

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله ششم

پایه یازدهم

۱۴۰۴/آبان/۱۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	یازدهم
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه	فصل ۱ (درس ۱ تا ۴) صفحه ۱ تا ۲۸
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه	فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها) صفحه ۱ تا ۹
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه	فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها) صفحه ۱ تا ۲۰
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه	فصل ۱ (تا ابتدای خازن) صفحه ۱ تا ۳۲
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه	فصل ۱ (تا ابتدای گنج‌های اعماق دریا) صفحه ۱ تا ۲۵
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه	—

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان	طراح: محسن علی نجاری کارشناس علمی: فرشاد حسن‌زاده - سجاد داوطلب	محسن علی نجاری
هندسه	طراح: کیوان صارمی کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب	کیوان صارمی
آمار و احتمال	طراحان: مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب	مسعود شفیعی
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی - نوید شاهی کارشناس علمی: علیرضا عبداللہی	نوید شاهی - یاشار انگوتی
شیمی	طراحان: معصومه سعیدی - امیرحسین مسلمی - امیر قاسمی‌پور کارشناس علمی: مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللہی - معصومه سعیدی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانیپور

این آزمون نمره‌منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤالات، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینشگر، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



حسابان یازدهم

۱- مجموع جملات دورقمی مشترک دنباله‌های حسابی $a_n : 5, 9, 13, \dots$ و $b_n : 6, 11, 16, \dots$ کدام است؟

$$(1) 200 \quad (2) 202$$

$$(3) 204 \quad (4) 208$$

۲- در یک دنباله هندسی ده جمله‌ای، مجموع چهار جمله اول 105 و مجموع چهار جمله آخر 6720 است. مجموع جمله اول و قدرنسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

$$(1) 7 \quad (2) 8$$

$$(3) 9 \quad (4) 10$$

۳- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله $2x^2 - kx - 1 = 0$ به صورت $\left\{\frac{\alpha}{\beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2}\right\}$ است؟

$$(1) 17 \quad (2) 22$$

$$(3) 34 \quad (4) 44$$

۴- اگر قدرمطلق ریشه منفی معادله $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ از ریشه مثبت آن بزرگ‌تر باشد، حدود m کدام است؟

$$(1) 0 < m < \frac{1}{2} \quad (2) 0 < m < 1$$

$$(3) m < 1 \quad (4) m > 0$$

۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر m در معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x به دست می‌آید؟

$$(1) m > 2 \quad (2) m < 3$$

$$(3) 2 \leq m < 3 \quad (4) \text{هیچ مقدار } m$$

۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 12x + 9 = 0$ باشند، حاصل $\frac{9\alpha + 3\beta^3}{5\beta}$ کدام است؟

$$(1) 10 \quad (2) 8$$

$$(3) 6 \quad (4) 4$$

۷- نقاط $(-4, -1)$ و $(5, -4)$ ، روی یک سهمی واقع شده‌اند. اگر خط $y = 5$ بر سهمی مماس باشد، طول پاره خطی که این سهمی روی محور x جدا می‌کند، کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) \sqrt{5}$$

$$(3) 4 \quad (4) 2\sqrt{5}$$

محل انجام محاسبات

۸- معادله $\sqrt{2x-1} + x = 2$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۹- معادله $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 0$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۰- معادله $\sqrt{2^x - 3} + \sqrt{2^{x+1} - 4} = 3$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۱۱- اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = 2x - \sqrt{4x - x^2} - 2m$ باشد، صفر دیگر تابع کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{5}{2}$ (۴) صفر دیگری ندارد.

۱۲- معادله $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+3} - \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x-2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ چند جواب مثبت دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۱۳- معادله $\frac{2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{4}{x^2 - 2x + 3} = \frac{12}{x^2 - 2x + 4}$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۱۴- به ازای کدام مقدار a ، مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x}{x+3} + \frac{a}{x-2} = \frac{2x+3}{x^2+x-6}$ برابر یک است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار a

۱۵- معادله $\frac{1}{x+3} - 1 = \frac{k}{x^2 + 4x + 3}$ فقط یک ریشه دارد. مجموع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) $-\frac{5}{4}$
(۳) $-\frac{7}{4}$
(۴) -۲

۱۶- به ازای کدام مقدار m ، یک ریشه معادله $\frac{2x+7}{x^2+6x+8} = \frac{x+1}{x+2} - \frac{m}{x+4}$ از قرینه ریشه دیگر آن، ۴ واحد کم تر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۷
(۳) ۱۱
(۴) هیچ مقدار m

۱۷- رضا کاری را به تنهایی در ۲۴ ساعت انجام می دهد و اگر امیر به او کمک کند، کار در ۶ ساعت تمام می شود. اگر رضا از ابتدا به تنهایی n ساعت و سپس امیر به تنهایی ۲ ساعت کار کنند، نصف کار انجام می شود. مقدار n کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

۱۸- اگر معادله $|2x^2 - 3| = |m - 2| - 1$ دارای جواب حقیقی برای x باشد، m چند مقدار صحیح نمی تواند باشد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۱۹- اگر معادله $-2x = k - |x - 4|$ دارای ۳ جواب باشد، k چند مقدار صحیح را می تواند اختیار کند؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

۲۰- حاصل ضرب طول نقاطی روی محور طول ها که مجموع فاصله آن ها از دو نقطه با طول های ۱- و ۲ روی محور طول ها برابر ۵ باشد، کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) -۶
(۴) -۸

هندسه یازدهم

۲۱- اگر $OA = 2m + 1$ باشد، آن گاه به ازای چند مقدار طبیعی m ، نقطه A درون دایره $C(O, m + 4)$ قرار دارد؟

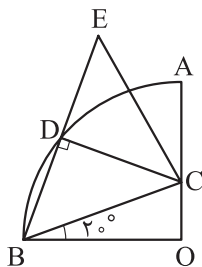
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۲- دو خط و یک دایره، مجموعاً سه نقطه مشترک دارند به طوری که نقطه تقاطع دو خط، خارج از دایره است. اگر

نسبت فاصله مرکز دایره از این خطوط ۳ به ۵ باشد، طول وتر ایجادشده در دایره چند برابر شعاع آن است؟

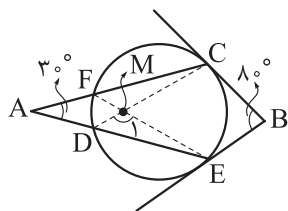
- (۱) $1/2$ (۲) $1/4$ (۳) $1/6$ (۴) $1/8$

۲۳- در شکل زیر، O مرکز ربع دایره است. اگر $\frac{BD}{BE} = \frac{1}{4}$ و $\angle CBO = 20^\circ$ باشد، زاویه E چند درجه است؟



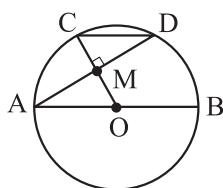
- (۱) 40°
(۲) 45°
(۳) 50°
(۴) 60°

۲۴- در شکل زیر، اضلاع زاویه B بر دایره مماس هستند. اگر $\hat{B} = 80^\circ$ و $\hat{A} = 30^\circ$ باشد، اندازه زاویه M کدام است؟



- (۱) 70°
(۲) 80°
(۳) 100°
(۴) 110°

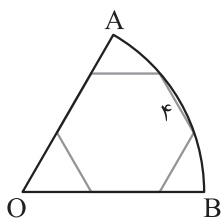
۲۵- در شکل مقابل، $AB \parallel CD$ و O مرکز دایره است. اگر $CD = 2$ باشد، طول AD کدام است؟



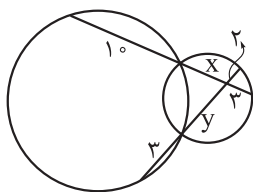
- (۲) $2\sqrt{3}$
(۴) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(۳) $\sqrt{3}$

۲۶- در شکل زیر، اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم برابر ۴ باشد، مساحت قطاع OAB کدام است؟

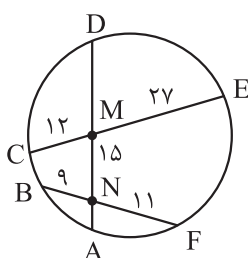


- (۱) $\frac{56}{3}\pi$
(۲) 28π
(۳) 32π
(۴) $\frac{61\pi}{3}$



۲۷- در شکل مقابل، مقدار $x + y$ کدام است؟

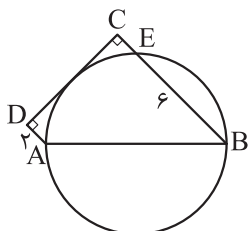
- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲



۲۸- در شکل مقابل، طول پاره خط AD کدام است؟

- (۱) ۳۳
(۲) ۳۴
(۳) ۳۵
(۴) ۳۶

۲۹- در شکل زیر، دایره به قطر AB بر ضلع DC مماس است. اگر $AD = ۲$ و $BE = ۶$ باشد، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



کدام است؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۳۵
(۳) ۴۰
(۴) ۴۵

۳۰- نقطه M خارج دایره $C(O, \sqrt{3})$ قرار دارد و دایره به قطر MO دایره C را در نقاط P و Q قطع می کند. اگر $PQ = ۳$ باشد، مساحت چهارضلعی MPOQ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{۲}$ (۲) $۳\sqrt{3}$ (۳) $\frac{۱}{۵}\sqrt{3}$ (۴) $۲\sqrt{3}$

آمار و احتمال

۳۱- اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$\sim r \quad (۴) \quad r \quad (۳) \quad F \quad (۲) \quad T \quad (۱)$$

۳۲- نقیض گزاره $(p \vee \sim q) \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$ با کدام گزاره، ارزش یکسانی دارد؟

$$F \quad (۴) \quad T \quad (۳) \quad q \Rightarrow p \quad (۲) \quad p \Rightarrow q \quad (۱)$$

۳۳- گزاره «معکوس هر عدد صحیح ناصفر، از خود آن عدد بزرگ‌تر نیست» با استفاده از نماد سورها ($\exists$ یا $\forall$) به کدام صورت نوشته می‌شود و ارزش آن چیست؟

$$\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}; \frac{1}{x} \geq x \quad (۱) \quad \text{درست}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}; \frac{1}{x} \geq x \quad (۲) \quad \text{نادرست}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}; \frac{1}{x} \leq x \quad (۳) \quad \text{درست}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}; \frac{1}{x} \leq x \quad (۴) \quad \text{نادرست}$$

۳۴- به جای $p(x)$ ، کدام گزاره را در $\forall x \in (0, 1); p(x)$ بنویسیم تا ارزش آن نادرست باشد؟

$$\frac{1}{x} > 1 \quad (۱)$$

$$x^3 < x^2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{x} > x \quad (۳)$$

$$(2x - 1)^2 > 0 \quad (۴)$$

۳۵- نقیض گزاره $\forall x > 0; x^2 + x + 1 > 0$ کدام است؟

$$\forall x \leq 0; x^2 + x + 1 \leq 0 \quad (۱)$$

$$\exists x > 0; x^2 + x + 1 \leq 0 \quad (۲)$$

$$\forall x \leq 0; x^2 + x + 1 > 0 \quad (۳)$$

$$\exists x \leq 0; x^2 + x + 1 > 0 \quad (۴)$$

۳۶- نقیض گزاره: «به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳ مانند n ، اگر n عددی اول باشد، آن‌گاه باقی‌مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ است.» در کدام گزینه آمده است؟

(۱) بعضی از عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۳ مانند n وجود دارند، به طوری که n عددی اول است و باقی‌مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ نمی‌شود.

