولیه اش چند متر است؟



(۱) ۲۴

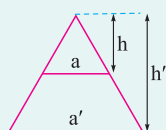
(۲) ۳۶

(۳) ۴۸

(۴) ۷۲

پاسخ: گزینه ۲

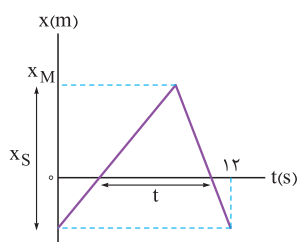
در بسیاری از سؤالات مربوط به نمودارهای حرکت شناسی و به ویژه حرکت سرعت ثابت، می توان از قضیه تالس استفاده کرد:



$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$$

گام اول: مطابق شکل بردار مکان در بازه زمانی t در جهت محور x است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$s_{av} = \frac{2x_M}{t} = 6 \Rightarrow \frac{x_M}{t} = 3$$

گام دوم: بیشترین فاصله متحرک از مکان اولیه اش برابر x_S است. با نوشتن قضیه تالس بین دو مثلث، مقدار x_S را محاسبه می کنیم:

$$\frac{x_S}{12} = \frac{x_M}{t} = 3 \Rightarrow x_S = 36 \text{ m}$$

خودرویی با تندی ثابت v بدون تغییر جهت، در مسیری مستقیم حرکت می‌کند و فاصله بین دو نقطه A و B را در مدت 40 min طی می‌کند. اگر خودرو در همین مسیر با تندی ثابت $v + 10 \text{ km/h}$ حرکت کند، فاصله بین این دو نقطه را در مدت 30 min طی خواهد کرد. فاصله دو نقطه A و B چند کیلومتر است؟

- ۱۵ (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

با نوشتن روابط حرکت سرعت ثابت، دو معادله به دست می‌آید؛ با ترکیب آن‌ها مسئله را حل کنید.

Hint

درس‌Box

معادلات حرکت سرعت ثابت به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} x = vt + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه (m)} \\ \Delta x = v\Delta t \end{cases}$$

↓
جابجایی (m)

گام اول: در حرکت با تندی ثابت از رابطه $\Delta x = v\Delta t$ استفاده می‌کنیم. توجه کنیم که اگر تندی برحسب km/h باشد، Δt و Δx به ترتیب باید برحسب h و km باشند.

$$\Delta x_{AB} = vt_1 \xrightarrow{t_1 = 40 \text{ min} = \frac{2}{3} \text{ h}} \Delta x_{AB} = v\left(\frac{2}{3}\right) \quad (1)$$

$$\Delta x_{AB} = (v + 10)t_2 \xrightarrow{t_2 = 30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h}} \Delta x_{AB} = \frac{(v + 10)}{2} \quad (2)$$

گام دوم: از برابری روابط (۱) و (۲) ابتدا v و سپس Δx_{AB} را به دست می‌آوریم:

$$v\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{(v + 10)}{2} \Rightarrow 4v = 3v + 30 \Rightarrow v = 30 \text{ km/h} \xrightarrow{\Delta x_{AB} = v\left(\frac{2}{3}\right)} \Delta x_{AB} = 30\left(\frac{2}{3}\right) = 20 \text{ km}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دانشود رایگان تمام آزمون های آزمایشی

در کانال تلگرام ما :

آزمونها آزمایشتی

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

سازمان پژوهش و آموزش کشور

سینج

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

آکا

زبختار

خدیجه
آزمون

کانون
فرهنگی
آموزش
قلمچی

آزمونهای سراسری
گاج



join us ...

۵۵

دو متحرک A و B روی محور x در فاصله معینی از هم قرار دارند. اگر دو متحرک به ترتیب با تندی‌های ثابت v_A و v_B در یک جهت حرکت کنند، پس از ۱۲ s، و اگر با همان تندی‌ها به سمت یکدیگر حرکت کنند، پس از ۸ s به هم می‌رسند. v_A چند برابر v_B است؟ ($v_A > v_B$)

۱ / ۵ (۱) ۲ / ۵ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

با استفاده از معادله مکان - زمان حرکت سرعت ثابت در دو حالت داده شده در سؤال، دو معادله به دست آورید و با حل دستگاه معادله‌ها، $\frac{v_A}{v_B}$ را حساب کنید.

درس Box

در سؤالات حرکت سرعت ثابت می‌توان از روش سرعت نسبی به صورت زیر استفاده کرد. اگر دو متحرک در یک جهت حرکت کنند: $v_{\text{نسبی}} = v_A - v_B$

و اگر به طرف هم حرکت کنند:

$$v_{\text{نسبی}} = v_A + v_B$$

گام اول: مکان متحرک A را مبدأ مکان فرض می‌کنیم و فاصله دو متحرک را d در نظر می‌گیریم. معادلات مکان - زمان دو متحرک را در حالتی که در یک جهت حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t \\ x_B = v_B t + d \end{cases} \xrightarrow[t=12s]{x_A=x_B} 12v_A = 12v_B + d \Rightarrow d = 12(v_A - v_B) \quad (1)$$

گام دوم: معادله‌های مکان - زمان دو متحرک را برای حالتی که به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t \\ x_B = -v_B t + d \end{cases} \xrightarrow[t=8s]{x_A=x_B} 8v_A = -8v_B + d \Rightarrow 8(v_A + v_B) = d \quad (2)$$

گام سوم: با برابر قرار دادن معادلات (۱) و (۲) خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$12(v_A - v_B) = 8(v_A + v_B) \Rightarrow 3v_A - 4v_B = 2v_A + 2v_B \Rightarrow v_A = 6v_B \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 6$$

یه‌چور دیگه

گام اول: سرعت نسبی دو متحرک را به دست می‌آوریم:

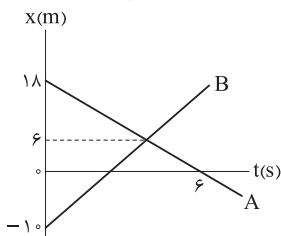
$$\begin{cases} (v_A - v_B)(12) = d \\ (v_A + v_B)(8) = d \end{cases}$$

گام دوم: با برابر قرار دادن دو معادله بالا داریم:

$$(v_A - v_B)(12) = (v_A + v_B)(8) \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 6$$

۵۶

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در این حرکت، چند ثانیه، فاصله دو متحرک کمتر از ۷ m یا مساوی آن است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

با توجه به نمودار، معادلات حرکت دو متحرک را به دست آورده و خواسته مسئله را محاسبه کنید.

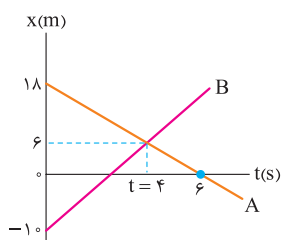
گام اول: چون نمودار مکان - زمان هر دو متحرک، به صورت خط راست است، نوع حرکت آن‌ها سرعت ثابت است. معادلات مکان - زمان متحرک A را می‌نویسیم:

$$v_A = \frac{0 - 18}{6 - 0} = -3 \text{ m/s} \quad \text{و} \quad x_{0(A)} = 18 \text{ m} \Rightarrow x_A = -3t + 18 \quad (I)$$

لحظه‌ای که نمودارها یکدیگر را قطع می‌کنند، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_A = 6 \text{ m} \xrightarrow{(I)} 6 = -3t + 18 \Rightarrow -3t = -12 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

معادله مکان - زمان متحرک B به صورت زیر به دست می‌آید:



$$v_B = \frac{6 - (-10)}{4} = 4 \text{ m/s} \quad \text{و} \quad x_{0(B)} = -10 \text{ m} \Rightarrow x_B = 4t - 10$$

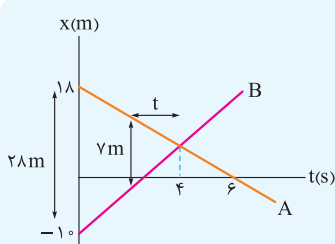
گام دوم: فاصله دو متحرک، باید کمتر یا مساوی ۷ متر باشد:

$$|x_A - x_B| \leq 7 \Rightarrow |-3t + 18 - (4t - 10)| \leq 7 \Rightarrow |7t - 28| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 7t - 28 \leq 7$$

$$\Rightarrow -1 \leq t - 4 \leq 1 \Rightarrow 3 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$$

بنابراین فاصله دو متحرک، مجموعاً به مدت $5 - 3 = 2 \text{ s}$ کمتر یا مساوی ۷ متر است.

با توجه به درس‌بکس تست ۵۳، از قضیه تالس داریم:

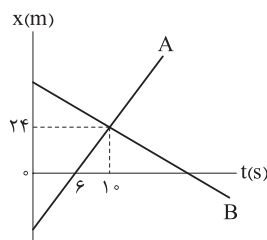


$$\frac{28}{4} = \frac{7}{t} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

$$\text{کل زمان} = 2t = 2 \text{ s}$$

یه‌چور دیگه

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر فاصله دو متحرک در مبدأ زمان برابر ۱۰۰ m باشد، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، جهت بردار مکان متحرک B تغییر می‌کند؟



۱۵ (۱)

۱۶ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

درس Box

با توجه به نمودار، ابتدا v_A و بعد v_B را محاسبه کنید و در آخر با استفاده از رابطه $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ لحظه تغییر جهت بردار مکان متحرک B را به دست آورید.

۳ پارامتر مشابه که اغلب دانش‌آموزان را به اشتباه می‌اندازد:

مکان اولیه (x_0): مکان جسم در لحظه $t = 0$.

مکان تغییر جهت: مکان جسم در لحظه‌ای که سرعت صفر است.

تغییر جهت بردار مکان: مبدأ یا $x = 0$.

گام اول: با توجه به اطلاعات نمودار، معادله مکان - زمان متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$v_A = \frac{24 - (-36)}{10 - 0} = 6 \text{ m/s} \Rightarrow x_A = 6t + x_{0A} \xrightarrow[t_{0A} = -36 \text{ m}]{t = 10 \text{ s}} 60 + x_{0A} = 24 \Rightarrow x_{0A} = -36 \text{ m}$$

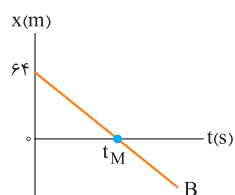
$$\Rightarrow x_A = 6t - 36$$

گام دوم: فاصله دو متحرک در مبدأ، همان $x_{0B} - x_{0A} = 100$ است؛ بنابراین x_{0B} و v_B را به دست می‌آوریم:

$$x_{0B} + 36 = 100 \Rightarrow x_{0B} = 64 \text{ m}$$

$$v_B = \frac{24 - 64}{10} = -4 \text{ m/s}$$

گام سوم: با داشتن سرعت B، لحظه تغییر جهت بردار مکان B را به دست می‌آوریم:



$$v_B = \frac{-64}{t_M} = -4 \Rightarrow t_M = 16 \text{ s}$$

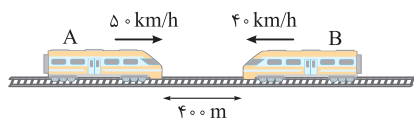
پاسخ خیلی تشریحی ✓

روی دو ریل مستقیم و موازی، دو قطار A و B به ترتیب با تندی‌های ثابت 50 km/h و 40 km/h به سمت یکدیگر حرکت می‌کند. طول دو قطار به ترتیب 200 m و 300 m و فاصله جلوی آن‌ها در مبدأ زمان برابر با 400 m است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، دو قطار به طور کامل از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟

۱۰ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۳۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول: یک شکل مناسب از وضعیت دو قطار رسم می‌کنیم.



گام دوم: اگر Δx_A و Δx_B جابه‌جایی دو قطار تا لحظه عبور کامل از کنار هم باشد:

$$\begin{cases} \Delta x_A = 50t \\ \Delta x_B = -40t \end{cases}$$

گام سوم: مجموع اندازه جابه‌جایی A و B همان طول قطارها و فاصله آن‌هاست.

$$|\Delta x_A| + |\Delta x_B| = 50t + 40t = 50/4 + 50/3 + 50/2$$

$$\Rightarrow 90t = 50/9 \Rightarrow t = \frac{1}{100} \text{ h} = 36 \text{ s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

په‌چور دیگه

گام اول: سرعت نسبی دو متحرک که به سمت هم حرکت می‌کنند را به دست می‌آوریم:

$$v_{\text{نسبی}} = 50 + 40 = 90 \text{ km/h}$$

گام دوم: مسافت پیموده شده برابر طول قطارها و فاصله بین آن‌هاست.

$$\Delta x = 400 + 200 + 300 = 900 \text{ m} = 0.9 \text{ km}$$

$$\Delta x = v(\Delta t) \Rightarrow 0.9 \text{ km} = 90 \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{100} \text{ h} = 36 \text{ s}$$

۵۹

خودرویی از شهر A به شهر B رفته و بلافاصله از همان مسیر به شهر A برمی‌گردد. اگر تندی متوسط خودرو در مسیر رفت برابر 60 km/h و در مسیر برگشت برابر 40 km/h باشد، تندی متوسط خودرو در کل مسیر رفت و برگشت چند کیلومتر بر ساعت است؟

- ۴۵ (۱) ۴۸ (۲) ۵۰ (۳) ۵۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

مقادیر t_1 و t_2 (زمان‌های رفت و برگشت) را بر حسب طول مسیر، محاسبه کرده و تندی متوسط رفت و برگشت را از رابطه $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ به دست آورید.