(۲) بعضی از عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۳ مانند n وجود دارند، به طوری که اگر n اول باشد باقی‌مانده n^2 در تقسیم بر ۶ برابر ۱ نمی‌شود.

(۳) به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ مانند n اگر n اول باشد، باقی‌مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ نمی‌شود.

(۴) به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ مانند n ، n عددی اول است و باقی‌مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ نمی‌شود.

۳۷- سور مناسب برای این که ارزش گزاره $x + y = 16$ همواره درست باشد کدام است؟

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \quad (۱)$$

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z} \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{E}, \exists y \in \mathbb{O} \quad (۳)$$

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} \quad (۴)$$

۳۸- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv A \subseteq B \quad (۱)$$

$$\exists x; (x \in A \wedge x \notin B) \equiv A \not\subseteq B \quad (۲)$$

$$\forall x; (x \in A) \Rightarrow (x \in B \vee x \in C) \equiv A \subseteq (B \cup C) \quad (۳)$$

$$\forall x; (x \in A) \Rightarrow (x \in B \wedge x \notin C) \equiv A \subseteq (B - C) \quad (۴)$$

۳۹- اگر سه عضو به مجموعه A اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه هایش ۸۹۶ تا اضافه می شود. اگر از مجموعه A ، دو

عضو کم می کردیم، از تعداد زیرمجموعه هایش چه تعداد کم می شد؟

$$۲۴ \quad (۱) \quad ۳۲ \quad (۲) \quad ۴۸ \quad (۳) \quad ۹۶ \quad (۴)$$

۴۰- یک سوم زیرمجموعه های چهار عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ شامل ۱ هستند. این مجموعه چند زیرمجموعه

حداقل ۲ عضوی دارد؟ ($n > 4$)

$$۲۰۳۵ \quad (۱) \quad ۴۰۸۳ \quad (۲) \quad ۱۰۱۱ \quad (۳) \quad ۵۰۹ \quad (۴)$$

فیزیک یازدهم

۴۱- یک کره فلزی توپر و بدون بار، روی پایه عایقی قرار دارد. جسم رسانای بارداری را با آن تماس داده و دور می‌کنیم. کدام یک از موارد زیر درباره این کره درست است؟

(الف) بار الکتریکی به طور یکنواخت در تمام کره پخش می‌شود.

(ب) میدان الکتریکی درون کره برابر صفر است.

(پ) همه نقاط کره هم‌پتانسیل‌اند.

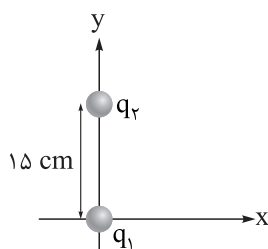
(۱) الف و ب (۲) ب و پ

(۳) الف و ب (۴) الف، ب و پ

۴۲- اگر از جسم بارداری 5×10^{10} الکترون بگیریم، بزرگی بار الکتریکی آن تغییری نمی‌کند. بار الکتریکی اولیه این جسم چند نانوکولن است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) -۸

۴۳- در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5 \mu\text{C}$ و $q_2 = -6 \mu\text{C}$ در فاصله ۱۵ cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. بردار

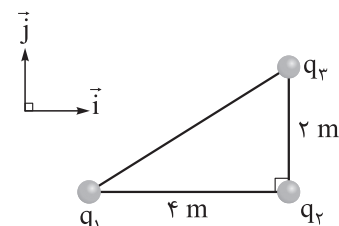


نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 در SI کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

(۱) $12 \vec{j}$ (۲) $-12 \vec{j}$

(۳) $120 \vec{j}$ (۴) $-120 \vec{j}$

۴۴- سه ذره باردار مطابق شکل زیر، در سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2



در SI، $\vec{F}_T = 4 \times 10^{-3} \vec{i} - 12 \times 10^{-3} \vec{j}$ باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

(۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۴۵- بردار میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای، در فاصله ۳۰ cm از آن، در SI به صورت $\vec{E} = 560 \vec{i} - 420 \vec{j}$

است. اندازه بار این جسم چند نانوکولن است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

(۱) ۸۰ (۲) ۷۰ (۳) ۸ (۴) ۷

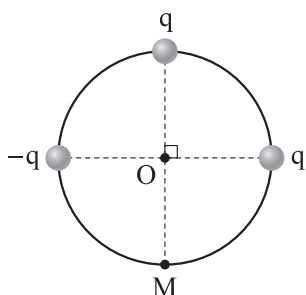
۴۶- روی محور x ، بارهای الکتریکی q_1 ، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1 = -4 \text{ cm}$ ، $x_2 = 1 \text{ cm}$ و $x_3 = 11 \text{ cm}$ قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 برابر صفر باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $-\frac{4}{9}$

۴۷- دو بار الکتریکی نقطه‌ای و همنام q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر قرار دارند. اگر ۲۵ درصد از بار q_1 را به بار q_2 منتقل کرده و فاصله بین بارها را $\sqrt{3}$ برابر کنیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها تغییر نمی‌کند. $\frac{q_1}{q_2}$ برابر کدام است؟

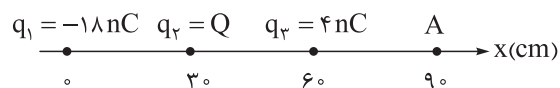
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۴۸- سه ذره باردار مطابق شکل زیر روی محیط دایره‌ای قرار دارند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه O (مرکز دایره)، چند برابر بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه M است؟



- (۱) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ (۳) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

۴۹- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای، روی محور x ثابت شده‌اند. Q بر حسب نانوکولن در کدام محدوده باشد، تا بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه A کم‌تر از 500 N/C شود؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)



- (۱) $-36 < Q < 12$ (۲) $-28 < Q < 20$ (۳) $-12 < Q < 20$ (۴) $-28 < Q < 12$

۵۰- در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $5 \times 10^3 \text{ N/C}$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذره باردار به جرم $4 \mu\text{g}$ معلق و به حال سکون قرار دارد. این ذره چند الکترون و چگونه مبادله کند تا از نظر الکتریکی خنثی شود؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و $g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) 5×10^{10} الکترون دریافت کند. (۲) 5×10^7 الکترون دریافت کند. (۳) 5×10^{10} الکترون از دست دهد. (۴) 5×10^7 الکترون از دست دهد.

۵۱- ذره‌ای با بار مثبت در یک میدان الکتریکی یکنواخت پرتاب می‌شود. اگر در بخش معینی از مسیر حرکت این ذره، کار انجام شده توسط میدان الکتریکی، منفی باشد، در این بخش از مسیر، چه تعداد از موارد زیر، الزاماً درست است؟ (از نیروهای اتلافی و نیروی وزن صرف نظر کنید.)

(الف) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، افزایش می‌یابد.

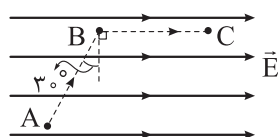
(ب) پتانسیل الکتریکی، افزایش می‌یابد.

(پ) انرژی جنبشی ذره، افزایش می‌یابد.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۲- در شکل زیر، در میدان الکتریکی یکنواخت $E = 5 \times 10^3 \text{ N/C}$ ، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -4 \mu\text{C}$ ، مسیر ABC را طی می‌کند. تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در این مسیر چند میلی‌ژول است؟

($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و $\overline{AB} = \overline{BC} = 1 \text{ m}$)



(۱) ۳۰

(۲) ۳

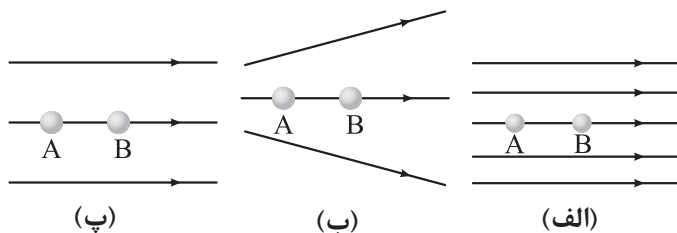
(۳) -۳۰

(۴) -۳

۵۳- در میدان الکتریکی یکنواخت $E = 8 \times 10^3 \text{ N/C}$ ، پروتونی با تندی v در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. اگر پروتون پس از 10 cm جابه‌جایی متوقف شود، v چند کیلومتر بر ثانیه است؟ (بار پروتون $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و جرم آن $1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است.)

(۱) ۲۰۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

۵۴- شکل زیر، سه آرایش خطوط میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. در هر آرایش، یک پروتون از حالت سکون در نقطه A رها می‌شود و سپس توسط میدان الکتریکی تا نقطه B شتاب می‌گیرد. نقطه‌های A و B در هر سه آرایش در فاصله‌های یکسانی از هم قرار دارند. اگر تندی پروتون هنگام عبور از نقطه B در شکل‌های (الف)، (ب) و (پ) به ترتیب v_1 ، v_2 و v_3 باشد، کدام مقایسه درست است؟



(۱) $v_2 > v_1 = v_3$

(۲) $v_1 = v_3 > v_2$

(۳) $v_3 > v_2 > v_1$

(۴) $v_1 > v_2 > v_3$

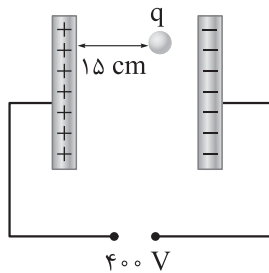
محل انجام محاسبات

۵۵- بار الکتریکی $q = -4 \mu\text{C}$ از نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی V_1 تا نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_2 = 45 \text{ V}$ جابه‌جا می‌شود. اگر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q در این جابه‌جایی $J \cdot 3 \times 10^{-4}$ کاهش یابد، V_1 چند ولت است؟

(۱) ۷۵ (۲) -۷۵

(۳) ۳۰ (۴) -۳۰

۵۶- در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه رسانا برابر با 400 V و فاصله آن‌ها 20 cm است. بار الکتریکی $q = 2 \mu\text{C}$ ، بین این دو صفحه قرار دارد. اندازه نیروی الکتریکی وارد بر این بار، چند میلی‌نیوتون است؟



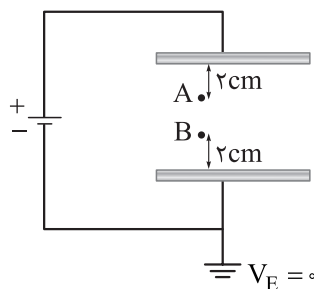
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۵۷- در شکل زیر، فاصله دو صفحه رسانای موازی و بزرگ که به دو سر یک باتری متصل شده‌اند، برابر 20 cm است. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر با 36 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B، چند ولت است؟



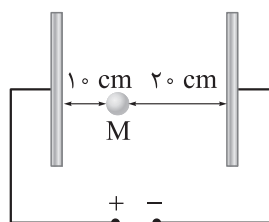
(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۹

۵۸- در شکل زیر، دو صفحه رسانای موازی به اختلاف پتانسیل الکتریکی معینی وصل هستند. اگر ذره‌ای به جرم 10^{-6} میلی‌گرم و بار الکتریکی $q = -5 \mu\text{C}$ را در نقطه M رها کنیم، ذره با تندی 4 m/s به یکی از صفحه‌ها برخورد می‌کند. اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه چند ولت است؟ (از اثر وزن ذره، صرف نظر کنید.)



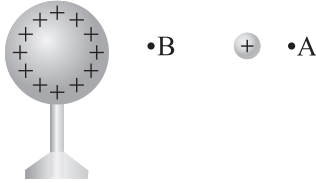
(۱) ۱۶

(۲) ۲۴

(۳) ۳۲

(۴) ۴۸

۵۹- در شکل زیر، ذره باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطه A به سمت کره باردار که روی پایه عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطه B قرار می‌دهیم. کدام مورد درباره کاری که ما در این جابه‌جایی انجام می‌دهیم (W) و مقایسه پتانسیل الکتریکی (V) دو نقطه A و B درست است؟



$$V_A > V_B, W > 0 \quad (1)$$

$$V_B > V_A, W < 0 \quad (2)$$

$$V_A > V_B, W < 0 \quad (3)$$

$$V_B > V_A, W > 0 \quad (4)$$

۶۰- شعاع دو کره فلزی باردار و هم‌اندازه A و B برابر با ۱۰ cm است. با تماس دو کره به یکدیگر، $2 \mu C$ بار الکتریکی بین دو کره منتقل شده و چگالی سطحی بار الکتریکی کره A، $12/5$ درصد کاهش می‌یابد. چگالی سطحی بار الکتریکی کره B، قبل از تماس در SI کدام است؟ ($\pi = 3$)

$$10^{-4} \quad (2)$$

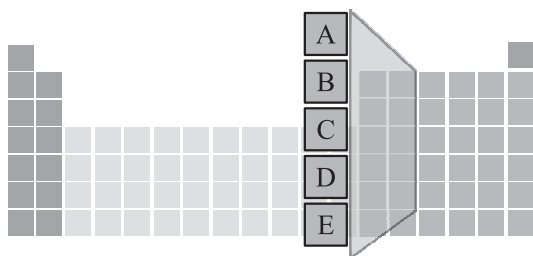
$$10^{-3} \quad (1)$$

$$2 \times 10^{-4} \quad (4)$$

$$2 \times 10^{-3} \quad (3)$$

شیمی یازدهم

۶۱- با توجه به شکل زیر که برخی از عنصرهای گروه ۱۴ جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



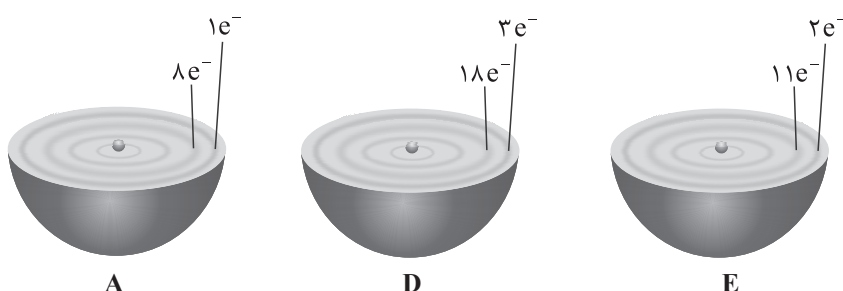
(۱) ۶۰ درصد از عنصرهای نشان داده شده دارای سطح براق و صیقلی هستند.

(۲) عنصر B مانند فلزها، رسانایی الکتریکی دارد و مانند نافلزها در واکنش با اتم‌ها الکترون می‌گیرد.

(۳) تفاوت عدد اتمی اولین نافلز گروه نشان داده شده با اولین فلز این گروه، برابر ۴۴ است.

(۴) عنصر C برخلاف عنصر A، نمی‌تواند در واکنش با اکسیژن، دی‌اکسید تشکیل دهد.

۶۲- با توجه به شکل‌های زیر که برشی از اتم‌های چند عنصر را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب داده شده درست‌اند؟



(الف) وجود ترکیب‌های عنصر D در سنگ‌ها و شیشه‌ها، می‌تواند سبب ایجاد رنگ شود.

(ب) عنصر A مانند عنصر E، سطح درخشان و براقی داشته و نسبت به E در مجاورت هوا به سرعت کدر می‌شود.

(پ) عنصر E همانند عنصر بعد از خود در جدول دوره‌ای، می‌تواند با کلر ترکیب‌هایی پایدار با فرمول شیمیایی XCl_3 و تشکیل دهد.

(ت) یون(های) پایدار عنصرهای D و A برخلاف عنصر E، به آرایش الکترونی گاز نجیب می‌رسند.

(۱) الف - ب

(۲) الف - ت

(۳) ب - پ

(۴) پ - ت

۶۳- کدام مورد نادرست است؟

(۱) بیشتر عنصرهای جدول دوره‌ای را فلزها تشکیل می‌دهند که به طور عمده در سمت چپ و مرکز جدول قرار دارند.

(۲) بین اولین و دومین هالوژن جدول تناوبی، شمار عنصرهای نافلزی بیشتر از عنصرهای فلزی است.

(۳) عنصرهای گروه اول جدول دوره‌ای، بیشترین شعاع اتمی را در مقایسه با عنصرهای هم‌دوره خود دارند.

(۴) به طور کلی با افزایش عدد اتمی عنصرها، خصلت نافلزی آن‌ها در گروه‌ها، کاهش و در دوره‌ها، افزایش می‌یابد.

۶۴- کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

(الف) در میان نافلزها، تنها نافلزهای گازی به شکل آزاد در طبیعت وجود دارند.

(ب) کانه هماتیت یک نمونه ناخالص از آهن (III) اکسید است.

(پ) در میان فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های رنگی لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

(ت) فلز کروم مانند فلزهای کلسیم و سدیم، فقط یک نوع کاتیون پایدار دارد.

(۱) الف و پ (۲) ب و ت

(۳) ب و پ (۴) الف و ت

۶۵- تفاوت عدد اتمی دومین عنصر واسطه دوره چهارم با عدد اتمی چهارمین عنصر اصلی دوره پنجم کدام است؟

(۱) ۲۸ (۲) ۳۸

(۳) ۲۶ (۴) ۳۰

۶۶- اگر شمار الکترون‌های دارای $I = 1$ در اتم عنصرهای A، B و C به ترتیب ۱۰، ۱۴ و ۵ باشد، کدام گزینه مقایسه شعاع

اتمی آن‌ها را به درستی نشان می‌دهد؟

(۱) $C > B > A$ (۲) $B > C > A$

(۳) $C > A > B$ (۴) $B > A > C$

۶۷- با توجه به داده‌های جدول زیر که به عنصرهای واسطه دوره چهارم جدول تناوبی مربوط است، کدام مقایسه‌های

زیر درست است؟

نماد گونه				ویژگی‌ها
A^{2+}	B^{+}	C	D	
z	۶	a	۸	شمار الکترون‌ها با $I = 0$
۶	b	۳	۱/۵	نسبت شماره گروه به تعداد الکترون‌های لایه اول اتم
—	B_2O	C_2O_3	—	فرمول اکسید

(الف) واکنش‌پذیری: $B < A$

(ب) شمار الکترون‌ها با $I = 2$: $A > B > C > D$

(پ) $a > z > b$

(ت) بیشترین نسبت شمار کاتیون به آنیون در فرمول اکسید(های) عناصر: $B > A > C > D$

(۱) الف - ب (۲) پ - ت

(۳) الف - پ (۴) ب - ت

۶۸- در چند گرم از نمونه آمونیوم نیترات با خلوص ۶۰ درصد، $10^4 \times 10^6 / 1$ اتم نیتروژن وجود دارد؟ (در ناخالصی‌ها اتم نیتروژن وجود ندارد؛ $O = 16, N = 14, H = 1: g.mol^{-1}$)

(۱) ۷۲ (۲) ۲۰۰

(۳) ۱۴۴ (۴) ۲۴۰

۶۹- اگر در واکنش ۱۱۰ گرم آهن (II) سولفید با گاز اکسیژن، $16/8$ لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید در شرایط STP، طبق واکنش زیر تشکیل شود، بازده درصدی این واکنش کدام است و چند گرم فراورده جامد به دست می‌آید؟

($Fe = 56, S = 32, O = 16: g.mol^{-1}$)

(معادله موازنه شود.) $FeS(s) + O_2(g) \rightarrow Fe_2O_3(s) + SO_2(g)$

(۱) ۶۵ - ۳۶ (۲) ۶۰ - ۶۰

(۳) ۶۵ - ۶۰ (۴) ۶۰ - ۳۶

۷۰- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- از نخستین عنصر واسطه جدول دوره‌ای در ساخت تلوزیون و شیشه رنگی استفاده می‌شود.
- در بین عناصر واسطه دوره چهارم، دومین عنصری که خارجی‌ترین زیرلایه اشغال شده اتم آن نیمه پر است، به شکل آزاد هم در طبیعت یافت می‌شود.
- واکنش‌پذیری عناصر فلزی دوره چهارم جدول دوره‌ای، از چپ به راست، کاهش می‌یابد.
- اگر آرایش الکترونی یون A^{m+} مربوط به عنصری از دسته d، به زیرلایه پر ختم شود، اتم عنصر A به یقین در آرایش الکترونی خود دارای زیرلایه d پر است.

(۱) درست - نادرست - نادرست - درست (۲) درست - درست - نادرست - نادرست

(۳) نادرست - درست - نادرست - نادرست (۴) درست - درست - درست - نادرست

۷۱- اگر از واکنش کامل ۲۰ میلی‌لیتر محلول ۴۰ درصد جرمی سدیم هیدروکسید با چگالی $1/2 g.mL^{-1}$ با کلریدی از آهن ($FeCl_n$)، $10/8$ گرم رسوب تشکیل شود، رنگ رسوب و جرم فراورده کلردار واکنش به ترتیب کدام است؟ ($Fe = 56, Cl = 35/5, Na = 23, O = 16, H = 1: g.mol^{-1}$) (معادله واکنش موازنه شود.)

$FeCl_n(aq) + NaOH(aq) \rightarrow NaCl(aq) + Fe(OH)_n(s)$

(۱) سبز - $14/04$ (۲) سبز - ۳۹ (۳) قرمز - $14/04$ (۴) قرمز - ۳۹

۷۲- اگر به ازای مصرف ۱۰ گرم گاز هیدروژن ۸۰ درصد خالص، در واکنش با هالوژن X_2 ، ۱۴۶ گرم فراورده تولید شده باشد، این هالوژن با کدام فلز، هم‌دوره است؟ ($H = 1: g.mol^{-1}$, $I = 127$, $Br = 80$, $Cl = 35.5$, $F = 19$ ، بازده واکنش را ۵۰ درصد در نظر بگیرید).



۷۳- کدام گزینه درست است؟ (A، B و X، عنصرهای فلزی‌اند).

(۱) اگر واکنش $A + FeO \rightarrow \dots$ انجام‌پذیر باشد، خارجی‌ترین زیرلایه الکترونی اشغال‌شده از الکترون در اتم عنصر A، به یقین دارای $l = 0$ است.

(۲) اگر واکنش $B + XD \rightarrow BD + X$ انجام‌ناپذیر باشد، استخراج عنصر B از X دشوارتر است.

(۳) واکنش کربن با سدیم اکسید، برخلاف واکنش کربن با مس (II) اکسید، انجام‌ناپذیر است.

(۴) تأمین شرایط نگهداری عنصر هم‌گروه Ag ۴۷ که در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارد، از عنصر بعدی خود سخت‌تر است.

۷۴- کدام گزینه دربارهٔ عنصر طلا (Au ۷۹) نادرست است؟

(۱) به دلیل داشتن رسانایی الکتریکی بالا و حفظ آن در شرایط دمایی گوناگون، در ساخت قطعات الکترونیکی استفاده می‌شود.

(۲) با گازهای نیتروژن و اکسیژن موجود در هوا واکنش نمی‌دهد و در صنایع الکترونیک نیز کاربرد دارد.

(۳) مقدار آن در معادن طلا بسیار کم بوده و استخراج آن پسماند زیادی به همراه دارد.