درس Box

اگر متحرکی مسافت‌های d_1 ، d_2 و d_3 را با تندی متوسط‌های s_1 ، s_2 و s_3 طی کند، تندی متوسط کل حرکت برابر است با:

$$s_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{\frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} + \frac{d_3}{s_3}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: برای مسیرهای رفت و برگشت، به ترتیب از اندیس‌های (۱) و (۲) استفاده می‌کنیم. اگر طول مسیر را d در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \Delta x = v(\Delta t) \\ d = v_1 t_1 = 60 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{60} \\ d = v_2 t_2 = 40 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{40} \end{cases}$$

گام دوم: از رابطه تندی متوسط ($s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$) برای کل مسیر رفت و برگشت داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{t_1 + t_2} = \frac{d + d}{\frac{d}{60} + \frac{d}{40}} = \frac{2d}{\frac{2d + 3d}{120}} = \frac{240d}{5d} = 48 \text{ km/h}$$

متحرکی روی محیط دایره‌ای به شعاع 12 m در حال حرکت است. اگر در یک بازه زمانی 4 ثانیه‌ای، اندازه سرعت متوسط متحرک برابر 6 m/s باشد، در این بازه زمانی، تندی متوسط متحرک بر حسب متر بر ثانیه کدام می‌تواند باشد؟

6π (۲)

$\frac{3\pi}{2}$ (۱)

15π (۴)

12π (۳)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

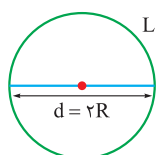
ابتدا از رابطه $v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$ ، جابه‌جایی را بر حسب شعاع به دست بیاورید و از آن برای نتیجه‌گیری مسافت طی شده بر حسب محیط استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا جابه‌جایی d را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d}{4} = 6 \Rightarrow d = 24 \text{ m} = 2(12 \text{ m}) = 2R$$

گام دوم: با توجه به شکل زیر چون $d = 2R$ است، مسافت طی شده L ، مضرب فردی از نصف محیط دایره است:

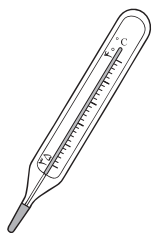
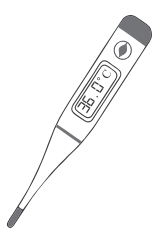


$$L = (2k+1)(\pi R) = (2k+1)(12\pi)$$

گام سوم: اکنون تندی متوسط را بر حسب k محاسبه کرده و با دادن مقادیر متوالی داریم:

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{(2k+1)(12\pi)}{4} = (2k+1)(3\pi) = \begin{cases} k=0 \Rightarrow s_{av} = 3\pi \text{ (m/s)} \\ k=1 \Rightarrow s_{av} = 9\pi \text{ (m/s)} \\ k=2 \Rightarrow s_{av} = 15\pi \text{ (m/s)} \end{cases}$$

در شکل زیر دو ترمسنج مدرج و رقمی نشان داده شده است. دقت اندازه‌گیری این دو ترمسنج به ترتیب از راست به چپ، چند درجه سلسیوس است؟



۱) ۰/۲، ۰/۱

۲) ۰/۱، ۰/۲

۳) ۰/۲، ۱

۴) ۱، ۰/۲

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

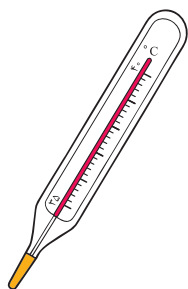
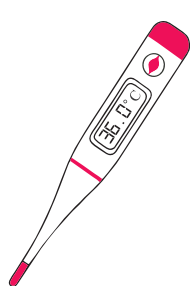
- ۱) دقت اندازه‌گیری در ابزارهای مدرج: کمینه درجه‌بندی آن ابزار
- ۲) دقت اندازه‌گیری در ابزارهای رقمی (دیجیتال): یک واحد از آخرین رقمی که دستگاه می‌خواند

در ترمسنج رقمی، آخرین رقمی که دستگاه می‌خواند 0.1°C است؛ بنابراین:

0.1°C = یک واحد از آخرین رقمی که ترمسنج می‌خواند = دقت اندازه‌گیری ترمسنج رقمی

در ترمسنج مدرج، فاصله بین 35°C تا 40°C به ۲۵ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ بنابراین:

$$\text{دقت اندازه‌گیری ترمسنج مدرج} = \frac{40^{\circ}\text{C} - 35^{\circ}\text{C}}{25} = \frac{5^{\circ}\text{C}}{25} = 0.2^{\circ}\text{C}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۲ هر میکروقرن، تقریباً چند دقیقه است؟

$$۵ / ۲۶ (۱)$$

$$۵۲ / ۶ (۳)$$

$$۸ / ۷۶ (۲)$$

$$۸۷ / ۶ (۴)$$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

تبدیل یکای زنجیره‌ای: برای تبدیل یکای یک کمیت به یکاهای دیگر، از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. برای نمونه، برای این که ببینیم ۲۰ in معادل چند cm است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا تساوی بین دو یکا را می‌نویسیم، تا کسر تبدیل مناسب به دست آید:

$$۱ \text{ in} = ۲ / ۵۴ \text{ cm} \Rightarrow \frac{۱ \text{ in}}{۲ / ۵۴ \text{ cm}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{۲ / ۵۴ \text{ cm}}{۱ \text{ in}} = ۱$$

ب) سپس به کمک کسر تبدیل مناسب، تبدیل یکای زنجیره‌ای را می‌نویسیم:

$$۲۰ \text{ in} = ۲۰ \text{ in} \times \frac{۲ / ۵۴ \text{ cm}}{۱ \text{ in}} = ۵۰ / ۸ \text{ cm}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$۱ \text{ میکروقرن} = ۱ \text{ میکروقرن} \times \frac{۱۰^{-۶} \text{ قرن}}{۱ \text{ میکروقرن}} \times \frac{۱۰۰ \text{ سال}}{۱ \text{ قرن}} \times \frac{۳۶۵ \text{ روز}}{۱ \text{ سال}} \times \frac{۲۴ \text{ ساعت}}{۱ \text{ روز}} \times \frac{۶۰ \text{ دقیقه}}{۱ \text{ ساعت}}$$

$$= ۱۰^{-۶} \times ۱۰۰ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ = ۵۲ / ۵۶ \text{ دقیقه} \approx ۵۲ / ۶ \text{ دقیقه}$$

(فیزیک (۱) _ تمرین ۶ پایان فصل صفحه ۱۹ کتاب درسی)

الف) هر میکروقرن، تقریباً چند دقیقه است؟

کتاب
درسی

۶۳ چگالی نوترون تقریباً برابر $۰/۶۹ \mu\text{g} / \text{nm}^3$ است. چگالی نوترون در SI و برحسب نمادگذاری علمی کدام است؟

(۲) $۶/۹ \times ۱۰^{۱۷}$

(۱) $۶/۹ \times ۱۰^{۱۵}$

(۴) ۶۹×۱۰^{۱۶}

(۳) ۶۹×۱۰^{۱۳}

پاسخ: گزینه ۲

(۱) درس باکس تست ۶۲ را بخوانید.

(۲) نمادگذاری علمی: برای نوشتن اعداد به روش نمادگذاری علمی باید عدد مربوطه را به صورت حاصل ضرب عددی از ۱ تا ۱۰ در توان صحیحی از ۱۰ نوشت. به زبان ریاضی:

$$a \times 10^z, (1 \leq a < 10)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یکای چگالی در SI، kg / m^3 است. به کمک تبدیل یکای زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$\rho = ۰/۶۹ \frac{\mu\text{g}}{\text{nm}^3} \times \frac{۱۰^{-۹} \text{kg}}{۱ \mu\text{g}} \times \frac{۱ \text{nm}^3}{(۱۰^{-۹})^3 \text{m}^3} = ۰/۶۹ \times \frac{۱۰^{-۹}}{(۱۰^{-۹})^3} \text{kg} / \text{m}^3 = \frac{۰/۶۹}{(۱۰^{-۹})^2} \text{kg} / \text{m}^3$$

$$= ۰/۶۹ \times (۱۰^۹)^2 \text{kg} / \text{m}^3 = ۰/۶۹ \times ۱۰^{۱۸} \text{kg} / \text{m}^3 \xrightarrow{\text{برحسب نمادگذاری علمی}} \rho = ۶/۹ \times ۱۰^{۱۷} \text{kg} / \text{m}^3$$

در گزینه (۴)، چگالی نوترون برحسب یکای SI است، ولی برحسب نمادگذاری علمی نیست.

گول نخوری ✖

یک لوله استوانه‌ای توخالی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $b = 1/2 a$ و طول $L = 20a$ از ماده‌ای با چگالی $\rho = \frac{16}{\pi} \text{ g/cm}^3$ ساخته شده است. اگر جرم این لوله $m = 2/2 \text{ kg}$ باشد، a چند سانتی‌متر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۲ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

چگالی:

درس Box

جرم جسم
 $\rho = \frac{m}{V}$
حجم جسم

از یکاهای متداول چگالی اند: $\frac{\text{g}}{\text{L}}$ و $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ، $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

تبدیل این یکاها به یکدیگر به صورت زیر انجام می‌شود:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi(R_{\text{خارجی}}^2 - R_{\text{داخلی}}^2)L} \xrightarrow{m=2/2 \text{ kg}=2/2 \times 10^3 \text{ g}, R_{\text{خارجی}}=b=1/2 a, R_{\text{داخلی}}=a, L=20a} \frac{16}{\pi} = \frac{2/2 \times 10^3}{\pi[(1/2 a)^2 - a^2] \times 20a}$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{2/2 \times 10^3}{(1/44 a^2 - a^2) \times 20a} \Rightarrow 16 \times \frac{1}{44} \times 20a^3 = \frac{1}{2/2 \times 10^3}$$

$$\Rightarrow a^3 = \frac{10^3}{64} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} a = \frac{10}{4} = 2/5 \text{ cm}$$

یک لوله استوانه‌ای توخالی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $b = 1/2 a$ و طول $L = 20a$ از ماده‌ای با چگالی $\rho = \frac{16}{\pi} \text{ g/cm}^3$ ساخته شده است. اگر جرم این لوله $m = 2/2 \text{ kg}$ باشد، a چند سانتی‌متر است؟

(سوال ۶۴ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۳ / ۳ (۲)

۳ / ۵ (۱)

۵ / ۵ (۴)

۴ / ۲ (۳)

کنکور

۶۵

چگالی مایع A از چگالی مایع B، ۲۵ درصد بیشتر است. اگر در مخلوطی از این دو مایع، حجم مایع A، ۳ برابر حجم مایع B باشد، چگالی مخلوط چند درصد کم تر از چگالی مایع A است؟ (در اثر مخلوط شدن، حجم کل مایع ها ثابت می ماند.)

۵ (۱) ۶ / ۲۵ (۲) ۷ / ۵ (۳) ۱۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

اگر چند ماده مختلف را با هم مخلوط کنیم (و تغییر حجمی نداشته باشیم)، چگالی مخلوط (یا محلول) از رابطه زیر به دست می آید:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_{\text{مخلوط}}}{V_{\text{مخلوط}}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

اگر m ها و ρ ها را داشته باشیم، به جای V ها، نسبت $\frac{m}{\rho}$ ها را قرار می دهیم.

اگر V ها و ρ ها را داشته باشیم، به جای m ها، نسبت ρV ها را قرار می دهیم.

گام اول: چگالی مایع A، ۲۵ درصد بیشتر از چگالی مایع B است، پس:

$$\rho_A = \rho_B + \frac{25}{100} \rho_B = \frac{125}{100} \rho_B = \frac{5}{4} \rho_B$$

گام دوم: رابطه چگالی مخلوط را می نویسیم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} \xrightarrow{m=\rho V} \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_A V_A + \rho_B V_B}{V_A + V_B}$$

$$\frac{\rho_B = \frac{4}{5} \rho_A}{V_A = 3V_B} \rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_A \times 3V_B + \frac{4}{5} \rho_A \times V_B}{3V_B + V_B} = \frac{\frac{19}{5} \rho_A V_B}{4 V_B} = \frac{19}{20} \rho_A$$

گام سوم: درصد خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\rho_{\text{مخلوط}} - \rho_A}{\rho_A} \times 100 = \frac{\frac{19}{20} \rho_A - \rho_A}{\rho_A} \times 100 = \frac{-\frac{1}{20} \rho_A}{\rho_A} \times 100 = -5\%$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۶ کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) فاصله ذرات سازنده مایع از فاصله ذرات سازنده جامد همواره بیشتر است.
- (۲) وقتی مایعی به آهستگی سرد می شود، اغلب جامد بی شکل تشکیل می شود.
- (۳) پدیده پخش در گازها سریع تر از مایع ها رخ می دهد.
- (۴) پلاسما، حالت چهارم ماده است که اغلب در دماهای خیلی پایین به وجود می آید.

پاسخ: گزینه ۲

بررسی عبارت ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

- گزینه (۱): فاصله ذرات سازنده مایع و جامد، تقریباً یکسان و در حدود یک آنگستروم است. ✗
- گزینه (۲): وقتی مایعی را به آهستگی سرد کنیم، اغلب جامدهای بلورین تشکیل می شوند. در این فرایند سردسازی آرام، ذرات سازنده مایع فرصت کافی دارند تا در طرح های منظم، خود را مرتب کنند. ✗
- گزینه (۳): تندی میانگین مولکول های گاز بیشتر از تندی میانگین مولکول های مایع است، به همین دلیل پدیده پخش در گازها سریع تر از مایع ها رخ می دهد. ✓
- گزینه (۴): پلاسما حالت چهارم ماده است که اغلب در دماهای خیلی بالا به وجود می آید. ✗



قطره‌های روغن از دهانه یک قطره‌چکان در حال خارج شدن هستند. اگر دمای روغن افزایش یابد، نیروی هم‌چسبی مولکول‌های روغن و اندازه قطره‌های روغن خارج شده از قطره‌چکان، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟

(۱) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
(۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
(۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
(۴) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ افزایش دما باعث جنبش بیشتر مولکول‌های روغن و افزایش فاصله آن‌ها از یکدیگر و در نتیجه کاهش نیروی هم‌چسبی مولکول‌های روغن می‌شود؛ همین موضوع باعث می‌شود که اندازه قطره‌های روغن خارج شده از قطره‌چکان کاهش یابد.

شکل زیر خروج قطره‌های روغن با دمای متفاوت را از دهانه دو قطره‌چکان نشان می‌دهد.

(فیزیک (۱) - پرسش ۲-۳ صفحه ۳۰ کتاب درسی)



الف) افزایش دما چه تأثیری بر نیروی هم‌چسبی مولکول‌های یک مایع می‌گذارد؟
ب) توضیح دهید در کدام شکل دمای قطره‌های روغن کم‌تر است.

قاعده مخروط توپری به ارتفاع ۳۰ cm روی سطح افقی قرار دارد. اگر چگالی مخروط 2 g/cm^3 باشد، فشار حاصل از آن در محل تماس با سطح افقی چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- ۰/۲ (۱) ۲ (۲) ۰/۶ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

اندازه نیروی عمودی وارد بر سطح

$$P = \frac{F}{A}$$

مساحت سطح

(۱) درس باکس تست ۶۴ را بخوانید.

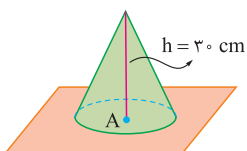
(۲) فشار:

پاسخ خیلی تشریحی

به کمک رابطه فشار و چگالی داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} \xrightarrow{m=\rho V} P = \frac{\rho Vg}{A} \xrightarrow{V=\frac{1}{3}Ah} P = \frac{\rho \times \frac{1}{3} Ahg}{A} = \frac{1}{3} \rho gh$$

$$\frac{\rho=2 \text{ g/cm}^3=2 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3}{h=30 \text{ cm}=0.3 \text{ m}} \rightarrow P = \frac{1}{3} \times 2 \times 10^{-3} \times 10 \times 0.3 = 2 \times 10^{-3} \text{ Pa} = 2 \text{ kPa}$$



۶۹

اگر چگالی آب دریا 1 g/cm^3 باشد، فشار در عمق چند متری دریا برابر 0.5 MPa است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$) و فشار هوای محیط 1 bar است.)