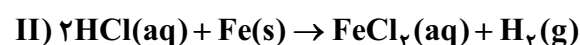
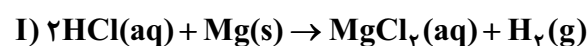
(۴) از چند گرم آن می‌توان صفحه‌ای به مساحت چند متر مربع تهیه کرد که حاکی از سختی بالا و چکش‌خواربودن آن است.

۷۵- با توجه به واکنش‌های زیر، اگر حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش یک گرم منیزیم ناخالص با هیدروکلریک اسید

با حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش یک گرم آهن ناخالص با هیدروکلریک اسید برابر باشد، نسبت درصد خلوص

آهن به منیزیم در نمونه‌های اولیه به تقریب چه قدر است؟ ($Mg = 24: g.mol^{-1}$, $Fe = 56$ و شرایط انجام واکنش‌ها

را یکسان در نظر بگیرید).



$$1/16 \quad (2) \quad 0/43 \quad (1)$$

$$2/33 \quad (4) \quad 1/33 \quad (3)$$

۷۶- کدام مورد درباره واکنش ترمیت نادرست است؟

- (۱) عنصر فلزی تولیدشده در این واکنش، فلزی است که بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد.
- (۲) مجموع ضرایب استوکیومتری عناصر آزاد در معادله موازنه شده آن، دو برابر مجموع ضرایب استوکیومتری ترکیبها در آن است.
- (۳) یکی از ترکیبهای شرکت کننده در واکنش، برای تهیه رنگ قرمز در نقاشی استفاده می شود.
- (۴) کاتیون موجود در فرمول شیمیایی فراورده ها برخلاف کاتیون موجود در فرمول شیمیایی واکنش دهنده ها، به آرایش گاز نجیب نرسیده است.

۷۷- نمونه ای به جرم ۶۸ گرم کلسیم سولفات ناخالص بر اثر حرارت تجزیه می شود. اگر طی این فرایند جرم نمونه جامد موجود در ظرف واکنش به ۳۸ گرم کاهش یابد، درصد ناخالصی ها در نمونه اولیه کدام است؟ (ناخالصی ها در واکنش شرکت نمی کنند، معادله واکنش موازنه شود. $\text{Ca} = 40, \text{S} = 32, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



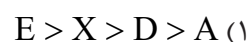
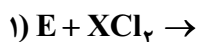
(۴) ۳۵

(۳) ۳۰

(۲) ۲۵

(۱) ۲۰

۷۸- اگر واکنش های (۱) و (۳) برخلاف واکنش های (۲) و (۴)، به طور طبیعی انجام نشوند، کدام مقایسه درباره واکنش پذیری عناصرها درست است؟



۷۹- کدام موارد از مطالب زیر، درست اند؟

- الف) روش گیاه پالایی برای استخراج فلزها برخلاف روش استخراج فلز از سنگ معدن، آثار مخرب زیست محیطی ندارد.
- ب) واکنش بی هوازی تخمیر گلوکز، از جمله واکنش هایی است که در فرایند تهیه سوخت سبز استفاده می شود.
- پ) استخراج فلزهای طلا، مس و نیکل به کمک گیاه پالایی، صرفه اقتصادی ندارد.
- ت) گاز حاصل از واکنش تخمیر بی هوازی گلوکز، از واکنش کلی انجام شده در شرکت های فولاد جهان برای استخراج آهن نیز به دست می آید.

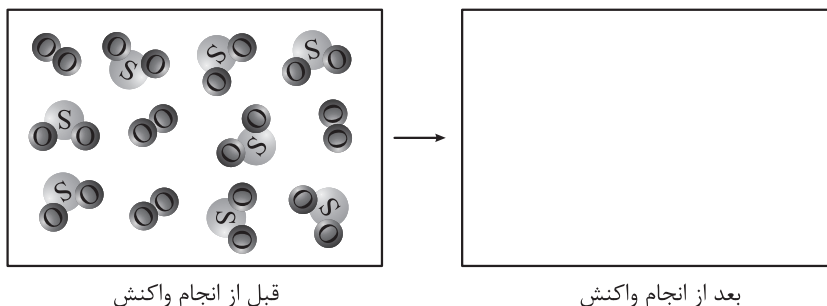
(۴) ب - پ

(۳) ب - ت

(۲) الف - ت

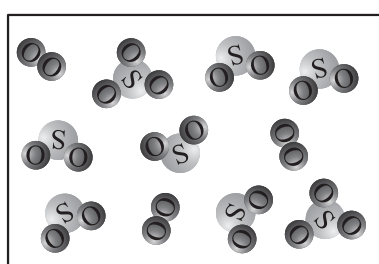
(۱) الف - ب

۸۰- بر اثر واکنش گاز گوگرد دی اکسید با گاز اکسیژن، گاز گوگرد تری اکسید به دست می آید. اگر تصویر داده شده، مخلوط واکنش دهنده‌ها را قبل از انجام واکنش نشان دهد، با فرض این که بازده درصدی واکنش برابر با ۷۵٪ باشد، کدام گزینه شکل مولکول‌های موجود در ظرف را پس از انجام واکنش به درستی نشان می‌دهد؟ (فرض کنید دلیل ۱۰۰٪ نبودن بازده درصدی واکنش، مصرف نشدن همه واکنش دهنده‌ها است و هر ذره نشان داده شده در شکل، شمار مول‌های یکسانی را نشان می‌دهد.)

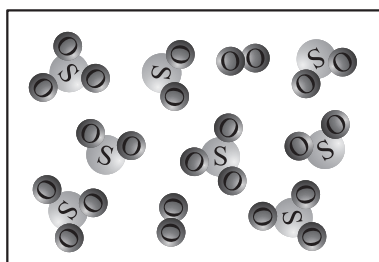


قبل از انجام واکنش

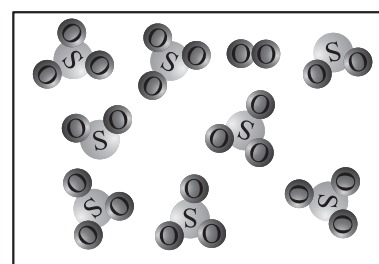
بعد از انجام واکنش



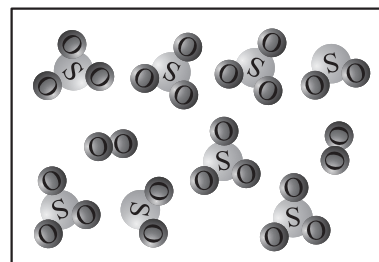
(۲)



(۴)



(۱)



(۳)

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۲:۳۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

خوبی سبز! آزمون‌های تشریحی خیلی سبز

۵ مرحله در طول سال

آزمون

از هر نظر در شبیه‌ترین حالت ممکن به امتحان نهایی

- بارم‌بندی آموزش و پرورش
- فرم و ظاهر (برگه سوال، پاسخ‌برگ، کلید و پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها و ...)
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- تو هر آزمون یکی دو تست، شبیه‌سازی عینی به امتحان نهایی داره
- سخت‌شدن امتحان نهایی رو هم پیش‌بینی می‌کنه



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- راهنمای تصحیح دقیق درست مثل امتحان‌های نهایی
- پاسخنامه یاددهنده شامل درسنامه و نکته داره

تصحیح به صورت کاملاً مکانیزه

- دو مصحح در سطح کاملاً حرفه‌ای آزمون رو تصحیح می‌کنن
- اگه بین این دو اختلاف نظر وجود داشت برای بار سوم آزمون توسط یه مصحح دیگه تصحیح میشه
- مصحح کل برگه به دانش‌آموز رو تصحیح نمی‌کنه و هر مصحح یک سوال رو برای همه دانش‌آموزان تصحیح می‌کنه
- مصححین امکان کامنت‌گذاری تو فرایند تصحیح دارن
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

دانشود رایگان تمام آزمون های آزمایشی

در کانال تلگرام ما :

آزمونها آزمایشتی

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

سازمان پژوهش و آموزش کشور

سینج

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

آکا

زبختار

خدیجه
آزمون

کانون
فرهنگی
آموزش
قلمچی

آزمونهای سراسری
گاج

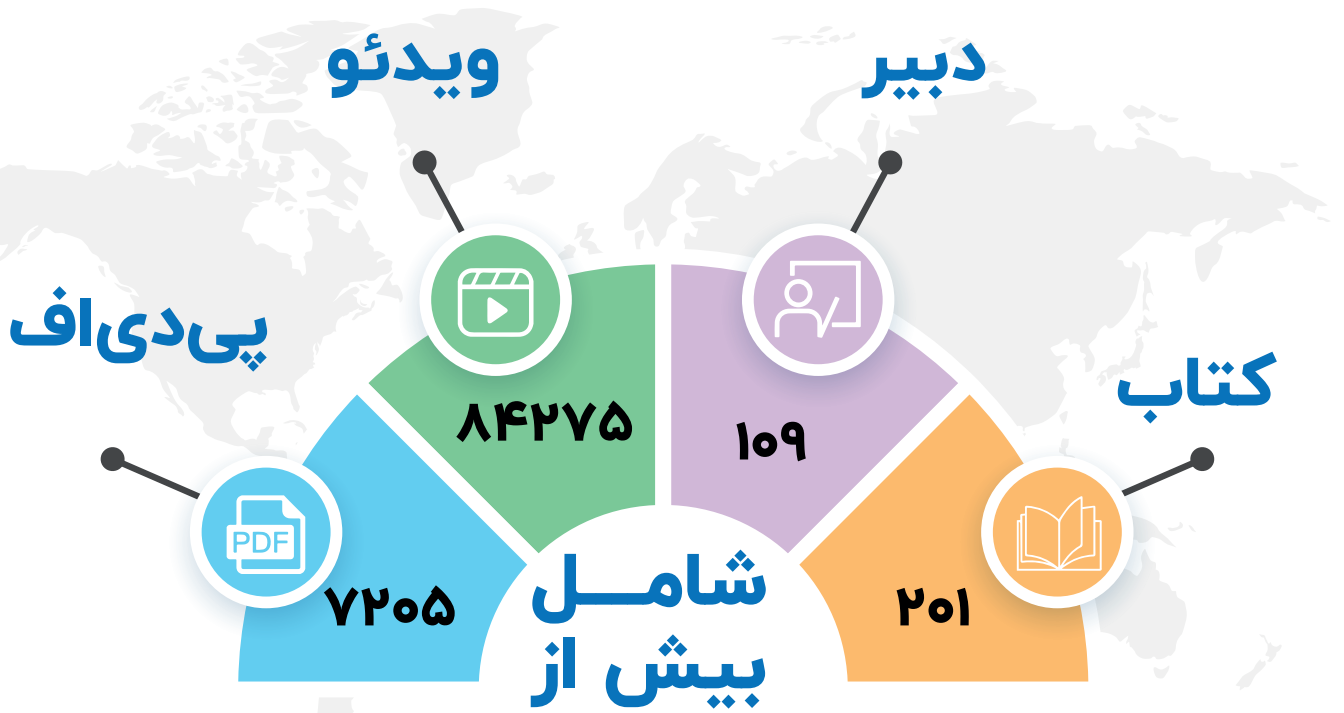


join us ...



مُنیاز اولین نشر آنلاین کنکور کشور

از سال ۹۷ تا کنون



محمد واعظی



علی مقدم نیا



محمد چلاچور



محمد نوکنده



کیوان دارابی



امید مصلائی



محمد عمارلو



مرتضی محسنی کبیر



محمد همدانی



بهمن موزنی پور



شاهین شاهین زاد



ارسلان رحمانی

برترین دبیران کنکور کشور در نشر آنلاین مُنیاز

<https://www.moniaz.ir>



پاسخ نامه آزمون آزمایشی خلی سبز



مرحله ششم

پایه یازدهم

۱۶ / آبان / ۱۴۰۴

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محسن علی نجاری
هندسه	کیوان صارمی
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	معصومه سعیدی - امیر قاسمی پور - امیر حسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محسن علی نجاری	محسن علی نجاری	عادل حسینی	فرشاد حسن زاده سجاد داوطلب	سهیل تقی زاده سهند محمد کریم نژاد
هندسه	کیوان صارمی	کیوان صارمی	کیوان صارمی	امیر حسین ابومحبوب	سید عباس حسینی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیر حسین ابومحبوب	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر علیرضا کاظمی بقا ابوالفضل ناصری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا عبداللہی	مسعود خندانی مریم گلی حسنلو پوریا علاقه مند امیر محمودی انزلی
شیمی	یاسر عبداللہی	معصومه سعیدی	معصومه سعیدی	مرتضی نصیرزاده	سینا رضادوست پارسا طاهری منزہ میثم علیلو آرمین عظیمی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور



آزمون آزمایشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی الهه صفری - زهرا صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر - مهرآسا قدیری نادره نازآوری - ساعده نمازی
رسم	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی



مجموع جملات دورقمی مشترک دنباله‌های حسابی $a_n: 5, 9, 13, \dots$ و $b_n: 6, 11, 16, \dots$ کدام است؟

۲۰۸ (۴)

۲۰۴ (۳)

۲۰۲ (۲)

۲۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

دنباله خطی با جمله عمومی $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، حسابی است که در آن d قدرنسبت دنباله است.

مجموع n جمله اول این دنباله را با S_n نمایش می‌دهیم و مقدار آن را از روابط زیر حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

دنباله جملات مشترک دو دنباله حسابی با قدرنسبت‌های d_1 و d_2 ، خود دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن $[d_1, d_2]$ ، یعنی ک.م.م d_1 و d_2 است.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قدرنسبت دنباله a_n برابر $d_1 = 9 - 5 = 4$ و قدرنسبت دنباله b_n برابر $d_2 = 11 - 6 = 5$ است، پس قدرنسبت دنباله جملات مشترک آن‌ها برابر $[4, 5] = 20$ است.

گام دوم: حالا باید جملات هر دو دنباله را ادامه دهیم تا اولین جمله مشترک پیدا شود:

$$\begin{cases} a_n: 5, 9, 13, 17, \dots \\ b_n: 6, 11, 16, \dots \end{cases}$$

پس جملات مشترک دو دنباله، دنباله‌ای حسابی با جمله اول ۲۱ و قدرنسبت ۲۰ است.

گام سوم: چند جمله اول این دنباله حسابی را می‌نویسیم:

$$c_n: 21, 41, 61, 81, 101, \dots$$

می‌بینیم که فقط ۴ جمله اول دورقمی است و مجموع این جملات برابر است با:

$$21 + 41 + 61 + 81 = 204$$

در یک دنباله هندسی ده جمله‌ای، مجموع چهار جمله اول ۱۰۵ و مجموع چهار جمله آخر ۶۷۲۰ است. مجموع جمله اول و قدرنسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

جملات هفتم تا دهم

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

دنباله غیرخطی با جمله عمومی $a_n = a_1 q^{n-1}$ ، هندسی حساب می‌شود که در آن q قدرنسبت دنباله است.

مجموع n جمله اول دنباله هندسی را S_n می‌نامیم و مقدار آن را از روابط زیر حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qa_n - a_1}{q - 1}$$

گام اول: مجموع چهار جمله اول را طبق رابطه درس باکس می‌نویسیم:

$$S_4 = \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 105 \quad (1)$$

مجموع چهار جمله آخر، در واقع مجموع جملات هفتم تا دهم است که آن را S'_4 می‌نامیم و داریم:

$$S'_4 = \frac{a_7(q^4 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S'_4 = \frac{a_1 q^6 (q^4 - 1)}{q - 1} = 6720 \quad (2)$$

گام دوم: با تقسیم طرفین رابطه (۲) بر طرفین رابطه (۱) داریم:

$$\frac{a_1 q^6 (q^4 - 1)}{\frac{a_1 (q^4 - 1)}{q - 1}} = \frac{6720}{105} \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = \pm 2$$

گام سوم: حالا به ازای هر مقدار q ، مقدار a_1 را حساب می‌کنیم:

$$q = -2 \xrightarrow{(1)} \frac{a_1(16 - 1)}{-3} = 105 \Rightarrow a_1 = -21$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جمله اول و قدرنسبت} = a_1 + q = -23$$

$$q = 2 \xrightarrow{(1)} \frac{a_1(16 - 1)}{1} = 105 \Rightarrow a_1 = 7$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جمله اول و قدرنسبت} = a_1 + q = 9$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳ اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه جواب‌های معادله $2x^2 - kx - 1 = 0$ به صورت $\{\frac{\alpha}{\beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2}\}$ است؟

۴۴ (۴)

۳۴ (۳)

۲۲ (۲)

۱۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط‌های $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac > 0$ دو جواب x_1 و x_2 را دارد که مجموع و حاصل ضرب آنها به ترتیب برابر $-\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ است. روابط تکمیلی تر بین جواب‌ها را به صورت زیر داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2SP$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

گام اول: معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ دو جواب α و β را دارد که:

$$S = \alpha + \beta = 4, \quad P = \alpha\beta = -2$$

گام دوم: معادله $2x^2 - kx - 1 = 0$ نیز دو جواب $\frac{\alpha}{\beta^2}$ و $\frac{\beta}{\alpha^2}$ را دارد که مجموع آنها برابر است با $\frac{k}{2}$ ، پس داریم:

$$\frac{k}{2} = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 \beta^2}$$

$$\xrightarrow{\text{درس بکس}} \frac{k}{2} = \frac{S^3 - 3SP}{P^2} = \frac{64 + 24}{4} = \frac{88}{4} = 22 \Rightarrow k = 44$$

۴ اگر قدرمطلق ریشه منفی معادله $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$ از ریشه مثبت آن بزرگتر باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $0 < m < \frac{1}{2}$ (۲) $0 < m < 1$ (۳) $m < 1$ (۴) $m > 0$

پاسخ: گزینه ۱

جدول زیر، وضعیت ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را براساس علامت پارامترهای Δ ، S و P نمایش می‌دهد:

$\Delta < 0$	معادله جواب حقیقی ندارد.		
$\Delta = 0$	معادله یک جواب دارد که آن هم برابر $-\frac{b}{2a}$ است.		
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S < 0$	معادله دو جواب منفی دارد.
		$S > 0$	معادله دو جواب مثبت دارد.
	$P < 0$	$S < 0$	قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگتر است.
		$S > 0$	قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچکتر است.

در یک معادله درجه دوم اگر $P < 0$ باشد، یا به بیانی دیگر a و c غیر هم‌علامت باشند، نیازی به بررسی کردن شرط Δ نیست، زیرا در این مواقع Δ همواره مثبت است:

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{ac < 0} \Delta > 0$$

گام اول: از صورت سؤال این برداشت می‌شود که معادله دو جواب غیرهم‌علامت دارد، پس حاصل ضرب این جواب‌ها باید منفی باشد:

$$\Rightarrow P = 2m - 1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2} \quad (1)$$

گام دوم: حالا طبق فرض و هم‌چنین جدول درس‌بکس، نتیجه می‌گیریم که باید مجموع جواب‌ها منفی باشد:

$$\Rightarrow S = -2m < 0 \Rightarrow m > 0 \quad (2)$$

از اشتراک محدوده‌های (۱) و (۲) داریم:

$$0 < m < \frac{1}{2}$$

درس‌Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

به ازای کدام مجموعه مقادیر m در معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x به دست می آید؟

- (۱) $m > 2$
(۲) $m < 3$
(۳) $2 \leq m < 3$
(۴) هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه ۳

$\sqrt{x}$ رو متغیر جدید بگیر و از جدول درس باکس سؤال قبل استفاده کن.

Hint

درس Box

روش حل معادله با تغییر متغیر:

گاهی اوقات یک معادله، با وجود آن که در ظاهر پیچیده است، ساختاری شبیه به معادلات ساده تر (مانند معادله درجه دوم) دارد. در این موارد، با استفاده از روش تغییر متغیر (که به آن جانشینی هم می گویند)، می توانیم معادله را ساده کرده و حل کنیم.

مراحل روش تغییر متغیر:

- تشخیص عبارت تکرار شونده: عبارتی را در معادله پیدا می کنیم که خود آن و توان های بالاترش در معادله وجود دارند.
- تعریف متغیر جدید: عبارت تکرار شونده را برابر با یک متغیر جدید (مانند u یا t) قرار می دهیم.
- جای گذاری و حل معادله جدید: معادله اصلی را بر حسب متغیر جدید بازنویسی کرده و معادله ساده تر به دست آمده را حل می کنیم.
- بازگرداندن متغیر اصلی: مقادیر به دست آمده برای متغیر جدید را در رابطه تعریف شده در مرحله ۲ قرار داده و معادله (های) نهایی را برای متغیر اصلی (x) حل می کنیم تا جواب های مسئله پیدا شوند.

مثال معادله $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ را حل کنید.

مرحله ۱ (تشخیص): عبارت x^2 در معادله تکرار شده و معادله را می توان به صورت $(x^2)^2 - 13(x^2) + 36 = 0$ نوشت.

مرحله ۲ (تعریف متغیر): متغیر جدید را تعریف می کنیم، $u = x^2$.

مرحله ۳ (حل معادله جدید): معادله جدید بر حسب u به صورت $u^2 - 13u + 36 = 0$ است. با تجزیه، به $(u-9)(u-4) = 0$ می رسیم که جواب های آن $u = 9$ و $u = 4$ هستند.

مرحله ۴ (بازگرداندن متغیر): حالا مقادیر u را جایگزین می کنیم تا x را پیدا کنیم:

اگر $u = 9$ باشد: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

اگر $u = 4$ باشد: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

نتیجه نهایی: مجموعه جواب معادله برابر با $\{-3, -2, 2, 3\}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا $\sqrt{x}$ را متغیر جدید t در نظر می گیریم و با جای گذاری آن، معادله را به یک معادله درجه دوم تبدیل می کنیم:

$$\xrightarrow{t=\sqrt{x}} t^2 - 2t + m - 2 = 0 \quad (*)$$

گام دوم: مشخص است که t باید مثبت باشد، بنابراین برای این که دو جواب متمایز برای x پیدا کنیم، لازم است در معادله $(*)$ ،

$$\begin{cases} \Delta = (-2)^2 - 4(m-2) = -4m + 12 > 0 \Rightarrow m < 3 \\ S = 2 > 0 \\ P = m - 2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک محدوده ها}} 2 \leq m < 3$$

دقت کنید که به ازای $P = 0$ یکی از جواب ها صفر خواهد شد، بنابراین $m = 2$ قابل قبول است.

۶ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 12x + 9 = 0$ باشند، حاصل $\frac{9\alpha + 3\beta^3}{\Delta\beta}$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



در روابط نامتقارن بین ریشه‌های معادله درجه دوم، مهم‌ترین نکته استفاده از خود معادله است؛ به این ترتیب که جواب‌ها را در معادله قرار دهید و سعی کنید از دل این تساوی‌ها، عبارت نامتقارن را به یک عبارت متقارن تبدیل کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با ساده کردن، معادله زیر را داریم:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

که در آن $\alpha + \beta = 4$ و $\alpha\beta = 3$ است.