۵۰ (۴)

۴۰ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

فشار در عمق h از یک مایع:

درس Box

چگالی مایع
↑
 $P = P_0 + \rho gh$
↓
فشار هوا

در مسئله‌ها، واژه‌های فشار، فشار کل و فشار مطلق معادل یکدیگرند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$P = P_0 + \rho gh \xrightarrow{P=0.5 \text{ MPa}=0.5 \times 10^6 \text{ Pa}, \rho_{\text{آب}}=1 \text{ g/cm}^3=10^3 \text{ kg/m}^3, P_0=1 \text{ bar}=10^5 \text{ Pa}} 0.5 \times 10^6 = 10^5 + 10^3 \times 10 \times h$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^5 = 10^4 h \Rightarrow h = 40 \text{ m}$$

۷۰

در ظرفی استوانه‌ای به مساحت مقطع 400 cm^2 ، مخلوطی از 4 kg الکل و 6 kg آب ریخته شده است. فشار پیمانه‌ای در کف این ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($\rho_{\text{الکل}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$ ، $\rho_{\text{آب}} = 1.0 \text{ g/cm}^3$ ، $g = 10 \text{ N/kg}$)

۲۳ (۴)

۲/۳ (۳)

۲۵ (۲)

۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

فشار ناشی از ماده در زیر استوانه یا ستونی از ماده با سطح مقطع ثابت A و جرم m ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{\text{ماده}} = \frac{mg}{A}$$

فشار پیمانه‌ای در کف ظرف برابر با فشار ناشی از مخلوط در کف ظرف است. چون ظرف استوانه‌ای شکل است، داریم:

$$P_{\text{مخلوط}} = \frac{m_{\text{مخلوط}} g}{A} = \frac{(m_{\text{الکل}} + m_{\text{آب}})g}{A}$$

$$\frac{A=400 \text{ cm}^2=400 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{\rightarrow} P = \frac{(4+6) \times 10}{400 \times 10^{-4}} = \frac{100 \times 10^4}{400} = 2/5 \times 10^3 \text{ Pa} = 2/5 \text{ kPa}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چگالی متوسط هوا تا ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح دریای آزاد 1.01 kg/m^3 است. اگر فشار هوا در سطح دریای آزاد $101/3 \text{ kPa}$ باشد، فشار هوا در شهری به ارتفاع 2 km از سطح دریای آزاد چند پاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) 71000 (۲) 81100 (۳) 121500 (۴) 131600

پاسخ: گزینه ۲

درس باکس تست ۶۹ را بخوانید.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فشار هوا در سطح دریای آزاد، برابر با مجموع فشار هوا در شهر مورد نظر و فشار ناشی از ستون هوای قرار گرفته بین این شهر تا سطح دریای آزاد است، پس:

$$P_{\text{سطح دریای آزاد}} = P_{\text{km}} + \rho_{\text{av}}gh$$

$$\frac{P_{\text{سطح دریای آزاد}} = 101/3 \text{ kPa} = 101/3 \times 10^3 \text{ Pa}}{h = 2 \text{ km} = 2 \times 10^3 \text{ m}} \rightarrow 101/3 \times 10^3 = P_{\text{km}} + 1.01 \times 10 \times 2 \times 10^3$$

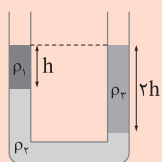
$$\Rightarrow 101/3 \times 10^3 = P_{\text{km}} + 20/2 \times 10^3 \Rightarrow P_{\text{km}} = (101/3 - 20/2) \times 10^3 = 81100 \text{ Pa}$$



۷۲

در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 3\rho_1$ باشد،

نسبت $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ چه قدر است؟



$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

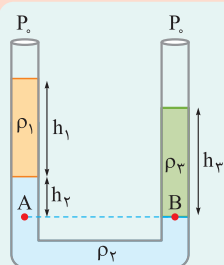
$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box



اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز: در نقطه‌های هم‌تراز یک مایع ساکن، فشار یکسان است و به شکل ظرف بستگی ندارد. برای مثال در شکل مقابل، نقاط A و B هم‌ترازند و درون یک مایع ساکن قرار دارند؛ بنابراین فشار این دو نقطه با هم برابر است.

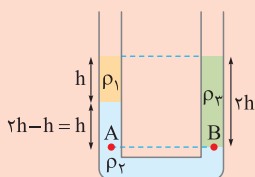
$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_3 g h_2 = P_0 + \rho_3 g h_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 + \rho_3 h_2 = \rho_3 h_2$$

توجه داشته باشید که در این رابطه، فقط یکسان بودن یکاها در دو طرف تساوی مهم است.

فشار در نقاط هم‌تراز A و B در شکل زیر یکسان است؛ بنابراین:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h + \rho_3 g h = P_0 + \rho_3 g (2h) \Rightarrow \rho_1 h + \rho_3 h = \rho_3 \times 2h$$

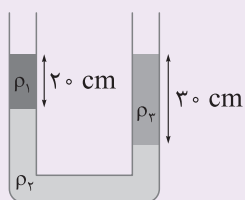
$$\xrightarrow{\rho_2 = 3\rho_1} \rho_1 + 3\rho_1 = 2\rho_3 \Rightarrow 4\rho_1 = 2\rho_3 \Rightarrow \frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{4}{2} = 2$$



در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 2\rho_1$ باشد،

(سوال ۷۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

نسبت $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ چه قدر است؟



$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

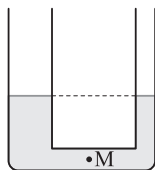
$$\frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

کنکور

چگالی مایع درون لوله شکل زیر، برابر 4 g/cm^3 است. سطح مقطع شاخه سمت چپ لوله 20 cm^2 و سطح مقطع شاخه سمت راست آن 10 cm^2 است. چند کیلوگرم آب در شاخه سمت چپ بریزیم تا فشار نقطه M ، 5 kPa افزایش یابد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۰ / ۵ (۱)

۰ / ۷۵ (۲)

۱ (۳)

۱ / ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس باکس تست‌های ۶۴ و ۷۲ را بخوانید.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل زیر، با ریختن آب در شاخه سمت چپ، مایع در شاخه سمت راست به مقدار h' بالا می‌رود. با توجه به این که فشار در نقطه M ، 5 kPa افزایش می‌یابد، h' را به دست می‌آوریم:

$$\Delta P_M = \rho_{\text{مایع}} g h' \quad \frac{\Delta P_M = 5 \text{ kPa} = 5 \times 10^3 \text{ Pa}}{\rho_{\text{مایع}} = 4 \text{ g/cm}^3 = 4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} \rightarrow 5 \times 10^3 = 4 \times 10^3 \times 10 \times h'$$

$$\Rightarrow h' = 0.125 \text{ m} = 12.5 \text{ cm} \quad (\text{I})$$

گام دوم: مطابق شکل زیر، با ریختن آب در شاخه سمت چپ، اگر مایع در این شاخه به مقدار x پایین رود، در شاخه دیگر به مقدار $2x$ بالا می‌آید، زیرا:

$$A_2 x = A_1 \times h' \Rightarrow 20x = 10 \times h' \Rightarrow h' = 2x \quad (\text{II})$$

از رابطه (I) و (II) نتیجه می‌گیریم:

$$12.5 = 2x \Rightarrow x = 6.25 \text{ cm}$$

از طرفی مایع h در شکل زیر برابر است با:

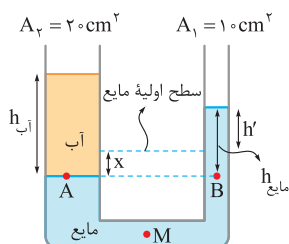
$$h_{\text{مایع}} = h' + x = 12.5 + 6.25 = 18.75 \text{ cm}$$

گام سوم: فشار در نقاط A و B را برابر قرار می‌دهیم:

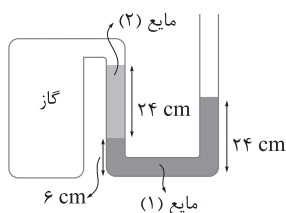
$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} = P_0 + \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} \times h_{\text{آب}} = 4 \times 18.75 = 75 \text{ g/cm}^2 \quad (\text{III})$$

گام چهارم: جرم آب اضافه‌شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_{\text{آب}} = \rho_{\text{آب}} V_{\text{آب}} = \rho_{\text{آب}} A_2 h_{\text{آب}} \xrightarrow{(\text{III})} m_{\text{آب}} = 75 \times 20 = 1500 \text{ g} = 1.5 \text{ kg}$$



در شکل زیر، چگالی مایع‌های (۱) و (۲) به ترتیب $۸ \text{ g/cm}^۳$ و $۱ \text{ g/cm}^۳$ است. فشار پیمانه‌ای گاز درون مخزن چند سانتی‌متر جیوه است؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$ و $\rho_{\text{جیوه}} = ۱۳/۶ \text{ g/cm}^۳$)



(۱) ۱

(۲) -۱

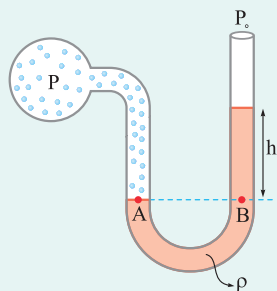
(۳) ۵/۰

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) در شکل زیر، برای به دست آوردن فشار گاز موجود در مانومتر، از هم‌فشاری نقاط هم‌تراز A و B کمک می‌گیریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow P = P_0 + \rho gh$$

(۲) فشار پیمانه‌ای: اختلاف فشار مطلق و فشار هوا

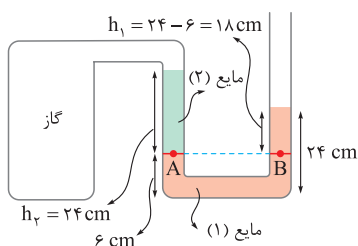
$$P_g = P - P_0$$

در شکل زیر، فشار در نقاط هم‌تراز A و B که در مایع (۱) قرار دارند، یکسان است، پس:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho_2 gh_2 = P_0 + \rho_1 gh_1 \Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_0 = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)g$$

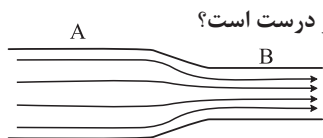
$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)g = (۸ \times ۱۸ - ۱ \times ۲۴) \times ۱۰ = ۰$$

بنابراین فشار پیمانه‌ای گاز (برحسب هر یکایی از جمله سانتی‌متر جیوه) برابر صفر است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، شاره تراکم‌ناپذیری که تمام حجم لوله را پر کرده است، در راستای افقی جاری است و شعاع مقطع لوله



در قسمت A دو برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است. کدامیک از موارد زیر درست است؟

الف) فشار شاره در قسمت A بیشتر از فشار شاره در قسمت B است.

ب) تندی شاره در قسمت B، ۲ برابر تندی شاره در قسمت A است.

پ) آهنگ شارش شاره در قسمت B، ۴ برابر آهنگ شارش شاره در قسمت A است.

(۲) الف - پ

(۱) الف

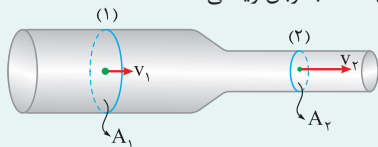
(۴) ب - پ

(۳) ب

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

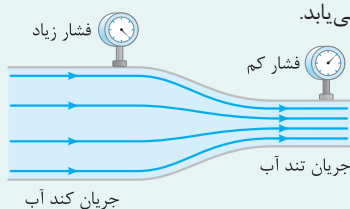
معادله پیوستگی: اگر مطابق شکل زیر، شاره تراکم‌ناپذیری همه جای لوله را پر کرده باشد و درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا، آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است. به زبان ریاضی:



$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(A: مساحت مقطع لوله و v: تندی شاره)

(۲) طبق اصل برنولی، در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.



گام اول: براساس معادله پیوستگی، در حالت پایا، آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است (نادرستی «پ»). داریم:

$$A_A v_A = A_B v_B \xrightarrow{A \propto r^2} r_A^2 v_A = r_B^2 v_B \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \xrightarrow{r_A = 2r_B} \frac{v_B}{v_A} = 2^2 = 4 \quad (\text{نادرستی «ب»})$$

گام دوم: طبق اصل برنولی، چون تندی مایع در قسمت B بیشتر از قسمت A است، فشار مایع در قسمت B کم‌تر از قسمت A است:

$$P_B < P_A \quad (\text{درستی «الف»})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به فرمول ترکیب‌های داده‌شده، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- ۱) $C_{18}H_{35}O_2K$
- ۲) CH_3CH_2COOH
- ۳) $C_{51}H_{92}O_6$
- ۴) $CO(NH_2)_2$

الف) ترکیب (۲)، سومین عضو خانوادهٔ اسیدهای چرب محسوب می‌شود.

ب) ترکیب (۴) مانند اتیلن گلیکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.

پ) ترکیب (۱) همانند ترکیبی با فرمول CH_3COONH_4 ، خاصیت پاک‌کنندگی دارد و حالت فیزیکی دو ترکیب در دمای اتاق یکسان است.

ت) ترکیب (۳) را می‌توان یک استر سه‌عاملی در نظر گرفت که زنجیرهای هیدروکربنی در آن، سیر نشده هستند.

(۲) الف - پ

(۱) الف - ب

(۴) پ - ت

(۳) ب - ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

الف) اسیدهای چرب، دسته‌ای از کربوکسیلیک اسیدها ($RCOOH$) هستند که تعداد زیادی کربن دارند. اسید داده‌شده، فقط ۳ اتم

کربن دارد و اسید چرب محسوب نمی‌شود. اگر می‌گفت سومین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها درست بود!

ب) ترکیب (۴) همان اوره است که N متصل به H دارد. اتیلن گلیکول ($HO-CH_2-CH_2-OH$)، O متصل به H دارد؛

به همین دلیل این دو مولکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با خود و یا آب را دارند.

بین مولکول‌هایی که در ساختار آن‌ها یکی از پیوندهای $O-H$ ، $N-H$ یا $F-H$ وجود دارد (یعنی H متصل به FON دارند)، می‌تواند پیوند هیدروژنی برقرار شود. مانند: HF ، NH_3 ، H_2O ، C_2H_5OH و ...!

پ) ترکیب (۱)، نمک پتاسیم اسید چرب بوده و صابون مایع است، اما دقت کنید هر ترکیب آمونیوم‌داری ($RCOONH_4$)، خاصیت

پاک‌کنندگی ندارد؛ باید تعداد کربن‌هاش زیاد باشد! CH_3COONH_4 ، تعداد کربن کمی دارد.

(ت)



استرهای سه‌عاملی با زنجیرهای هیدروکربنی سیر شده، دارای ۳ پیوند دوگانهٔ C هستند؛ بنابراین نسبت به آلکان‌های هم‌کربن خود (C_nH_{2n+2}) ، ۶ اتم هیدروژن کم‌تر دارند! از این رو فرمول عمومی آن‌ها به صورت $C_nH_{2n-4}O_6$ است.

فرمول $C_{51}H_{92}O_6$ از رابطهٔ $C_nH_{2n-4}O_6$ تبعیت نمی‌کند و این نشان می‌دهد که زنجیرهای هیدروکربنی در آن سیر شده نیستند.

$$n = 51 \xrightarrow{\text{اگر سیر شده باشد}} \text{شمار اتم‌های هیدروژن} = 2(51) - 4 = 98$$

ترکیب داده‌شده نسبت به حالت سیر شده، $98 - 92 = 6$ اتم هیدروژن کم‌تر دارد؛ پس در مجموع دارای ۳ پیوند $C=C$ است.

نکته

نکته

کدام مورد درست است؟

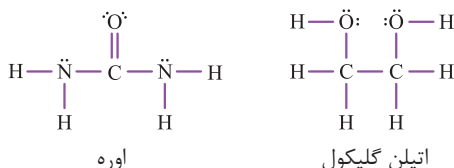
W

- (۱) بیماری واگیردار وبا امروزه به لطف صابون و شوینده‌ها، دیگر برای جوامع انسانی تهدید محسوب نمی‌شود.
- (۲) آهنگ رشد شاخص امید به زندگی در نواحی برخوردار بیشتر از نواحی کم‌برخوردار است.
- (۳) سدیم کلرید همانند اتانول، مولکول‌های قطبی دارد و در آب حل می‌شود.
- (۴) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اوره کم‌تر از اتیلن گلیکول است.

پاسخ: گزینه ۴

ساختار لوویس مولکول‌های اوره و اتیلن گلیکول به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\text{نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی} = \begin{cases} \frac{4}{9} = \text{اوره} \\ \frac{9}{4} = \text{اتیلن گلیکول} \end{cases}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): بیماری وبا هنوز هم می‌تواند برای جوامع انسانی تهدیدکننده باشد.

گزینه (۲): آهنگ رشد یا شیب نمودار امید به زندگی در طول سال‌های اخیر در نواحی کم‌برخوردار بیشتر از نواحی برخوردار بوده است. اگر به نمودار کتاب درسی دقت کنید می‌بینید که شیب نمودار مربوط به نواحی کم‌برخوردار بیشتر است.

نواحی کم‌برخوردار > میانگین جهانی > نواحی برخوردار: امید به زندگی در هر سال

نواحی برخوردار > میانگین جهانی > نواحی کم‌برخوردار: شیب منحنی امید به زندگی (آهنگ رشد)

گزینه (۳): سدیم کلرید (NaCl) همانند اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) در آب حل می‌شود، اما دقت کنید که سدیم کلرید، یک ترکیب یونی است و در ساختار آن مولکول وجود ندارد و به کار بردن واژه مولکول برای آن ممنوعه!

از میان دو نمونه صابون سدیم (I) و صابون پتاسیم (II) که زنجیر هیدروکربنی در آن‌ها یکسان است، کدام صابون نقطه ذوب بالاتری دارد و تفاوت جرم مولی صابون دیگر با اسید چرب سازنده آن، چند گرم است؟

($H = 1, Na = 23, K = 39 : g.mol^{-1}$)

(۲) صابون I - ۳۸

(۱) صابون II - ۲۳

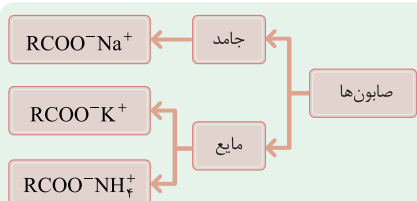
(۴) صابون II - ۲۲

(۳) صابون I - ۳۹

پاسخ: گزینه ۲



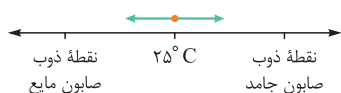
به نمک اسیدهای چرب، صابون می‌گویند. صابون‌های جامد، نمک سدیم، اسید چرب و صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسید چرب هستند؛ پس اگر در ساختار اسیدهای چرب به جای هیدروژن متصل به اتم اکسیژن، Na^+ ، K^+ یا NH_4^+ قرار گیرد، صابون یا همان نمک اسید چرب به دست می‌آید.



در دمای اتاق، صابون سدیم ($RCOONa$)، جامد و صابون پتاسیم ($RCOOK$)، مایع است. این موضوع نشان می‌دهد که نقطه ذوب صابون سدیم بیشتر از نقطه ذوب صابون پتاسیم است؛ یعنی دمای اتاق برای ذوب کردن صابون سدیم کافی نیست، اما می‌تواند صابون پتاسیم را ذوب کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یادآوری: هر ماده‌ای پایین‌تر از نقطه ذوب خود، به حالت جامد و بالاتر از نقطه ذوب خود، به حالت مایع است.



پس جواب قسمت اول سؤال شد *صابون سدیم*! برای قسمت دوم، باید تفاوت جرم مولی صابون پتاسیم را با اسید چرب سازنده‌اش حساب کنیم.

صابون پتاسیم ($RCOOK$) نسبت به اسید چرب سازنده‌اش ($RCOOH$)، یک اتم هیدروژن کم‌تر و یک اتم پتاسیم بیشتر دارد:

$$RCOOK - RCOOH = K - H = 39 - 1 = 38$$

با توجه به فرمول همگانی پاک‌کننده‌های صابونی جامد، کدام موارد زیر درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

RCOONa

- الف) اگر بخش آب‌گریز آن، سیرشده و دارای ۱۶ اتم کربن باشد، فرمول آنیون این صابون $C_{16}H_{33}O_2^-$ است.
 ب) قسمت‌های Na^+ و COO^- در این ترکیب، بخش‌های آب‌دوست و زنجیر بلند هیدروکربنی (R) بخش آب‌گریز هستند.
 پ) اگر بخش چربی‌دوست آن دارای ۱۷ اتم کربن و ۲ پیوند دوگانه باشد، جرم مولی صابون $1/25$ برابر جرم مولی گلوکز است.
 ت) اگر گروه آلکیل با ۳۱ اتم هیدروژن داشته باشد، درصد جرمی کربن در صابون به تقریب $8/3$ برابر درصد جرمی یون فلزی است.

ب - ت

الف - ب

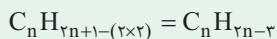
الف - پ

پ - ت

پاسخ: گزینه ۲

فرمول عمومی پاک‌کننده‌های صابونی جامد به صورت RCOONa است که در آن، R می‌تواند زنجیر هیدروکربنی سیرشده یا سیرنشده باشد.

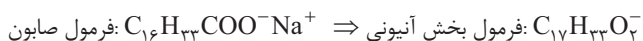
فرمول عمومی زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده (گروه آلکیل) به صورت C_nH_{2n+1} است. اگر زنجیر هیدروکربنی سیرنشده باشد، به ازای هر پیوند $C=C$ ، دو اتم هیدروژن از فرمول مولکولی آن کم می‌شود؛ مثلاً اگر یک زنجیر هیدروکربنی دارای ۲ پیوند $C=C$ باشد، فرمول مولکولی آن به صورت زیر خواهد بود:



عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در ساختار صابون‌ها، زنجیر هیدروکربنی (R)، ناقطبی و آب‌گریز است. اگر این گروه دارای ۱۶ اتم کربن بوده و سیرشده باشد، فرمول آن به صورت $C_{16}H_{33}$ خواهد بود:



ب) کاملاً درسته!

پ) گروه R، آب‌گریز یا چربی‌دوست است.



$$\frac{\text{جرم مولی صابون } (C_{18}H_{31}O_2Na)}{\text{جرم مولی گلوکز } (C_6H_{12}O_6)} = \frac{(18 \times 12) + 31 + (2 \times 16) + 23}{(6 \times 12) + 12 + (6 \times 16)} = \frac{302}{180} \approx 1/67$$

ت) فرمول گروه آلکیل با ۳۱ اتم هیدروژن به صورت $C_{15}H_{31}$ است:



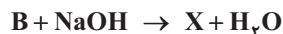
$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی یون سدیم}} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم سدیم}} = \frac{C \text{ مول} \times C}{Na \text{ مول} \times Na} = \frac{16 \times 12}{1 \times 23} \approx 8/3$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به واکنش‌های زیر که مراحل تولید یک نوع صابون را نشان می‌دهند، کدام مورد دربارهٔ A، B و X نادرست است؟
(ترکیب X، زنجیره‌ای، دارای ۱۷ اتم کربن و جرم یک مول از آن برابر ۲۹۰ گرم است.)

$$(H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1})$$

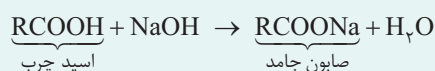


- (۱) در ساختار مولکول B، دو پیوند دوگانه وجود دارد.
- (۲) شمار پیوندهای C—O در ساختار مولکول A برابر ۶ است.
- (۳) شمار الکترون‌های ناپیوندی در ساختار A، سه برابر شمار این الکترون‌ها در ساختار X است.
- (۴) ترکیب A یک استر بلندزنجیر بوده و در دمای اتاق، مایع است.

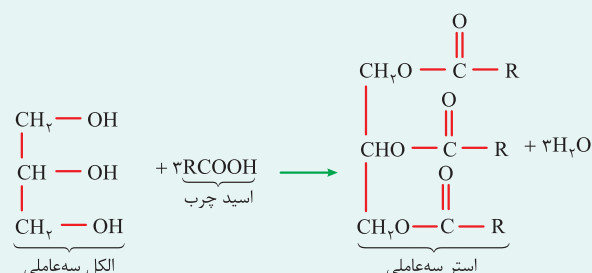
پاسخ: گزینهٔ ۳

چند واکنش مهم:

(۱) واکنش تشکیل صابون جامد از اسید چرب:

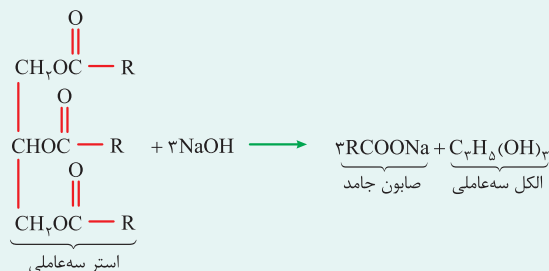


(۲) واکنش تشکیل استر سه‌عاملی:



واکنش بالا برگشت‌پذیر است، یعنی استر می‌تواند در شرایط مناسب آبکافت شده و به واحدهای سازندهٔ خود تبدیل شود.

(۳) واکنش تشکیل صابون از استر سه‌عاملی:

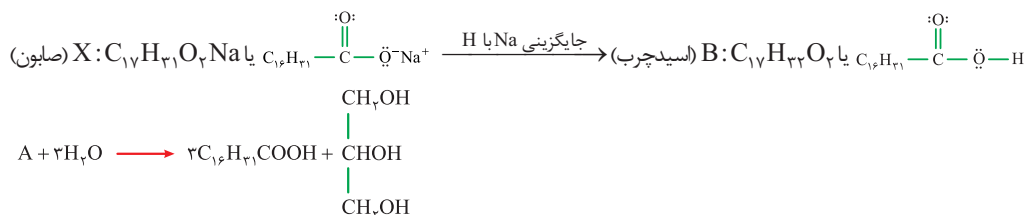


واکنش اول، واکنش آبکافت استر A به الکل $C_3H_5(OH)_3$ و اسید چرب B است و واکنش دوم، واکنش تشکیل صابون سدیم‌دار X، از سدیم هیدروکسید و اسید چرب B می‌باشد.

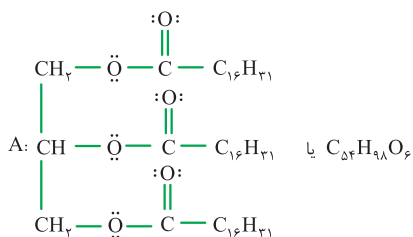
فرمول شیمیایی صابون X با ۱۷ اتم کربن و جرم مولی $290 g.mol^{-1}$ ، $C_{17}H_xO_2Na$ می‌باشد که تعداد اتم‌های هیدروژن در آن، برابر است با:

$$290 = (17 \times 12) + (x \times 1) + (2 \times 16) + 23 \Rightarrow x = 31$$

در این صورت، داریم:



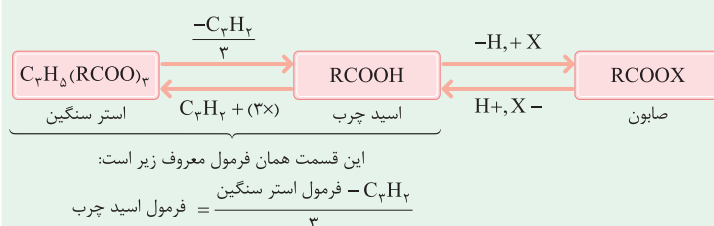
پاسخ خیلی تشریحی ✓



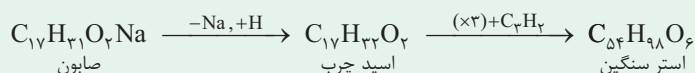
تبدیل فرمول اسید چرب و استر سنگین به صابون و برعکس^۱

اگر به جای اتم هیدروژن گروه کربوکسیل اسید چرب، یکی از کاتیون‌های Na^+ ، K^+ یا NH_4^+ قرار گیرد، صابون به دست می‌آید؛ پس برای تبدیل فرمول اسید چرب و صابون به یکدیگر، کافی است اتم هیدروژن گروه کربوکسیل و این کاتیون‌ها را با هم جایگزین کنیم. از طرفی می‌دانیم که با استرهای سنگین هم می‌توان صابون تولید کرد. برای تعیین فرمول صابون حاصل از یک استر سنگین، می‌توانیم ابتدا اسید چرب استر را به دست آورده و سپس فرمول اسید چرب را به فرمول صابون تبدیل کنیم.

با عکس این روند هم می‌توانیم از فرمول صابون به فرمول استر رسید.

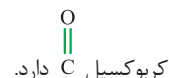


مثال اگر فرمول صابون جامد حاصل از یک استر سنگین به صورت $C_{17}H_{31}O_2Na$ باشد، فرمول استر سنگین را به دست آورید.

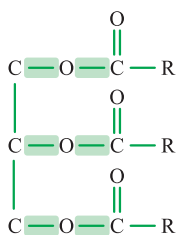


بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): اگر زنجیره هیدروکربنی R در ساختار B سیر شده باشد، دارای $33 = 1 + 16 \times 2$ اتم هیدروژن خواهد بود؛ در حالی که تعداد اتم‌های هیدروژن در آن $2 = 31 - 33$ واحد کم‌تر است. پس یک پیوند دوگانه $C = C$ در زنجیره R و یک پیوند دوگانه در گروه



گزینه (۲): استرهای سه‌عاملی دارای ۶ پیوند C—O می‌باشند.