هم‌چنین می‌توانیم به جای x ، α و β قرار دهیم، پس داریم:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 4\alpha - 3 \\ \text{یا} \\ \alpha^2 + 3 = 4\alpha \\ \text{یا} \\ \alpha(\alpha - 4) = -3 \Rightarrow 4 - \alpha = \frac{3}{\alpha} \\ \vdots \end{cases}$$

دقت کنید که به طریق مشابه روابط برای β هم به دست می‌آیند.

گام دوم: به نظر می‌آید که باید β^3 را برحسب β بنویسیم تا در کنار 9α برای ما یک رابطه متقارن ساخته شود.

$$\beta^3 = 4\beta - 3 \xrightarrow{\times \beta} \beta^4 = 4\beta^2 - 3\beta \xrightarrow{\beta^2 = 4\beta - 3} \beta^4 = 12\beta - 12$$

با جای‌گذاری β^3 داریم:

$$\frac{9\alpha + 3\beta^3}{\Delta\beta} = \frac{9\alpha + 3(4\beta - 3)}{\Delta\beta}$$

گام سوم: صورت کسر سمت راست رابطه بالا را به گونه دیگری بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{9\alpha + 3\beta^3}{\Delta\beta} = \frac{9(\alpha - 4) + 39\beta}{\Delta\beta}$$

در گام اول به دست آورده‌ایم که $\alpha + \beta = 4$ ، پس $\alpha - 4 = -\beta$ است.

$$\Rightarrow \frac{9\alpha + 3\beta^3}{\Delta\beta} = \frac{9(-\beta) + 39\beta}{\Delta\beta} = \frac{30\beta}{\Delta\beta} = 6$$

جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 3 = 0$ اعداد $\alpha = 3$ و $\beta = 1$ هستند. با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$\frac{9\alpha + 3\beta^3}{\Delta\beta} = \frac{27 + 3}{5} = 6$$

تیزبازی



اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار $\frac{4\alpha + \beta^5}{\Delta\beta^2}$ کدام است؟

(سؤال ۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

۱۸ (۴)

۱۹ (۳)

۲۰ (۲)

۲۱ (۱)

نقاط $(-1, -4)$ و $(5, -4)$ ، روی یک سهمی واقع شده‌اند. اگر خط $y = 5$ بر سهمی مماس باشد، طول پاره‌خطی که این سهمی روی محور x جدا می‌کند، کدام است؟

همان اختلاف
صفرهای تابع
درجه دوم است.

- (۱) ۲
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) ۴
(۴) $2\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۴

تعریف سهمی و ویژگی‌های اصلی:

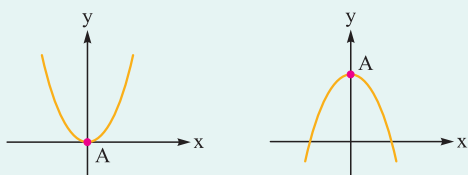
درس‌Box

• نمودار معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ (به شرط $a \neq 0$) یک سهمی نامیده می‌شود.

• علامت ضریب a ، جهت دهانه سهمی را مشخص می‌کند؛ اگر $a > 0$ دهانه رو به بالا و اگر $a < 0$ دهانه رو به پایین است.

• پایین‌ترین یا بالاترین نقطه نمودار، رأس سهمی نام دارد.

• خط عمودی که از رأس می‌گذرد، محور تقارن سهمی است.



معادله سهمی با استفاده از ریشه‌ها (نقاط برخورد با محور طول‌ها):

بسته به این که سهمی محور x ها را در چند نقطه قطع کند، معادله آن را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت (به شرط $a \neq 0$):

حالت اول: سهمی محور x ها را در دو نقطه x_1 و x_2 قطع می‌کند.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{معادله:}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{محور تقارن:}$$

حالت دوم: سهمی بر محور x ها در یک نقطه x_1 مماس است.

$$y = a(x - x_1)^2 \quad \text{معادله:}$$

محور تقارن: $x = x_1$ (در این حالت، رأس سهمی روی محور x ها قرار دارد).

اختلاف جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با جواب‌های x_1 و x_2 برابر است با:

$$\frac{\Delta = b^2 - 4ac}{S = x_1 + x_2, P = x_1 x_2} \rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$$



گام اول: دو نقطه هم‌عرض $(-1, -4)$ و $(5, -4)$ روی سهمی قرار گرفته‌اند، پس طول رأس سهمی، میانگین طول‌های این دو نقطه است:

$$\Rightarrow x_S = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

از طرفی خط افقی $y = 5$ بر سهمی مماس شده است؛ این یعنی عرض رأس سهمی $y_S = 5$ است.

گام دوم: پس تا این‌جا معادله سهمی $y = a(x - 2)^2 + 5$ است. با استفاده از یکی از نقاط داده‌شده، ضریب a را حساب می‌کنیم:

$$\frac{y = -4}{x = -1} \rightarrow -4 = a(-3)^2 + 5 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1$$

گام سوم: معادله سهمی یا تابع درجه دوم مذکور $y = -(x - 2)^2 + 5$ یا $y = -x^2 + 4x + 1$ است. طبق تعبیر، باید اختلاف

صفرهای این تابع یا اختلاف جواب‌های معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ را حساب کنیم. طبق نکته داریم:

$$\frac{|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{\rightarrow} |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{2^2 + 4}}{1} = 2\sqrt{5}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله $\sqrt{2x-1} + x = 2$ چند جواب دارد؟

۸

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

روش حل معادله‌های گنگ (رادیکالی):

روش اصلی: توان‌رسانی و بررسی جواب‌ها:

برای حل معادلات گنگ، معمولاً با رساندن عبارت به توان، رادیکال را حذف کرده و معادله را به یک معادله گویا تبدیل می‌کنیم.

مراحل حل:

(۱) جداسازی رادیکال: سعی می‌کنیم یک عبارت رادیکالی را در یک طرف تساوی تنها کنیم.

(۲) توان‌رسانی: دو طرف تساوی را به توانی متناسب با فرجه رادیکال می‌رسانیم (مثلاً برای جذر، به توان دو) تا رادیکال حذف شود.

(۳) حل معادله جدید: معادله جبری حاصل شده را حل می‌کنیم.

(۴) بررسی جواب‌ها (مرحله حیاتی): چون عمل توان‌رسانی ممکن است جواب‌های غیر قابل قبول (جواب خارجی) ایجاد کند، باید تمام جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی جای گذاری کنیم تا از درستی آن‌ها مطمئن شویم.

روش کمکی: تعیین دامنه معادله

گاهی می‌توان قبل از حل کامل معادله، با تعیین دامنه، جواب‌های غیر قابل قبول را حذف کرد. دامنه یک معادله گنگ، اشتراک دامنه تمام عبارت‌های رادیکالی آن است (عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد).

مثال جواب معادله $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = 0$ را پیدا کنید.

تعیین دامنه: برای تعریف شدن رادیکال‌ها باید هر دو عبارت زیر رادیکال نامنفی باشند:

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

اشتراک این دو شرط ($x \leq 3$, $x \geq 3$) تنها عدد $x = 3$ است؛ بنابراین، دامنه معادله فقط شامل یک عضو است:

$$D = \{3\}$$

نتیجه‌گیری: این یعنی اگر معادله جوابی داشته باشد، آن جواب حتماً باید $x = 3$ باشد، حالا این تنها جواب ممکن را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم:

$$\sqrt{3-3} + \sqrt{3-3} = \sqrt{0} + \sqrt{0} = 0$$

چون تساوی برقرار است، $x = 3$ تنها جواب معادله است. در این حالت، تعیین دامنه به تنهایی برای حل مسئله کافی بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طبق درس باکس معادله را به فرم $\sqrt{2x-1} = 2-x$ می‌نویسیم و طرفین این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x-1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

گام دوم: معادله بالا را با تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم:

$$(x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

با راستی آزمایی جواب‌های به دست آمده، می‌بینیم که $x_2 = 5$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند:

$$\sqrt{2(5)-1} + 5 = 8 \neq 2$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

(سؤال ۵ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۳)

معادله $\sqrt{x+1} = x-5$ را حل کنید.

امتحان
نهایی

معادله $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^3 - 5x + 4} = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر مجموع دو عبارت همواره نامنفی برابر صفر شود، تساوی زمانی برقرار است که هر دو عبارت برابر صفر باشند.

گام اول: هر دو عبارت رادیکالی معادله، نامنفی هستند، پس طبق نکته، جواب‌های معادله مقادیری هستند که به ازای آن‌ها هر دو عبارت برابر صفر می‌شوند.

گام دوم: با توجه به این که عبارت زیر یکی از رادیکال‌ها چندجمله‌ای درجه دوم است، بهتر است ابتدا ریشه‌های این عبارت را حساب کنیم و سپس در عبارت درجه سوم جای‌گذاری کنیم:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 3$$

گام سوم: حالا این جواب‌ها را در عبارت $x^3 - 5x + 4$ جای‌گذاری می‌کنیم، تا ببینیم به ازای کدام یک، مقدار این عبارت صفر می‌شود:

$$x^3 - 5x + 4 \begin{cases} \xrightarrow{x=1} 1 - 5 + 4 = 0 \quad \checkmark \\ \xrightarrow{x=3} 27 - 15 + 4 = 16 \neq 0 \end{cases}$$

پس معادله اصلی صورت سؤال فقط یک جواب دارد که آن هم $x = 1$ است.



۱۰. معادله $\sqrt{2^x - 3} + \sqrt{2^{x+1} - 4} = 3$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

واضح که باید از تغییر متغیر استفاده کنی.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادله زیر را داریم:

$$\sqrt{2^x - 3} + \sqrt{2 \times 2^x - 4} = 3$$

پس اگر 2^x را متغیر جدید y بگیریم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\sqrt{y - 3} + \sqrt{2y - 4} = 3 \quad (*)$$

فقط باید حواسمان باشد که y باید مثبت باشد.

گام دوم: برای پرهیز از اعداد بزرگ، بهتر است که یکی از رادیکال‌ها را به طرف دیگر تساوی ببریم:

$$\sqrt{2y - 4} = 3 - \sqrt{y - 3}$$

و طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم.

$$\Rightarrow 2y - 4 = y - 3 + 9 - 6\sqrt{y - 3} \Rightarrow 10 - y = 6\sqrt{y - 3}$$

گام سوم: مجدداً طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow y^2 - 20y + 100 = 36y - 108 \Rightarrow y^2 - 56y + 208 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 4)(y - 52) = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ یا } y = 52$$

گام چهارم: حالا جواب‌های به دست آمده را در معادله (*) چک می‌کنیم:

$$\xrightarrow{y=4} \sqrt{4-3} + \sqrt{2(4)-4} = 1+2=3 \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{y=52} \sqrt{52-3} + \sqrt{2(52)-4} = 7+10=17 \neq 3$$

در این شرایط جواب معادله اصلی را به دست می‌آوریم:

$$2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۱ اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = 2x - \sqrt{4x - x^2} - 2m$ باشد، صفر دیگر تابع کدام است؟

- ۱ (۱) $f(2) = 0$
- ۲ (۲) $\frac{2}{5}$
- ۳ (۳) $\frac{5}{2}$
- ۴ (۴) صفر دیگری ندارد.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طبق تعبیر نوشته شده، باید $f(2)$ را برابر صفر قرار دهیم تا مقدار m به دست آید:

$$f(2) = 4 - \sqrt{4} - 2m = 0 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

گام دوم: حالا با جای گذاری $m = 1$ تابع $f(x) = 2x - \sqrt{4x - x^2} - 2$ را داریم که باید صفر دیگر آن را پیدا کنیم. معادله $f(x) = 0$ را باید حل کنیم.

$$\xrightarrow{f(x)=0} 2x - \sqrt{4x - x^2} - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = \sqrt{4x - x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4x^2 - 8x + 4 = 4x - x^2 \Rightarrow 5x^2 - 12x + 4 = 0$$

به کمک روش Δ معادله بالا را حل می کنیم:

$$\Delta = 12^2 - 4(5)(4) = 64 \rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm 8}{10} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = 2$$

$x = 2$ که بدیهی است صفر تابع است، اما اگر $x = \frac{2}{5}$ را در ضابطه تابع f قرار دهیم، مقدار تابع برابر صفر نمی شود، بنابراین تابع f صفر دیگری ندارد.