گزینه (۳): مطابق با ساختارهای بالا، استر A دارای ۲۴ الکترون ناپیوندی و ترکیب X (صابون)، دارای ۱۰ الکترون ناپیوندی می‌باشند.

$$\frac{24}{10} = 2.4$$

گزینه (۴): می‌دانیم روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$ که دارای ۳ پیوند $C=C$ می‌باشد، در دمای اتاق مایع است. تعداد هیدروژن‌ها و کربن‌های ترکیب A با فرمول مولکولی $C_{54}H_{98}O_6$ ، کم‌تر از روغن زیتون است؛ پس نتیجه می‌گیریم که ترکیب A نیز در دمای اتاق مایع می‌باشد.

۱- کتاب تست شیمی دوازدهم خیلی سبز برای سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵، به طور کامل بازنویسی شده و نسبت به چاپ‌های قبلی، بسیار کامل‌تر شده است. برای آموزش کامل نکاتی که در آزمون می‌بینید، می‌توانید به این کتاب مراجعه کنید.

کدام مورد درست است؟

۸۱

- (۱) کلوئیدها، مخلوط‌هایی ناپایدارند و از توده‌های مولکولی تشکیل شده‌اند.
- (۲) آب دریا، نوشیدنی‌ها، انواع رنگ‌ها، شوینده‌ها و داروها، همگی مخلوط‌هایی همگن با خواص متفاوت هستند.
- (۳) رفتار سوسپانسیون‌ها را می‌توان رفتاری بین کلوئیدها و محلول‌ها در نظر گرفت.
- (۴) مسیر نور از میان مخلوط آب، روغن و صابون مشخص است.

پاسخ: گزینه ۴



مقایسه محلول‌ها، کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها:

ویژگی	نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	ناهمگن (به ظاهر همگن)	همگن
پایداری	ناپایدار است / ته‌نشین می‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، زله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب‌قند، آب‌نمک	

مخلوط آب، روغن و صابون یک کلوئید است و با پخش نور، مسیر عبور نور از میان آن مشخص می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه (۱): کلوئیدها به ظاهر همگن بوده، ولی مخلوط‌هایی پایدار هستند.
- گزینه (۲): نوشیدنی‌ها، انواع رنگ‌ها، شوینده‌ها و داروها می‌توانند سوسپانسیون یا کلوئید باشند که مخلوط‌هایی ناهمگن محسوب می‌شوند.
- گزینه (۳): رفتار کلوئیدها را می‌توان رفتاری بین سوسپانسیون‌ها و محلول‌ها در نظر گرفت.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) در فرایند پاک کردن چربی از روی پارچه، هر چه میزان برهم کنش بین مولکول‌های چربی و پارچه بیشتر باشد، چربی راحت‌تر از پارچه پاک می‌شود.
- (۲) در آب سخت برخلاف آب معمولی، یون‌های منیزیم و کلسیم وجود دارد.
- (۳) در فرایند پاک‌کنندگی با صابون، اگر لباس از جنس نخ و دما 30°C باشد، درصد لکه چربی باقی‌مانده کم‌تر از زمانی خواهد بود که لباس از جنس پلی‌استر و دما 40°C باشد.
- (۴) از صابون‌های کلردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): هر چه میزان برهم کنش چربی و پارچه بیشتر باشد، جاذبه بیشتری بین لکه و پارچه وجود داشته و چربی سخت‌تر پاک می‌شود.
- گزینه (۲): در هر دو نمونه آب معمولی و سخت، یون‌های منیزیم و کلسیم وجود دارد، فقط در آب سخت، مقدار این یون‌ها بیشتره!
- گزینه (۳): با توجه به جدول کتاب درسی، درصد لکه باقی‌مانده در حالت پارچه نخ و دمای 30°C ، کم‌تر از حالتی است که پارچه، پلی‌استری و دما، 40°C باشد.

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^{\circ}\text{C}$)	درصد لکه باقی‌مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	30	25
صابون بدون آنزیم	نخی	40	15
صابون آنزیم‌دار	نخی	30	10
صابون آنزیم‌دار	نخی	40	0
صابون آنزیم‌دار	پلی‌استر	40	15

- توجه** شاید بگویند وجود پارچه نخ و دمای کم‌تر، دو اثر متضاد بر قدرت پاک‌کنندگی صابون دارند، به همین دلیل، گزینه (۳)، نامردیه و فقط حساب می‌شه! هرفتون کاملاً درسته! اما این عبارت رو عمداً براتون آوردیم و توقع داشتیم با رد گزینه به پاسخ درست سؤال برسید. در کنکور هم ممکنه به چنین مواردی برخورد کنید.
- گزینه (۴): از صابون‌های گوگرددار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

کدام مورد، نادرست است؟

- (۱) احساس لیزی هنگام تماس پوست دست با محلول بازی، به دلیل تشکیل صابون است.
- (۲) اسید معده، همان اسیدی است که به جوهرنمک نیز معروف است.
- (۳) همه اکسیدهای نافلزی با حل شدن در آب، pH آب را کاهش می دهند.
- (۴) اگر کاغذ pH با فراورده آلی حاصل از واکنش پتاسیم هیدروکسید با اسید چرب تماس پیدا کند، به رنگ آبی درمی آید.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برخی از اکسیدهای نافلزی مانند NO، CO و N_2O ، به صورت مولکولی در آب حل می شوند و نمی توانند pH آب را تغییر دهند، زیرا سبب تغییر $[H^+]$ آب نمی شوند.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): چربی پوست می تواند در واکنش با باز، صابون تولید کند.

گزینه (۲): اسید معده، همان HCl می باشد که به جوهرنمک نیز معروف است.

گزینه (۴): از واکنش KOH با اسید چرب، صابون مایع حاصل می شود که خاصیت بازی دارد. با تماس کاغذ pH با باز، رنگ کاغذ به آبی می گراید.

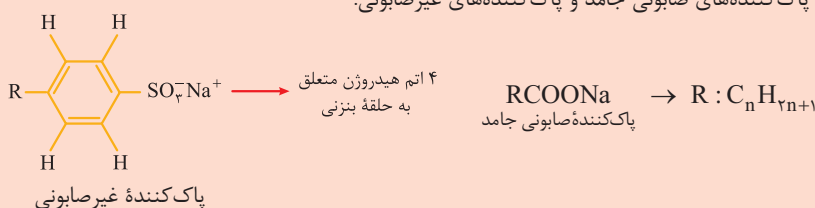
اگر مجموع شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی یک پاک‌کننده صابونی جامد و اتم‌های هیدروژن حلقه بنزنی در یک پاک‌کننده غیرصابونی، برابر ۳۵ باشد و هر دو دارای تعداد کربن برابر در زنجیر هیدروکربنی سیرشده خود باشند، کدام مورد درباره آن‌ها درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23, S = 32 : g.mol^{-1}$)

- (۱) جرم مولی پاک‌کننده صابونی، برابر با جرم مولی بخش ناقطبی پاک‌کننده غیرصابونی است.
- (۲) اگر به جای گروه آلکیل متصل به حلقه بنزنی در پاک‌کننده غیرصابونی، گروه آلکیل ۷ کربنی جایگزین کنیم، جرم مولی پاک‌کننده صابونی و غیرصابونی، برابر می‌شود.
- (۳) تفاوت مجموع شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی این دو پاک‌کننده، برابر ۱۴ است.
- (۴) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پاک‌کننده غیرصابونی، دو برابر این شمار در پاک‌کننده صابونی است.

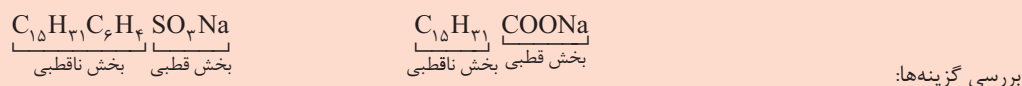
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به ساختار عمومی پاک‌کننده‌های صابونی جامد و پاک‌کننده‌های غیرصابونی:



تعداد اتم‌های هیدروژن در ساختار صابون جامد $2n+1 = 35 - 4 = 31$ و تعداد اتم‌های کربن نیز $n = 15$ می‌باشد؛ بنابراین ساختار دو پاک‌کننده به شکل زیر است:



بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): $278 g.mol^{-1} = 23 + (2 \times 16) + (31 \times 1) + (16 \times 12) =$ جرم مولی پاک‌کننده صابونی

$287 g.mol^{-1} = (35 \times 1) + (21 \times 12) =$ جرم مولی بخش ناقطبی پاک‌کننده غیرصابونی

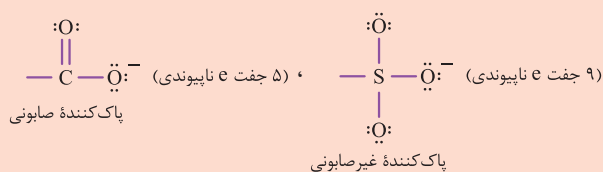
گزینه (۲): ساختار پاک‌کننده غیرصابونی با تغییر گروه آلکیل $\text{C}_7\text{H}_{15}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$

$278 g.mol^{-1} = 23 + (3 \times 16) + 32 + (19 \times 1) + (13 \times 12) =$ جرم مولی پاک‌کننده غیرصابونی جدید

گزینه (۳): شمار اتم‌ها در پاک‌کننده صابونی ($\text{C}_{15}\text{H}_{31}\text{COONa}$) برابر با ۵۰ و شمار اتم‌ها در پاک‌کننده غیرصابونی ($\text{C}_{15}\text{H}_{31}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$) برابر با ۶۱ است.

$$61 - 50 = 11$$

گزینه (۴): جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در هر دو پاک‌کننده مربوط به اتم‌های اکسیژن است:



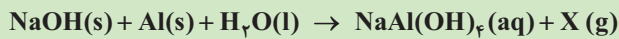
$$\frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی پاک‌کننده غیرصابونی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی پاک‌کننده صابونی}} = \frac{9}{5} \neq 2$$

اگر تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در مولکول یک پاک‌کننده صابونی جامد و اتم‌های هیدروژن حلقه بنزنی در مولکول یک پاک‌کننده غیرصابونی گوگرددار، برابر ۳۱ و هر دو دارای زنجیر هیدروکربنی سیر شده باشند، کدام مورد درباره آن‌ها به یقین درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23, S = 32 : g.mol^{-1}$)

(سؤال ۹۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

- ۱) جرم مولی پاک‌کننده صابونی، برابر ۳۰۶ گرم است.
- ۲) شمار اتم‌های کربن در مولکول دو پاک‌کننده، برابر است.
- ۳) جرم مولی پاک‌کننده صابونی، بیشتر از جرم مولی پاک‌کننده غیرصابونی است.
- ۴) تفاوت شمار اتم‌های کربن زنجیر هیدروکربنی در مولکول دو پاک‌کننده، برابر ۶ است.

۸۵ با توجه به معادله واکنش سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم با آب، کدام مورد، نادرست است؟ ($Al = 27 \text{ g.mol}^{-1}$)



- (۱) از این پاک کننده می توان برای باز کردن لوله هایی که در اثر تجمع چربی بسته شده اند، استفاده کرد.
- (۲) علامت ΔH واکنش، منفی است و مجموع ضرایب مواد شرکت کننده در آن پس از موازنه برابر ۱۵ است.
- (۳) گاز تولید شده در فراورده ها، قدرت پاک کنندگی مخلوط را افزایش می دهد.
- (۴) به ازای مصرف ۲ / ۷ گرم آلومینیم، ۱۵ / ۰ مول گاز اکسیژن تولید می شود.

پاسخ: گزینه ۴

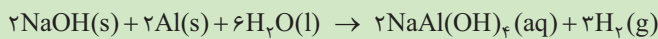


مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم در باز کردن لوله ها و مسیرهایی که بر اثر تجمع چربی بسته شده اند، کاربرد دارد.
فراورده های دیگر + گاز هیدروژن $\rightarrow$ آب + مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید
کارایی این مخلوط در باز کردن مجاری به واسطه موارد زیر است:

- (۱) خاصیت بازی مخلوط (به دلیل وجود $NaOH$) منجر به تشکیل صابون می شود.
- (۲) واکنش این مخلوط با آب گرماده است که گرمای حاصل از آن در ذوب کردن چربی و آلاینده ها و زدودن راحت تر آن ها نقش دارد.
- (۳) گاز هیدروژن حاصل از واکنش این مخلوط با آب، فشار بالایی را در مجاری و لوله ها ایجاد می کند که به کمک این فشار مکانیکی زدودن آن ها از آلاینده ها راحت تر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برون هیچ حساب کتابی، معلومه که گزینه (۴) غلطه! زیرا در واکنش، گاز هیدروژن تولید می شود، نه اکسیژن!
در مورد گزینه (۲) دقت کنید که واکنش، گرماده بوده و ΔH آن منفی است. هم چنین معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



$$مجموع ضرایب = 2 + 2 + 6 + 2 + 3 = 15$$

با توجه به واکنش زیر که نوعی پاک کننده پودری را نشان می دهد؛ به سوالات پاسخ دهید.

فراورده های دیگر + گاز A $\rightarrow$ آب + مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید
(الف) نام گاز A را بنویسید.

(ب) آیا این پودر پاک کننده، خورنده است؟ دلیل بنویسید.

(پ) تولید گاز چگونه قدرت پاک کنندگی این مخلوط را افزایش می دهد؟ توضیح دهید.



کدام مورد درست است؟

۸۶

- (۱) پیش از شناخت ساختار اسیدها و بازها توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با ویژگی‌های این مواد آشنا نبودند.
 (۲) مولکول $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ به دلیل داشتن گروه OH در ساختار خود، باز آرنیوس محسوب می‌شود.
 (۳) برای کاهش pH خاک، می‌توان به آن آهک (کلسیم اکسید) اضافه کرد.
 (۴) ملاک مقایسه قدرت دو اسید در شرایط یکسان، میزان $[\text{H}_3\text{O}^+]$ در محلول آبی آن‌ها است.

پاسخ: گزینه ۴

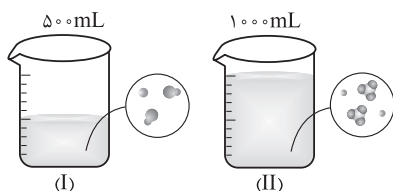
بررسی سایر گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه (۱): شیمی‌دان‌ها پیش از شناسایی ساختار اسیدها و بازها با برخی ویژگی‌های آن‌ها آشنا بوده‌اند، اما سوانت آرنیوس نخستین کسی بود که رفتار اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.
 گزینه (۲): مولکول $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ یا اتانول در آب به صورت مولکولی حل شده و یونیده نمی‌شود؛ پس غلظت یون هیدروکسید محلول را تغییر نداده و باز آرنیوس محسوب نمی‌شود.
 گزینه (۳): آهک (کلسیم اکسید)، یک اکسید فلزی با خاصیت بازی است که افزودن آن به خاک، pH خاک را افزایش می‌دهد.