تیزبازی

البته نیازی هم به حل معادله $f(x) = 0$ نداشتیم، بلکه کافی بود که مقادیر گزینه ها را در ضابطه تابع f جای گذاری کنیم تا ببینیم به ازای کدام یک، تابع f برابر صفر می شود:

$$\begin{cases} f(1) = 2 - \sqrt{3} - 2 = -\sqrt{3} \neq 0 \\ f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} - \sqrt{\frac{8}{5} - \frac{4}{25}} - 2 = \frac{4}{5} - \sqrt{\frac{36}{25}} - 2 = -2/5 \neq 0 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = 5 - \sqrt{10 - \frac{25}{4}} - 2 = 3 - \frac{\sqrt{15}}{2} \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع f صفر دیگری ندارد.

این که برابر $\sqrt{x-2}$ است.

معادله $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+3} - \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x-2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ ۱۲ چند جواب مثبت دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با شرط $x > 2$ ، معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\sqrt{x+2}}{3+\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$$

حالا در سمت چپ تساوی مخرج مشترک می گیریم:

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2-4} - 3\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2-4}}{9-(x-2)} = \sqrt{x-2} \Rightarrow \frac{-2\sqrt{x^2-4}}{11-x} = \sqrt{x-2}$$

$\sqrt{x-2}$ نمی تواند برابر صفر باشد، پس با تقسیم طرفین تساوی بر $\sqrt{x-2}$ داریم:

$$\frac{-2\sqrt{x+2}}{11-x} = 1 \Rightarrow x-11 = 2\sqrt{x+2} \quad (*)$$

گام دوم: برای حل معادله (*) که ساده شده معادله اصلی است، طرفین تساوی را به توان ۲ می رسانیم، حواسمان هست که $x > 11$ قابل قبول است:

$$\xrightarrow{x>11} x^2 - 22x + 121 = 4x + 8 \Rightarrow x^2 - 26x + 113 = 0 \quad \Delta = 26^2 - 4 \times 113 = 224 = 16 \times 14 \Rightarrow x = \frac{26 \pm 4\sqrt{14}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{14}$$

$$\xrightarrow{x>11} x = 13 + 2\sqrt{14}$$

گام سوم: مرحله مهم مانده است و آن هم چک کردن این جواب است. آن را در معادله (*) جای گذاری می کنیم:

$$(13 + 2\sqrt{14}) - 11 = 2\sqrt{15 + 2\sqrt{14}} \Rightarrow 2\sqrt{14} + 2 = 2(\sqrt{14} + 1) \quad \checkmark$$

پس معادله فقط یک جواب دارد که آن هم مثبت است.

(سوال ۱۰۸ کنکور تجربی ۱۴۰۱)

معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

معادله $\frac{2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{4}{x^2 - 2x + 3} = \frac{12}{x^2 - 2x + 4}$ چند جواب دارد؟ ۱۳

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

روش حل معادله‌های گویا:

هدف اصلی در حل معادلات گویا، حذف مخرج‌ها و تبدیل معادله به یک معادله چندجمله‌ای ساده (معمولاً به فرم $P(x) = 0$) است.

مراحل ساده‌سازی معادله: برای ساده‌سازی می‌توان از یکی از روش‌های زیر استفاده کرد:

(۱) ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها و ساده کردن.

(۲) استفاده از طرفین - وسطین (در حالتی که دو طرف تساوی یک کسر باشد) و ساده کردن.

(۳) گرفتن مخرج مشترک و ساده‌سازی.

مهم: بررسی جواب‌های قابل قبول: جوابی برای معادله گویا قابل قبول است که هیچ کدام از مخرج‌های موجود در معادله اصلی را صفر نکند. بهترین راه برای این کار، تعیین دامنه عبارت‌های گویا در ابتدای حل مسئله است. جواب‌های نهایی که در این دامنه قرار ندارند، باید حذف شوند.

استفاده از تغییر متغیر در برخی معادلات گویای پیچیده که ساختار تکرارشونده دارند: می‌توان از روش تغییر متغیر برای ساده‌سازی و حل معادله استفاده کرد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: واضح است که باید از تغییر متغیر استفاده کنیم، پس برای سادگی در محاسبات $x^2 - 2x + 3$ را متغیر جدید t می‌گیریم و داریم:

$$\frac{2}{t-1} + \frac{4}{t} = \frac{12}{t+1} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t} = \frac{6}{t+1} \quad (*)$$

گام دوم: حالا اگر طرفین تساوی (*) را در $t(t-1)(t+1)$ ضرب کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{t \neq 0, 1, -1} t(t+1) + 2(t+1)(t-1) = 6t(t-1) \\ \Rightarrow t^2 + t + 2t^2 - 2 = 6t^2 - 6t \Rightarrow 3t^2 - 7t + 2 = 0$$

گام سوم: معادله بالا را به کمک روش Δ حل می‌کنیم:

$$\Delta = 49 - 4(3)(2) = 25 \rightarrow t = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 2$$

گام چهارم: حالا عبارت $x^2 - 2x + 3$ را برابر مقادیر به دست آمده برای t قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{10}{3} = 0 \quad \Delta \text{ منفی است و جواب حقیقی ندارد.} \\ x^2 - 2x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

در نتیجه معادله فقط یک جواب دارد که آن هم $x = 1$ است.



۱۴

به ازای کدام مقدار a ، مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x}{x+3} + \frac{a}{x-2} = \frac{2x+3}{x^2+x-6}$ برابر یک است؟

- (۱) ۳
(۲) ۵
(۳) ۱
(۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طرفین معادله را در $(x+3)(x-2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x \neq -2, -3}{x(x-2)} \rightarrow x(x-2) + a(x+3) = 2x+3$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + ax + 3a = 2x + 3$$

$$\Rightarrow x^2 - (4-a)x + 3a - 3 = 0 \quad (*)$$

گام دوم: مجموع جواب‌های معادله $(*)$ را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$S = -\frac{B}{A} \rightarrow 4-a=1 \Rightarrow a=3$$

گام سوم: با جای‌گذاری $a=3$ به معادله $x^2 - x + 6 = 0$ می‌رسیم که جواب حقیقی ندارد؛ بنابراین هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

معادله $\frac{1}{x+3} - 1 = \frac{k}{x^2 + 4x + 3}$ فقط یک ریشه دارد. مجموع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟ ۱۵

$$-2 \quad (4)$$

$$-\frac{7}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: عبارت $x^2 + 4x + 3$ در مخرج کسر سمت راست به صورت $(x+1)(x+3)$ تجزیه می‌شود، پس داریم:

$$\frac{1}{x+3} - 1 = \frac{k}{x^2 + 4x + 3} \Rightarrow -\frac{x+2}{x+3} = \frac{k}{x^2 + 4x + 3}$$

صورت و مخرج سمت چپ تساوی بالا را در $x+1$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{-(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{k}{x^2 + 4x + 3} \Rightarrow -(x^2 + 3x + 2) = k$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 + k = 0 \quad (*)$$

پس جواب‌های معادله صورت سؤال با شرط $x \neq -1, -3$ ، همان جواب‌های معادله $(*)$ هستند.

گام دوم: پس برای این‌که معادله اصلی فقط یک جواب داشته باشد، حالت‌های زیر باید برقرار باشند:

الف) معادله $(*)$ فقط یک جواب دارد، با این شرط که آن جواب -1 یا -3 نباشد، پس Δ ی آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\Delta = 3^2 - 4(2+k) = 0 \Rightarrow 1 - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

در این شرایط، $x = -\frac{3}{4}$ ، جواب معادله $(*)$ و قابل قبول است.

ب) یکی از جواب‌های معادله $(*)$ برابر -1 است، مشروط بر آن‌که جواب دیگر -3 نباشد، پس $x = -1$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=-1} 1 - 3 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

در این صورت معادله $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0$ را داریم که جواب دیگر آن $x = -2$ است.

پ) یکی از جواب‌های معادله $(*)$ برابر -3 است، مشروط بر آن‌که جواب دیگر -1 نباشد، پس $x = -3$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=-3} 9 - 9 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$$

در این صورت معادله $x^2 + 3x = x(x+3) = 0$ را داریم که جواب دیگر آن صفر است.

گام سوم: در نهایت مجموع مقادیر قابل قبول برای k برابر است با:

$$\frac{1}{4} + 0 - 2 = -\frac{7}{4}$$

۱۶ به ازای کدام مقدار m ، یک ریشه معادله $\frac{m}{x+4} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{2x+7}{x^2+6x+8}$ از قرینه ریشه دیگر آن، ۴ واحد کم تر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۷
(۳) ۱۱
(۴) هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طرفین تساوی را در $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$ ضرب می کنیم:

$$\Rightarrow m(x+2) - (x+1)(x+4) = 2x+7$$

$$\Rightarrow mx + 2m - x^2 - 5x - 4 = 2x + 7$$

$$\Rightarrow x^2 - (m-7)x + 11 - 2m = 0 \quad (*)$$

گام دوم: جواب های معادله $(*)$ با شرط $-2, -4, x \neq$ ، همان جواب های معادله صورت سؤال هستند. این جواب ها را α و β

در نظر می گیریم. طبق رابطه مفروض سؤال داریم:

$$\alpha = -\beta - 4 \Rightarrow \alpha + \beta = -4$$

قرینه ریشه دیگر

در معادله $(*)$ مجموع جواب ها، برابر $m-7$ است، پس داریم:

$$m-7 = -4 \Rightarrow m = 3$$

گام سوم: حالا با جای گذاری $m = 3$ داریم:

$$\xrightarrow{(*), m=3} x^2 + 4x + 5 = 0$$

این معادله جواب حقیقی ندارد، بنابراین هیچ مقدار حقیقی برای m قابل قبول نیست.

رضا کاری را به تنهایی در ۲۴ ساعت انجام می‌دهد و اگر امیر به او کمک کند، کار در ۶ ساعت تمام می‌شود. اگر رضا از ابتدا به تنهایی n ساعت و سپس امیر به تنهایی ۲ ساعت کار کنند، نصف کار انجام می‌شود. مقدار n کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس: Box

حل مسائل کاربردی با معادلات گویا:

راهبرد کلی حل مسئله:

برای حل این گونه مسائل، بهتر است مراحل زیر را دنبال کنید:

(۱) درک مسئله: مسئله را به دقت بخوانید تا اطلاعات داده شده و خواسته مسئله مشخص شود.

(۲) تعریف متغیر: کمیت مجهول در مسئله را با یک متغیر (مانند x) نام گذاری کنید.

(۳) ساختن معادله: با استفاده از روابط و فرمول‌های شناخته شده، یک معادله گویا براساس اطلاعات مسئله بنویسید.

(۴) حل معادله: معادله گویای به دست آمده را حل کنید.

(۵) بررسی جواب: جواب‌های غیرمنطقی (مانند زمان یا سرعت منفی) را حذف کرده و مطمئن شوید جواب با شرایط مسئله سازگار است.

نوع اول: مسائل کار و زمان

مفهوم کلیدی: نرخ کار؛ اگر فردی کاری را در t ساعت انجام دهد، نرخ کار او برابر با $\frac{1}{t}$ (بخشی از کار در ساعت) است.