با توجه به شکل‌های زیر که از حل شدن دی‌نیتروژن پنتاکسید و باریم اکسید در آب به دست آمده‌اند، کدام موارد درست است؟ (هر ذره نشان داده شده معادل 0.1 مول است، $N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)



الف) غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (I)، دو برابر غلظت مولار یون نیترات در محلول (II) است.

ب) با افزودن $1/0.8$ گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید جامد به محلول آن، می‌توان غلظت مولار یون هیدرونیوم در محلول را دو برابر کرد.

پ) هر دو محلول، رسانایی الکتریکی بیشتری از محلول هیدروبرمیک اسید 0.1 مولار دارند.
ت) کاغذ pH در محلول‌های (I) و (II) به ترتیب به رنگ سرخ و آبی درمی‌آید.

(۲) الف - ت

(۱) پ - ت

(۴) ب - پ

(۳) الف - پ

پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های (الف) و (ب) درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اکسیدهای فلزی مانند BaO در آب خاصیت بازی دارند و در محلول آن‌ها، یون هیدروکسید (OH^-) وجود دارد، در حالی که اکسیدهای نافلزی مانند N_2O_5 ، در آب خاصیت اسیدی داشته و در محلول آن‌ها یون هیدرونیوم (H^+) وجود دارد.



بررسی عبارت‌ها:

الف) در محلول (I)، 0.2 مول یون هیدروکسید و در محلول (II)، 0.2 مول یون نیترات وجود دارد، اما حجم محلول (I) نصف محلول (II) است؛ بنابراین غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (I)، دو برابر غلظت یون نیترات در محلول (II) است.

$$\frac{\text{تعداد مول}}{\text{حجم محلول}} = \text{غلظت مولی}$$

(ب)

$$1/0.8 \text{ g } N_2O_5 \times \frac{1 \text{ mol } N_2O_5}{108 \text{ g } N_2O_5} \times \frac{2 \text{ mol } HNO_3}{1 \text{ mol } N_2O_5} \times \frac{1 \text{ mol } H^+}{1 \text{ mol } HNO_3} = 0.2 \text{ mol } H^+$$

تعداد مول‌های هیدرونیوم حاصل از افزودن N_2O_5 به محلول برابر با تعداد هیدرونیوم در محلول اولیه است، پس با افزودن آن، غلظت H^+ در محلول دو برابر می‌شود.

پ) مجموع غلظت یون‌ها، تعیین‌کننده رسانایی الکتریکی محلول است که در ظرف (I)، 0.6 مولار و در ظرف (II)، 0.4 مولار است؛ اما در محلول هیدروبرمیک اسید 0.1 مولار ($HBr \rightarrow H^+ + Br^-$)، مجموع غلظت یون‌ها برابر 0.2 مولار است. مجموع غلظت یون‌ها در محلول هیدروبرمیک اسید بیشتر است؛ پس رسانایی الکتریکی آن نیز بیشتر خواهد بود.

ت) برعکس گفته! کاغذ pH در محیط‌های بازی مانند محلول (I)، به رنگ آبی و در محیط‌های اسیدی مانند محلول (II) به رنگ سرخ درمی‌آید.

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) حرکت یون‌ها به سوی قطب‌های همنام خود در مدار الکتریکی، علت رسانایی محلول‌های الکترولیت، مانند NaCl(aq) می‌باشد.

ب) در بین مواد «گرافیت»، NaCl(s) و $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6\text{(aq)}$ ، هیچ رسانای یونی وجود ندارد.

پ) کربوکسیلیک اسیدها با آزاد کردن هیدروژن‌های متصل به کربن در ساختارشان، خاصیت اسیدی در محلول ایجاد می‌کنند.

ت) مواد مولکولی، می‌توانند غیرالکترولیت، الکترولیت ضعیف و یا الکترولیت قوی باشند.

۱) الف - ب

۲) ب - ت

۳) الف - پ

۴) ب - پ

پاسخ: گزینه ۲

موارد (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی موارد:

الف) یون‌ها با قرارگیری در مدار الکتریکی به سوی قطب‌های ناهمنام خود حرکت می‌کنند، نه قطب‌های همنام!

ب) گرافیت، رسانای الکتریکی است و دو ماده دیگر، رسانای جریان برق نیستند.

ت) ترکیب‌های یونی در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند؛ زیرا یون‌ها در حالت جامد نمی‌توانند آزادانه جابه‌جا شوند.

پ) محلول‌های الکترولیت جزء رساناهای یونی هستند؛ یعنی در آن‌ها، جریان الکتریکی در اثر حرکت یون‌ها ایجاد می‌شود. ما علاوه بر رساناهای یونی، رساناهای الکتریکی هم داریم. در این نوع رساناها، جریان الکتریکی به وسیله حرکت الکترون‌ها ایجاد می‌شود. فلزها و گرافیت (یکی از آلوتروپ‌های نافلز کربن)، رسانای الکتریکی هستند.

نوع رسانا	دلیل رسانایی	مثال
الکترونی	حرکت الکترون‌ها	فلزها و گرافیت
یونی	حرکت یون‌ها	محلول‌های الکترولیت و نمک‌های مذاب

پ) فقط هیدروژن متصل به عامل کربوکسیل (COOH)، هیدروژن اسیدی محسوب می‌شود؛ نه همه اتم‌های هیدروژن یک کربوکسیلیک اسید!

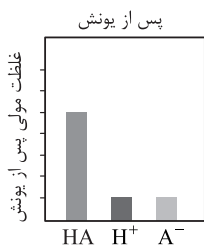
ت) مواد مولکولی می‌توانند غیرالکترولیت (مثل اتانول یا شکر)، الکترولیت ضعیف (مثل HF) و یا الکترولیت قوی (مثل HCl) باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✖

نکته 📢

شکل زیر غلظت نسبی اجزای یک محلول اسیدی به حجم ۲۵ L / ۰ را نشان می‌دهد. کدام مطلب، درست است؟



(۱) درصد یونش اسید، برابر ۲۰٪ است.

(۲) اگر غلظت یون هیدرونیوم پس از یونش $\text{mol.L}^{-1} \times 10^{-2} \times 4$ باشد، شمار مولکول‌های HA پیش از یونش، برابر $3/612 \times 10^{22}$ است.

(۳) شمار یون‌های حاصل از انحلال ۰/۶ مول HA در آب، با شمار یون‌های حاصل از واکنش ۰/۱ مول لیتیم اکسید با آب برابر است.

(۴) با افزودن آب به محلول، غلظت مولار محلول و در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم در آن افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مطابق با شکل نشان داده شده اگر غلظت مولی یون هیدرونیوم پس از یونش را $x \text{ mol.L}^{-1}$ در نظر بگیریم، غلظت مولی A^- و مولکول‌های یونش نیافته به ترتیب برابر $x \text{ mol.L}^{-1}$ و $5x \text{ mol.L}^{-1}$ می‌باشد. همچنین غلظت مولی مولکول‌های اولیه اسید از مجموع غلظت یونیده شده آن (معادل با $[H^+]$) و غلظت باقی‌مانده (یونیده نشده) به دست می‌آید:

$$[HA]_{\text{اولیه}} = [HA]_{\text{یونیده نشده}} + [HA]_{\text{یونیده شده}} = x + 5x = 6x \text{ mol.L}^{-1} = [H^+]$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{غلظت مولی مولکول‌های یونیده شده}}{\text{غلظت مولی کل مولکول‌های حل شده}} \times 100 = \frac{x}{6x} \times 100 = 16.67\%$$

گزینه (۲):

$$[H_3O^+]_{\text{پس از یونش}} = x = 4 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow [HA]_{\text{پیش از یونش}} = 6x = 0.24 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$3/612 \times 10^{22} = 0.24 \times 0.25 \times 6.02 \times 10^{23} = N_A \times \text{حجم} \times \text{غلظت} = \text{شمار مولکول‌های HA پیش از یونش}$$

گزینه (۳): اگر غلظت اولیه اسید در محلول را $6x$ در نظر بگیریم، با توجه به رابطه « غلظت $\times$ حجم = تعداد مول »، تعداد مول‌های اسید در محلول پیش از یونش $1/5x = 0.25 \times 6x$ خواهد بود.

$$1/5x = 0.6 \text{ mol} \rightarrow x = 0.4$$

$$2x = 0.8 \text{ mol.L}^{-1} \rightarrow \text{شمار مول یون‌های حاصل یونش} = 0.8 \times 0.25 = 0.2 \text{ mol}$$

از واکنش ۰/۱ مول Li_2O با آب، ۰/۴ مول یون حاصل می‌شود:



گزینه (۴): با اضافه کردن آب، محلول رقیق می‌شود و غلظت محلول کاهش می‌یابد.

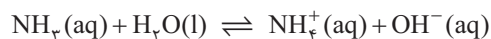
کدام مورد نادرست است؟

- (۱) فرایند تبدیل یک ترکیب مولکولی به یون‌ها در آب، تنها در مورد اسیدها صدق می‌کند.
- (۲) بخش عمده‌ای از گونه‌های موجود در سرکه، به شکل مولکول‌های یونیده‌نشده دیده می‌شوند.
- (۳) رسانایی الکتریکی بالا در یک محلول اسیدی، دلیلی بر غلظت بالای یون‌های آب‌پوشیده است.
- (۴) در شرایط معین، غلظت همه گونه‌های موجود در محلول هیدروفلوئوریک اسید، همانند دیگر اسیدهای ضعیف ثابت است.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

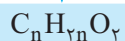
علاوه بر اسیدها، برای برخی بازها نیز واژه یونش و تبدیل ترکیب به یون، به کار می‌رود، مانند آمونیاک:



در مورد گزینه (۲) دقت کنید که سرکه، همان محلول استیک اسید در آب است. استیک اسید (CH_3COOH) یک اسید ضعیف است و به طور جزئی یونیده می‌شود؛ از این رو در محلول آن، تعداد مولکول‌های یونیده‌نشده، زیاد و تعداد یون‌های آب‌پوشیده کم است.

x گرم از یک کربوکسیلیک اسید تک ظرفیتی ۵ کربنه با زنجیر هیدروکربنی سیر شده را به ۱۲ لیتر آب اضافه می کنیم.

اگر تعداد یون های هیدرونیوم حاصل برابر $۱۰^{۲۰} \times ۷۲ / ۲۱۶$ و درجه یونش اسید، برابر ۰/۰۰۵ باشد، x کدام است؟



(از تغییر حجم آب صرف نظر کنید. $H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

$۶۸۶ / ۴ (۲)$

$۶۱۲ / ۰ (۱)$

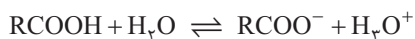
$۷۳۴ / ۴ (۴)$

$۷۲۰ / ۰ (۳)$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا تعداد مول اولیه کربوکسیلیک اسید را محاسبه می کنیم:

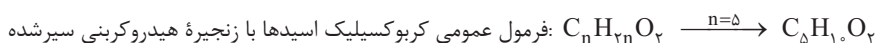
پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$۲۱۶ / ۷۲ \times ۱۰^{۲۰} H_3O^+ \times \frac{۱ \text{ mol } H_3O^+}{۶ / ۰۲ \times ۱۰^{۲۳} H_3O^+} = ۰ / ۰۳۶ \text{ mol } H_3O^+$$

$$\alpha = \frac{\text{تعداد مول های هیدرونیوم}}{\text{تعداد مول های اسید حل شده}} = ۰ / ۰۰۵ \Rightarrow \text{تعداد مول اسید حل شده} = ۷ / ۲ \text{ mol}$$

سپس با تعیین کردن فرمول کربوکسیلیک اسید، جرم مولی آن و در نهایت x را به دست می آوریم:



$$۷ / ۲ \times ۱۰۲ = ۷۳۴ / ۴ \text{ g} = \text{جرم مولی} \times \text{مول} = x (\text{جرم}) \rightarrow ۱۰۲ \text{ g.mol}^{-1} = \text{جرم مولی اسید}$$

در محلولی از اسید HA با غلظت ۰/۱ مولار، غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم، ۴ برابر غلظت مولی مولکول‌های یونیده‌نشده است. درصد یونش اسید در محلول کدام است و اگر در دمای ثابت، غلظت محلول را به صورتی تغییر دهیم که درجه یونش محلول نصف شود، نسبت غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده اسید به غلظت یون‌های هیدرونیوم در محلول نهایی کدام است؟

$$۱/۵ - ۸۰ (۲)$$

$$۱/۵ - ۴۰ (۱)$$

$$۲/۵ - ۸۰ (۴)$$

$$۲/۵ - ۴۰ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

درجه یونش اسیدها:

درس Box

اسیدهای ضعیف به طور جزئی در آب یونش می‌یابند؛ یعنی تنها تعداد کمی از مولکول‌های اسید، یونش یافته و به یون تبدیل می‌شوند و بیشتر مولکول‌های اسید به صورت یونیده‌نشده در آب باقی می‌مانند. فرض کنید غلظت اولیه یک اسید ضعیف (مانند HX)، M مولار باشد و X مولار آن یونش یابد؛ بنابراین غلظت مولکول‌های یونش‌نیافته در محلول برابر (M - x) مولار و غلظت هر یک از یون‌های حاصل از یونش نیز برابر X مولار خواهد بود.

	$HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$		
گونه	HX(aq)	$H^+(aq)$	$X^-(aq)$
غلظت پیش از یونش	M	۰	۰
غلظت پس از یونش	M - x	x	x

برای مقایسه میزان یونش اسیدها از کمیتی به نام درجه یونش استفاده می‌شود که رابطه آن به صورت زیر است:

$$\text{درجه یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار مول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مول‌های حل شده}} \quad \text{یا} \quad \text{درجه یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}}$$

در برخی موارد به جای درجه یونش، از درصد یونش (α) استفاده می‌شود:

$$۱۰۰ \times \text{درجه یونش } (\alpha) = \text{درصد یونش } (\alpha\%)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



غلظت اولیه: ۰/۱ ۰ ۰

غلظت نهایی: ۰/۱ - x x x

$$\text{فرض سؤال: } x = 4(0.1 - x) \Rightarrow x = 0.4 - 4x \Rightarrow 5x = 0.4 \Rightarrow x = \frac{0.4}{5} = 0.08$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{x}{0.1} \times 100 = \frac{0.08}{0.1} \times 100 = 80\%$$

اگر با تغییر غلظت محلول، درجه یونش اسید نصف شود، یعنی از ۸۰ به ۴۰ برسد، خواهیم داشت:



غلظت نهایی: M - y y y

$$\alpha = \frac{y}{M} = 0.4$$

$$\text{خواسته سؤال} = \frac{[HA]}{[H^+]} = \frac{M - y}{y} = \frac{M}{y} - 1 = \frac{1}{0.4} - 1 = 2.5 - 1 = 1.5$$

کدام مورد به یقین درست است؟

- (۱) مطابق مدل آرنیوس، اسید ماده‌ای است که در ساختار آن، اتم هیدروژن وجود دارد.
- (۲) اسیدهایی که انحلال پذیری زیادی در آب دارند، جزء اسیدهای قوی دسته‌بندی می‌شوند.
- (۳) اسیدهای تک‌پروتون‌دار، اسیدهایی هستند که در ساختار آن‌ها، تنها یک اتم هیدروژن وجود دارد.
- (۴) در اسیدهای ضعیف تک‌پروتون‌دار همانند اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، غلظت مولی آنیون حاصل از یونش با غلظت مولی یون هیدرونیوم برابر است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به ازای یونش هر مول اسید HA (قوی یا ضعیف) یک مول یون هیدرونیوم و یک مول آنیون تولید خواهد شد، پس در هر دو نوع محلول، غلظت مولی کاتیون‌ها و آنیون‌های حاصل از یونش با هم برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه (۱): اولاً این‌که در ساختار بعضی از اسیدها (مانند N_2O_5) اصلاً اتم هیدروژن وجود ندارد. دوماً موادی وجود دارند که در ساختار آن‌ها اتم هیدروژن وجود دارد، اما اسید محسوب نمی‌شوند؛ مانند C_6H_5OH !
- گزینه (۲): طبقه‌بندی اسیدها به قوی و ضعیف، بر مبنای میزان یونش آن‌ها در آب است، نه براساس میزان انحلال‌پذیری آن‌ها!
- گزینه (۳): نه‌کی گفته! مثلاً استیک اسید (CH_3COOH)، ۴ اتم هیدروژن دارد، ولی تک‌پروتون‌دار محسوب می‌شود، زیرا فقط هیدروژن گروه کربوکسیل آن، می‌تواند به صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود.

اگر اتم‌های ${}_{3m-1}^{5m+1}X$ و ${}_{2m+2}^{6m}X$ ایزوتوپ یکدیگر باشند، عنصر X به کدام گروه جدول دوره‌ای تعلق دارد و تفاوت شمار نوترون‌های این ایزوتوپ‌ها کدام است؟

یعنی عدد اتمی آن‌ها برابر است.

$$3 - 16 (2)$$

$$2 - 16 (4)$$

$$2 - 14 (1)$$

$$3 - 14 (3)$$

پاسخ: گزینه ۴



به اتم‌هایی که تعداد پروتون‌های آن‌ها با هم برابر و تعداد نوترون‌هایشان متفاوت است، ایزوتوپ می‌گویند؛ به عبارت دیگر ایزوتوپ‌ها، اتم‌های یک عنصرند (یعنی Z یکسان دارند) که در تعداد نوترون‌ها و در نتیجه در عدد جرمی (A) با یکدیگر متفاوت‌اند؛ پس اتم‌هایی با نمادهای کلی ${}_Z^A E$ و ${}_Z^{A'} E$ ، ایزوتوپ یکدیگرند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که اتم‌ها، ایزوتوپ یکدیگرند، عدد اتمی آن‌ها را برابر قرار داده و m را به دست می‌آوریم:

$$2m + 2 = 3m - 1 \rightarrow m = 3$$

$$3m - 1 = 2m + 2 = 8 = \text{عدد اتمی عنصر}$$

عنصری با عدد اتمی ۸، همان عنصر اکسیژن (${}_8O$) است که در گروه ۱۶ جدول دوره‌ای قرار دارد.

$${}_{3m-1}^{5m+1}X \Rightarrow {}_8^{16}X \Rightarrow \text{شمار نوترون‌ها} = 16 - 8 = 8$$

$${}_{2m+2}^{6m}X \Rightarrow {}_8^{18}X \Rightarrow \text{شمار نوترون‌ها} = 18 - 8 = 10$$

تفاوت شمار نوترون‌های دو ایزوتوپ برابر ۲ است.



۹۵ کدام مورد درست است؟

- (۱) مشتری یک سیاره گازی است و در بین عنصرهای سازنده آن، عنصری که در شرایط معمولی زمین به حالت جامد باشد، وجود ندارد.
- (۲) تهیه شناسنامه فیزیکی و شیمیایی سیاره‌های مشتری، زحل، مریخ و اورانوس، جزء مأموریت‌های فضاپیماهای وویجر بود.
- (۳) آهن و هیدروژن به ترتیب فراوان‌ترین عنصرهای سازنده سیاره‌های زمین و مشتری هستند که درصد فراوانی بالای 50% در این سیاره‌ها دارند.
- (۴) با انجام واکنش‌های هسته‌ای درون ستاره‌ها، عنصرهای سبک‌تر به عنصرهای سنگین‌تر تبدیل می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درون ستاره‌ها همانند خورشید در فشارها و دماهای بسیار بالا، واکنش‌های هسته‌ای رخ می‌دهد که در آن‌ها از عنصرهای سبک‌تر، عناصر سنگین‌تر تشکیل می‌شود.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه (۱): در میان ۸ عنصر فراوان‌تر سیاره مشتری، عناصر C و S وجود دارند که در شرایط معمولی زمین، حالت آن‌ها جامد است.

گزینه (۲): فضاپیماهای وویجر مأموریت داشتند تا با گذر از کنار سیاره‌های مشتری، زحل، اورانوس و نپتون به تهیه شناسنامه‌های فیزیکی و شیمیایی آن‌ها بپردازند. مریخ *پروشون نبور*!

گزینه (۳): درصد فراوانی آهن در سیاره زمین به عنوان فراوان‌ترین عنصر این سیاره، کمتر از 50% درصد است.



نمونه‌ای فرضی از هیدروژن حاوی ایزوتوپ‌های طبیعی آن را در نظر بگیرید. اگر درصد فراوانی سبک‌ترین ایزوتوپ در این نمونه، ۸۰٪ و جرم اتمی میانگین هیدروژن، 1.0079 amu باشد، درصد فراوانی سنگین‌ترین ایزوتوپ در نمونه کدام است؟

^1_1H و ^2_1H	۸ (۲)	۱۰ (۱)
	۱ (۴)	۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۴



جرم اتمی میانگین یک عنصر را می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$1) M = \frac{M_1F_1 + M_2F_2 + \dots}{F_{\text{کل}}}$$

$$2) M = M_1 + \frac{F_2}{F_{\text{کل}}} (M_2 - M_1) + \frac{F_3}{F_{\text{کل}}} (M_3 - M_1) + \dots$$

M، نماد جرم اتمی و F، نماد فراوانی ایزوتوپ‌ها است؛ ایزوتوپ ۱ نیز، ایزوتوپ سبک‌تر است.

می‌دانیم هیدروژن دارای ۳ ایزوتوپ طبیعی ^1_1H ، ^2_1H و ^3_1H است. اگر درصد فراوانی ایزوتوپ ^1_1H ، ۸۰ درصد باشد، مجموع درصد فراوانی ایزوتوپ‌های ^2_1H و ^3_1H ، ۲۰ درصد است. پس:

$$1.0079 = 1 + \frac{F_2}{100} \times (2 - 1) + \frac{F_3}{100} \times (3 - 1) \rightarrow 0.0079 = \frac{F_2 + 2F_3}{100}$$

$$\begin{cases} F_2 + 2F_3 = 0.79 \\ F_2 + F_3 = 20 \end{cases}$$

$$F_3 = 1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام مورد دربارهٔ تکنسیم (${}^{99}_{43}\text{Tc}$) و اورانیم (${}^{235}_{92}\text{U}$)، نادرست است؟

- (۱) تکنسیم به دستهٔ d و اورانیم به دستهٔ f جدول دوره‌ای تعلق دارد.
- (۲) تکنسیم، نخستین عنصر ساخت بشر و اورانیم، شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزا است.
- (۳) هر دو رادیوایزوتوپ بوده و نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها در هستهٔ آن‌ها، بیشتر از ۱/۵ است.
- (۴) تکنسیم در جدول دوره‌ای با ${}_{25}\text{Mn}$ ، هم‌گروه و با ${}_{37}\text{Rb}$ ، هم‌دوره است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکات مهم تکنسیم و اورانیم:

اورانیم (${}_{92}\text{U}$)	تکنسیم (${}_{43}\text{Tc}$)
- عنصری طبیعی و پرتوزا است و شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزا به حساب می‌آید. - از یکی از ایزوتوپ‌های آن (${}^{235}_{92}\text{U}$)، اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود. - فراوانی اورانیم-۲۳۵ (${}^{235}_{92}\text{U}$) در مخلوط طبیعی اورانیم، کم‌تر از ۰/۷ درصد است. - در ردیف دوم پایین جدول تناوبی قرار گرفته است.	- نخستین عنصر ساخت بشر است (عنصری ساختگی است). - ایزوتوپی از آن در طبیعت وجود ندارد. - در تصویربرداری از غدهٔ تیروئید کاربرد دارد و یون حاوی آن با یون یدید اندازهٔ مشابهی دارد. - با این‌که پرتوزا است، اما نسبت شمار پروتون آن کم‌تر از ۱/۵ است. - نیم‌عمر کمی دارد و نمی‌توان آن را برای مدت طولانی نگهداری کرد. - متعلق به دورهٔ ۵ و گروه ۷ جدول تناوبی است.



با توجه به این‌که عدد اتمی برابر با تعداد پروتون‌ها و عدد جرمی معادل با مجموع شمار نوترون‌ها و پروتون‌ها در هستهٔ اتم است، نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها برابر است با:

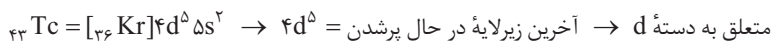
$$\frac{n}{p} = \frac{A - Z}{Z}$$

$$\frac{n}{p} \begin{cases} {}^{99}_{43}\text{Tc} = \frac{99 - 43}{43} \approx 1/3 (< 1/5) \\ {}^{235}_{92}\text{U} = \frac{235 - 92}{92} \approx 1/55 \end{cases}$$

پس اگرچه هر دو عنصر ایزوتوپ‌های پرتوزا (رادیوایزوتوپ) می‌باشند، اما مقدار $\frac{n}{p}$ در ${}^{99}_{43}\text{Tc}$ کم‌تر از ۱/۵ می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):



عنصری با عدد اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲، متعلق به دستهٔ f جدول تناوبی هستند.

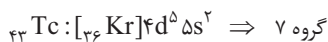
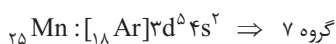


عنصر ${}_{92}\text{U}$ نیز متعلق به دستهٔ f جدول تناوبی است.

گزینهٔ (۲): طبق مطالب کتاب درسی درست است.

گزینهٔ (۴): دورهٔ ۵ام جدول تناوبی، عنصری با عدد اتمی ۳۷ تا ۵۴ را شامل می‌شود و عناصر ${}_{43}\text{Tc}$ و ${}_{37}\text{Rb}$ در آن قرار دارند.

در ادامه، با توجه به آرایش الکترونی ${}_{43}\text{Tc}$ و ${}_{25}\text{Mn}$:



یا می‌شد این‌پوری گفت که تفاوت عدد اتمی دو عنصر با گاز نجیب هم‌دوره‌شان، یکسان است، پس هم‌گروه هستند.

$$\begin{cases} 54 - 43 = 11 \\ 36 - 25 = 11 \end{cases}$$

دو قطعه جداگانه از فلزهای آلومینیم و آهن را در اختیار داریم. اگر مجموع جرم این دو قطعه برابر ۶۸۵ گرم و شمار اتم‌های آلومینیم سه برابر شمار اتم‌های آهن باشد، مجموع حجم این دو قطعه چند سانتی‌متر مکعب است؟

فلز	جرمی مولی (g.mol^{-1})	چگالی (g.cm^{-3})
آهن	۵۶	۸/۰
آلومینیم	۲۷	۲/۷

۱۸۵ (۲)

۱۵۵ (۱)

۵۵۵ (۴)

۳۶۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: قطعه آهنی را دارای x مول اتم Fe و قطعه آلومینیمی را حاوی y مول اتم Al فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع جرم دو قطعه: } ۵۶ \times x + ۲۷ \times y = ۶۸۵ \\ \text{شمار اتم‌ها: } y \times N_A = ۳ \times x \times N_A \rightarrow y = ۳x \end{cases}$$

$$۵۶x + ۲۷(۳ \times x) = ۱۳۷x = ۶۸۵ \rightarrow x = ۵, y = ۱۵$$

گام دوم: سپس با توجه به تعداد مول اتم‌های آهن و آلومینیم، حجم هر یک از قطعه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم قطعه آهنی} = ۵ \text{ mol Fe} \times \frac{۵۶ \text{ g Fe}}{۱ \text{ mol Fe}} \times \frac{۱ \text{ cm}^3}{۸ \text{ g Fe}} = ۳۵ \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم قطعه آلومینیمی} = ۱۵ \text{ mol Al} \times \frac{۲۷ \text{ g Al}}{۱ \text{ mol Al}} \times \frac{۱ \text{ cm}^3}{۲/۷ \text{ g Al}} = ۱۵۰ \text{ cm}^3$$

$$\text{مجموع حجم دو قطعه} = ۱۵۰ + ۳۵ = ۱۸۵ \text{ cm}^3$$

- (۱) تعداد خطوط طیف نشری عنصرها در گستره مرئی، با عدد اتمی آن‌ها رابطه مستقیم دارد.
- (۲) پرتوهای منتشرشده از کنترل تلویزیون همانند نور نشرشده از شمع، انرژی بیشتری از پرتوهای سبزرنگ و طول موج کوتاه‌تری از آن‌ها دارند.
- (۳) براساس مدل کوانتومی اتم، علت منحصربه‌فردبودن طیف نشری خطی عنصرها، با تفاوت عدد اتمی آن‌ها توجیه می‌گردد.
- (۴) در نمایش امواج پرتوهای الکترومغناطیسی، فاصله بین هر دو قله متوالی در پرتوهای گاما به مراتب بیشتر از امواج رادیویی است.

طول موج

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

براساس مدل کوانتومی اتم، انرژی لایه‌های الکترونی در هر اتم به عدد اتمی (Z) آن وابسته است. پس تفاوت انرژی بین لایه‌ها در اتم‌های مختلف منحصربه‌فرد است که همین، تعیین‌کننده خطوط طیف نشری خطی عناصر می‌باشد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه (۱): *په ربطی داره!* مثلاً هر دو عنصر ${}^1_1\text{H}$ و ${}^3_3\text{Li}$ دارای ۴ خط در گستره مرئی طیف نشری خطی خود هستند، اما عدد اتمی آن دو متفاوت است.

گزینه (۲): پرتوهای منتشرشده از کنترل تلویزیون، فروسرخ و نور نشرشده از شمع زردرنگ است. پرتوهای فروسرخ نسبت به نور مرئی، طول موج بلندتر و انرژی کم‌تری دارد. همچنین نور زردرنگ نسبت به نور سبزرنگ، انرژی کم‌تر و طول موج بلندتری دارد. نور مرئی $>$ پرتوهای فروسرخ: طول موج

بنفش $>$ نیلی $>$ آبی $>$ سبز $>$ زرد $>$ نارنجی $>$ سرخ

گزینه (۴): فاصله بین هر دو قله متوالی، همان طول موج است که با انرژی رابطه عکس داشته و در پرتوهای گاما به مراتب کم‌تر از امواج رادیویی است.

امواج رادیویی $<$ ریزموج‌ها $<$ پرتوهای فروسرخ $<$ نور مرئی $<$ پرتوهای فرابنفش $<$ پرتوهای ایکس (X) $<$ پرتوهای گاما: مقایسه طول موج

کدام مطلب در رابطه با ساختار لایه‌ای اتم، نادرست است؟

- (۱) همانند مدل اتمی بور می‌تواند طیف نشری خطی عنصر هیدروژن را توجیه کند.
- (۲) مطابق آن، دادوستد انرژی هنگام انتقال الکترون از یک لایه به لایه دیگر، کوانتومی است.
- (۳) براساس آن، الکترون وقت خود را تنها می‌تواند در فاصله معینی از هسته سپری کند.
- (۴) در هر یک از لایه‌های الکترونی آن با عدد کوانتومی اصلی برابر n ، حداکثر $2n^2$ الکترون جای می‌گیرد.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

براساس ساختار لایه‌ای اتم، الکترون می‌تواند در همه نقاط پیرامون هسته حضور یابد، اما وقت بیشتری را در فاصله معینی از هسته به نام لایه، سپری می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): مدل اتمی بور تنها می‌تواند طیف نشری خطی عنصر هیدروژن را توجیه کند در حالی که ساختار لایه‌ای توانایی توجیه طیف نشری خطی سایر عناصر را نیز دارد.

گزینه (۲): کاملاً درسته!

گزینه (۴): حداکثر گنجایش الکترونی لایه‌ها از رابطه $2n^2$ به دست می‌آید.

طول موج پرتو نشرشده مربوط به انتقال الکترونی $n=1 \rightarrow n=2$ در اتم هیدروژن با طول موج پرتو نشرشده مربوط به انتقال الکترونی $n=4 \rightarrow n=5$ ، است و انتقال، در ناحیه مرئی قرار
 (۱) برابر - یکی از این دو - نمی‌گیرد
 (۲) نابرابر - هر دو - نمی‌گیرند
 (۳) برابر - هر دو - می‌گیرند
 (۴) نابرابر - یکی از این دو - نمی‌گیرد

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بادور شدن از هسته اختلاف انرژی بین لایه‌های متوالی کاهش می‌یابد، پس انتقال‌های الکترونی $n=1 \rightarrow n=2$ و $n=4 \rightarrow n=5$ در انرژی و طول موج نابرابر دارند.
 در اتم هیدروژن تنها انتقال‌های زیر منجر به نشر نور مرئی می‌گردند:
 $n=3 \rightarrow n=2, n=4 \rightarrow n=2, n=5 \rightarrow n=2, n=6 \rightarrow n=2$
 انتقال‌های ذکرشده در صورت سؤال، جزء ۴ انتقال بالا نبوده و در گستره مرئی قرار نمی‌گیرند.

اتم X دارای ۵ الکترون با $l = 2$ در آرایش الکترونی خود است. کدام گزینه می‌تواند نسبت شمار الکترون‌های

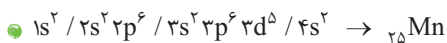
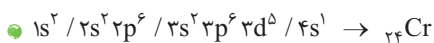
ظرفیتی به شمار الکترون‌هایی با $l = 0$ در آن را به درستی نشان دهد؟

- $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{6}{8}$ (۲) $\frac{7}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر اتمی تنها دارای ۵ الکترون در زیرلایه d ($l = 2$) باشد، می‌توان یکی از دو آرایش الکترونی زیر را برای آن در نظر گرفت:



هر دو عنصر متعلق به دسته d جدول دوره‌ای هستند و شمار الکترون‌های ظرفیتی در آن‌ها برابر با مجموع توان‌های ns و $(n-1)d$ می‌باشد. از این رو نسبت شمار الکترون‌های ظرفیتی آن‌ها به مجموع شمار الکترون‌های زیرلایه s ($l = 0$) برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} \\ \text{شمار الکترون‌های زیرلایه‌های } s \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} {}_{24}\text{Cr} = \frac{5+1}{2+2+2+1} = \frac{6}{7} \\ {}_{25}\text{Mn} = \frac{5+2}{2+2+2+2} = \frac{7}{8} \end{array} \right. \checkmark \rightarrow \text{این یکی در گزینه‌ها آمده!}$$

با توجه به آرایش الکترونی فشردهٔ عناصر زیر، کدام مطلب، نادرست است؟

عنصر	X	D	A
آرایش الکترونی فشرده	$[\text{Ar}]3d^{10}4s^24p^6$	$[\text{He}]2s^2$	$[\text{Ne}]3s^23p^3$

(۱) اتم D فاقد زیرلایه‌هایی با $n+1$ یکسان در آرایش الکترونی خود است.

(۲) تعداد الکترون‌ها با $n+1 \geq 4$ در اتم X برابر ۲۴ است.

(۳) تعداد الکترون‌هایی با $l=1$ و $n=2$ در اتم A، کمتر از تعداد الکترون‌های ظرفیتی آن است.

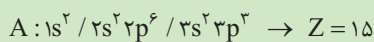
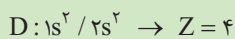
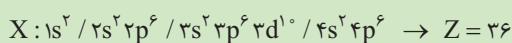
(۴) تفاوت عدد اتمی عنصرهای X و D، برابر با شمار ذرات زیراتمی باردار در اتم $^{32}_{16}\text{M}$ است

پروتون و الکترون

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با در نظر گرفتن آرایش الکترونی گازهای نجیب، آرایش الکترونی گستردهٔ این سه عنصر به صورت زیر است:



بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اتم D دارای ۲ زیرلایهٔ $1s$ و $2s$ در آرایش الکترونی خود است که مقدار $n+1$ از آن‌ها به ترتیب برابر با ۱ و ۲ می‌باشد. این اتم فاقد زیرلایه‌هایی با $n+1$ یکسان است.

گزینهٔ (۲): زیرلایه‌هایی با $n+1 \geq 4$ در آرایش الکترونی X عبارت‌اند از: $3p$ ، $3d$ ، $4s$ و $4p$. مجموع شمار الکترون‌های متعلق به این زیرلایه‌ها برابر است با:

$$\text{الکترون } 24 = 6 + 10 + 2 + 6$$

گزینهٔ (۳): زیرلایه با $l=1$ و $n=2$ همان $2p$ است که دارای ۶ الکترون در اتم A است.

آخرین زیرلایهٔ در حال پرشدن در اتم A، $3p$ است، پس این عنصر متعلق به دستهٔ p از جدول بوده و تعداد الکترون‌های ظرفیت آن برابر است با مجموع توان $3s$ و $3p$:

پس تعداد الکترون‌هایی با $l=1$ و $n=2$ در اتم A، بیشتر از تعداد الکترون‌های ظرفیتی آن است.

گزینهٔ (۴): با در نظر گرفتن مجموع شمار الکترون‌ها در آرایش الکترونی عنصرهای X و D، عدد اتمی آن‌ها به ترتیب برابر با ۳۶ و ۴ است:

شمار ذرات زیراتمی باردار (مجموع شمار پروتون‌ها و الکترون‌ها) در اتم $^{32}_{16}\text{M}$ نیز دو برابر عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) در آن بوده و برابر ۳۲ است.

(سوال ۲ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۳)

با توجه به آرایش‌های الکترونی فشردهٔ زیر، به پرسش‌ها پاسخ دهید.

اتم	M	X	Z
آرایش الکترونی فشرده	$[\text{Kr}]5s^2$	$[\text{Ar}]3d^{10}4s^24p^4$	$[\text{Ar}]3d^54s^1$

الف) شمارهٔ دوره و گروه عنصر M را مشخص کنید.

ب) اعداد کوانتومی (n و l) الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اتم X را تعیین کنید.

پ) عنصر Z به کدام دسته از عناصرها تعلق دارد؟ (s یا p یا d)

ت) در آرایش الکترونی کدام اتم دو زیرلایهٔ نیمه‌پر وجود دارد؟

ث) کدام اتم در شرایط مناسب می‌تواند الکترون به اشتراک بگذارد؟

کدام مورد دربارهٔ چهار گاز نجیب نخست جدول دوره‌ای، درست است؟

${}^2\text{He}$ ، ${}^{10}\text{Ne}$ ، ${}^{18}\text{Ar}$ ، ${}^{36}\text{Kr}$

- (۱) همهٔ لایه‌های الکترونی اشغال شدهٔ اتم آن‌ها به طور کامل پر است.
- (۲) واکنش‌پذیری ناچیزی داشته و همگی به دستهٔ p جدول تعلق دارند.
- (۳) همهٔ عنصرهای هم‌دورهٔ این گازها می‌توانند با از دست دادن، گرفتن و یا به اشتراک گذاشتن الکترون به آرایش یکی از آن‌ها برسند.
- (۴) در آرایش الکترون - نقطه‌ای همهٔ آن‌ها، الکترون تک (جفت‌نشده) وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چهار گاز نجیب نخست جدول دوره‌ای عبارت‌اند از: ${}^2\text{He}$ ، ${}^{10}\text{Ne}$ ، ${}^{18}\text{Ar}$ و ${}^{36}\text{Kr}$.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): آرایش الکترونی این ۴ عنصر به شکل زیر است:

${}^2\text{He} : 1s^2$

${}^{10}\text{Ne} : 1s^2 / 2s^2 2p^6$

زیرلایهٔ ۳d از لایهٔ سوم فاقد الکترون است. $\rightarrow {}^{18}\text{Ar} : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6$

زیرلایهٔ ۴d و ۴f از لایهٔ چهارم فاقد الکترون‌اند. $\rightarrow {}^{36}\text{Kr} : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 / 3d^{10} / 4s^2 4p^6$

گزینهٔ (۲): گازهای نجیب واکنش‌ناپذیرند یا واکنش‌پذیری ناچیزی دارند. در ضمن، به‌جز He که متعلق به دستهٔ s جدول است، باقی آن‌ها به دستهٔ p تعلق دارند.

گزینهٔ (۳): تمامی عنصرهای هم‌دورهٔ این گازها شامل ۳۶ عنصر نخست جدول (به‌جز گازهای نجیب) می‌باشد که در میان آن‌ها برخی فلزات با از دست دادن الکترون و برخی نافلزات با گرفتن و یا به اشتراک گذاشتن الکترون به آرایش گازهای نجیب می‌رسند. در حالی که برخی عناصر نیز مانند فلزاتی از دستهٔ d جدول، اصلاً به آرایش الکترونی گازهای نجیب نمی‌رسند.

گزینهٔ (۴): آرایش الکترون - نقطه‌ای این عناصر به شکل زیر است که همهٔ آن‌ها فاقد الکترون جفت‌نشده می‌باشند:

${}^2\text{He} : \ddot{\text{Ne}} : \ddot{\text{Ar}} : \ddot{\text{Kr}} :$

اگر شمار الکترون‌های موجود در آخرین زیرلایه اشغال شده در اتم دو عنصر دوره سوم جدول تناوبی برابر باشد، کدام مورد درست است؟

یا $3s^1$ و $3p^1$ و یا $3s^2$ و $3p^2$

- (۱) شمار الکترون‌های جفت نشده در آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم این دو عنصر، می‌تواند برابر باشد.
- (۲) شمار الکترون‌های ظرفیتی یکی از این عناصر، با شمار الکترون‌های ظرفیتی Cr برابر است.
- (۳) عدد اتمی یکی از عناصرها، می‌تواند برابر با مجموع عدد اتمی چهار عنصر ابتدایی دوره دوم باشد.
- (۴) مجموع مقدار $n+1$ برای الکترون‌های ظرفیتی اتم یکی از این عناصر، می‌تواند با عدد اتمی آن برابر باشد.

پاسخ: گزینه ۴

جدول زیر عناصر دوره سوم جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد:

عنصر	$_{11}Na$	$_{12}Mg$	$_{13}Al$	$_{14}Si$	$_{15}P$	$_{16}S$	$_{17}Cl$	$_{18}Ar$
شماره گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
آخرین زیرلایه در اتم	$3s^1$	$3s^2$	$3p^1$	$3p^2$	$3p^3$	$3p^4$	$3p^5$	$3p^6$
شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

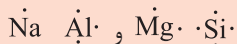
در دو جفت عنصر Na و Al یا Mg و Si ، شمار الکترون‌ها در آخرین زیرلایه اتم آن‌ها برابر است.

مجموع $n+1$ برای الکترون‌های ظرفیتی اتم عنصر Si برابر عدد اتمی آن ($Z=14$) است:

$$_{14}Si: 1s^2 2s^2 2p^6 \underbrace{3s^2 3p^2}_{\text{لایه ظرفیت}} \Rightarrow \begin{cases} 3s^2 \Rightarrow n+1=3 \xrightarrow{\times 2} 6 \\ 3p^2 \Rightarrow n+1=4 \xrightarrow{\times 2} 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} 14$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم این عناصر به صورت زیر است:



شمار الکترون‌های جفت نشده در اتم هیچ کدام از این جفت عناصر برابر نیست.

گزینه (۲): شمار الکترون‌های ظرفیتی Na و Al به ترتیب برابر ۱ و ۳ و شمار الکترون‌های ظرفیتی Mg و Si به ترتیب برابر ۲ و ۴ است.

گزینه (۳): مجموع عدد اتمی ۴ عنصر ابتدایی دوره دوم برابر ۱۸ ($3+4+5+6=18$) می‌باشد، در حالی که عدد اتمی هیچ یک از عنصرهای مورد نظر، برابر ۱۸ نیست.

اگر مجموع شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در اتم دو عنصر در دوره دوم جدول تناوبی عناصرها، برابر ۹ باشد، کدام مورد، نادرست است؟

(سؤال ۷۷ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

- (۱) تفاوت شمار الکترون‌های ظرفیت اتم دو عنصر، می‌تواند برابر یک باشد.
- (۲) آخرین زیرلایه اتم یکی از عناصرها می‌تواند پر و دیگری، نیمه پر باشد.
- (۳) عدد اتمی یک عنصر می‌تواند $7/0$ عدد اتمی عنصر دیگر باشد.
- (۴) تفاوت عدد اتمی دو عنصر، عددی زوج است.