مثال علی یک کار را به تنهایی در ۶ ساعت و حسن همان کار را در ۳ ساعت انجام می‌دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، کار در چه زمانی تمام می‌شود؟

متغیر: زمان لازم برای انجام کار گروهی را x در نظر می‌گیریم.

معادله: (نرخ کار علی) + (نرخ کار حسن) = (نرخ کار گروهی)

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$$

حل: با ضرب طرفین در 6x داریم:

$$x + 2x = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

پاسخ: کار گروهی در ۲ ساعت تمام می‌شود.

نوع دوم: مسائل سرعت، مسافت و زمان

مفهوم کلیدی: استفاده از رابطه $t = \frac{d}{v}$ (زمان = $\frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$)

مثال مسافت بین دو شهر ۴۰ کیلومتر است. خودرویی این مسیر را با تندی ثابت ۷ طی می‌کند. اگر تندی خود را ۲۰ کیلومتر بر ساعت افزایش دهد، ۱ ساعت زودتر به مقصد می‌رسد. سرعت اولیه خودرو چه قدر بوده است؟

متغیر: سرعت اولیه خودرو v است.

معادله: (زمان ثانویه) - (زمان اولیه) = ۱

$$\Rightarrow \frac{40}{v} - \frac{40}{v+20} = 1$$

حل: با ضرب طرفین در $v(v+20)$ داریم:

$$40(v+20) - 40v = v(v+20) \Rightarrow 800 = v^2 + 20v$$

با مرتب کردن معادله درجه دوم $v^2 + 20v - 800 = 0$ و حل آن، به جواب‌های $v = -40$ و $v = 20$ می‌رسیم.

پاسخ: چون سرعت منفی قابل قبول نیست، سرعت اولیه خودرو ۲۰ کیلومتر بر ساعت بوده است.

نوع سوم: مسائل غلظت و مخلوط

مفهوم کلیدی:

$$\frac{\text{مقدار ماده خالص}}{\text{حجم کل محلول}} = \text{غلظت}$$

مثال یک ظرف حاوی ۱۰ لیتر محلول آب و نمک با غلظت ۲۰ درصد است. چه قدر آب خالص (x) باید به آن اضافه کنیم تا غلظت به ۱۰ درصد کاهش یابد؟

مقدار نمک (ثابت است): لیتر $2 = 10 \times 20\%$.

$$\text{مقدار نمک} = \frac{\text{غلظت جدید}}{\text{حجم جدید}} \Rightarrow \frac{0}{10} = \frac{2}{10+x} = (\text{غلظت جدید})$$

معادله:

$$0/(10+x) = 2 \Rightarrow 1+0/1x = 2 \Rightarrow 0/1x = 1 \Rightarrow x = 10$$

حل:

پاسخ: باید ۱۰ لیتر آب خالص اضافه شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا طبق معادله $\frac{1}{t_R} + \frac{1}{t_A} = \frac{1}{6}$ و دانستن این که $t_R = 24$ است، t_A را حساب می کنیم:

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{t_A} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{t_A} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{1}{8} \Rightarrow t_A = 8 \text{ ساعت}$$

گام دوم: این یعنی رضا در هر ساعت $\frac{1}{24}$ کار و امیر در هر ساعت $\frac{1}{8}$ کار را انجام می دهد. حالا اگر رضا n ساعت کار کند، $\frac{n}{24}$ کار و اگر امیر ۲ ساعت کار کند، $\frac{2}{8}$ کار انجام می شود. مجموع این ها طبق فرض سؤال باید برابر $\frac{1}{6}$ شود، پس داریم:

$$\frac{n}{24} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times 24} n + 6 = 12 \Rightarrow n = 6$$

ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

(مسئله (۱) - تمرین ۹ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

کتاب
درسی

۱۸ اگر معادله $|2x^2 - 3| = |m - 2| - 1$ دارای جواب حقیقی برای x باشد، m چند مقدار صحیح نمی تواند باشد؟

۳ (۴

۲ (۳

۱ (۲

صفر (۱

پاسخ: گزینه ۲

عبارت سمت راست باید مثبت باشد.

Hint

درس Box

ویژگی های قدرمطلق:

$$۱) |x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$۲) |x| \geq 0$$

$$۳) |x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$$

$$۴) |x| \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -a \leq x \leq a$$

$$۵) |x| \geq a \xrightarrow{a \geq 0} x \leq -a \text{ یا } x \geq a$$

گام اول: عبارت $|2x^2 - 3|$ همواره نامنفی است (صفر هم می تواند باشد)، پس برای این که معادله جواب حقیقی داشته باشد، لازم است سمت راست هم نامنفی باشد.

گام دوم: پس باید نامعادله $|m - 2| - 1 \geq 0$ را حل کنیم و طبق ویژگی ۵ درس باکس داریم:

$$|m - 2| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} m - 2 \geq 1 \Rightarrow m \geq 3 \\ \text{یا} \\ m - 2 \leq -1 \Rightarrow m \leq 1 \end{cases}$$

یعنی m نمی تواند عدد صحیح ۲ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر معادله $x|x-4|-2x=k$ دارای ۳ جواب باشد، k چند مقدار صحیح را می‌تواند اختیار کند؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

چاره‌ای جز رسم نمودار تابع $y = x|x-4|-2x$ نداریم.

Hint

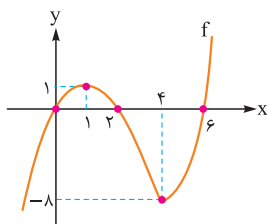
درس‌Box

روش هندسی حل معادلات: اگر در معادلات صرفاً تعداد جواب‌ها ملاک باشد، می‌توانیم دو تابع f و g را چنان در نظر بگیریم که جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ ، همان جواب‌های معادله اصلی باشند، در این صورت با رسم نمودارهای دو تابع f و g در یک دستگاه مختصات، تعداد نقاط برخورد این نمودارها، تعداد جواب‌های معادله اصلی را نشان می‌دهد.

گام اول: طبق توضیحات درس‌باکس، اگر $f(x) = x|x-4|-2x$ و $g(x) = k$ باشد، تعداد نقاط برخورد نمودارهای دو تابع f و g ، تعداد جواب‌های معادله اصلی است که باید برابر ۳ باشد.

گام دوم: حالا با بازه‌بندی، نمودار تابع قدرمطلق f را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x; & x < 4 \\ x^2 - 6x; & x \geq 4 \end{cases}$$



گام سوم: حالا برای این که خط افقی $y = k$ (نمودار تابع g)، نمودار تابع f را در ۳ نقطه قطع کند، k باید در بازه $(-8, 1)$ باشد. تعداد اعداد صحیح این بازه برابر $1 - (-8) = 8$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

۲۰

حاصل ضرب طول نقاطی روی محور طول‌ها که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه با طول‌های -1 و 2 روی محور طول‌ها برابر 5 باشد، کدام است؟

-8 (۴)

-6 (۳)

8 (۲)

6 (۱)

پاسخ: گزینه ۲

معادله قدرمطلقیه، با هندسه تحلیلی اشتباه نگیری.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم قدرمطلق یک عدد، فاصله آن عدد روی محور اعداد از مبدأ (همان صفر) است، پس حالا که هر 3 نقطه روی محور طول‌ها هستند، می‌توانیم برای سادگی، فقط محور اعداد حقیقی را در نظر بگیریم.



گام دوم: عدد مورد نظر را α در نظر می‌گیریم. فاصله α از -1 ، برابر $|\alpha + 1|$ و فاصله α از 2 ، برابر $|\alpha - 2|$ است، پس حالا طبق فرض سؤال معادله زیر را داریم:

$$|\alpha + 1| + |\alpha - 2| = 5$$

گام سوم: با بازه‌بندی معادله بالا را حل می‌کنیم:

$$\bullet \alpha < -1: -\alpha - 1 - \alpha + 2 = 5 \Rightarrow 2\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -2$$

قابل قبول است، زیرا در محدوده $\alpha < -1$ قرار دارد.

$$\bullet -1 \leq \alpha < 2: \alpha + 1 - \alpha + 2 = 5 \Rightarrow 3 = 5$$

$$\bullet \alpha \geq 2: \alpha + 1 + \alpha - 2 = 5 \Rightarrow 2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$$

قابل قبول است؛ زیرا در محدوده $\alpha \geq 2$ قرار دارد.

پس حاصل ضرب اعداد قابل قبول (که همان طول نقاط مورد نظر روی محور طول‌ها هستند)، برابر $-2 \times 3 = -6$ است.

بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های -1 و 3 روی محور x ها برابر 6 باشد؟

(مسأله (۱) - تمرین ۲ صفحه ۲۸ کتاب درسی)

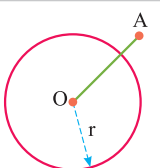
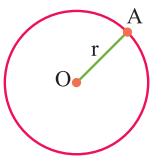
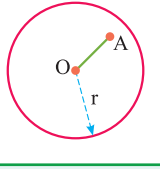
کتاب
درسی

اگر $OA = 2m + 1$ باشد، آن گاه به ازای چند مقدار طبیعی m ، نقطه A درون دایره $C(O, m + 4)$ قرار دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

یک نقطه می تواند داخل یا خارج یا روی دایره باشد. برای تشخیص وضعیت نقطه و دایره باید مثل جدول زیر فاصله آن نقطه از مرکز را با شعاع دایره مقایسه کنیم:

رابطه	شکل	وضعیت نقطه و دایره
$OA > r$		نقطه خارج دایره
$OA = r$		نقطه روی دایره
$OA < r$		نقطه داخل دایره

طبق درس باکس، وقتی نقطه A داخل دایره $C(O, m + 4)$ قرار می گیرد که فاصله اش از مرکز، کمتر از شعاع دایره باشد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$2m + 1 < m + 4 \Rightarrow m < 3$$

در محدوده بالا دو مقدار طبیعی برای m داریم: ۱، ۲

دو خط و یک دایره، مجموعاً سه نقطهٔ مشترک دارند به طوری که نقطهٔ تقاطع دو خط، خارج دایره است. اگر نسبت فاصلهٔ مرکز دایره از این خطوط ۳ به ۵ باشد، طول وتر ایجادشده در دایره چند برابر شعاع آن است؟

۱/۸ (۴)

۱/۶ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۲ (۱)

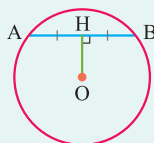
پاسخ: گزینهٔ ۲

کرتس Box

(۱) وضعیت خط و دایره با توجه به فاصلهٔ مرکز دایره از خط یا تعداد نقطه‌های مشترکشان مشخص می‌شود. این موضوع را می‌توانید در جدول زیر ببینید:

وضعیت خط و دایره	شکل	رابطه	تعداد نقاط مشترک
متقاطع		$OH < r$	۲
مماس		$OH = r$	۱
متخارج		$OH > r$	صفر

(۲) اگر مثل شکل مقابل از مرکز دایره بر وتر AB عمود کنیم، آن را در نقطهٔ H، نصف می‌کند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (رسم شکل و تحلیل آن): به گفتهٔ سؤال، دو خط و یک دایره، مجموعاً ۳ نقطهٔ مشترک دارند، پس مثل شکل مقابل، یکی از خطوط مماس بر دایره است و دیگری متقاطع با آن. این‌جا سه نقطهٔ مشترک A، B و H را داریم. به گفتهٔ سؤال نسبت فاصلهٔ O از d و d' برابر ۳ به ۵ است، پس فرض می‌کنیم $OH = \Delta k$ و $OH' = 3k$ باشد.

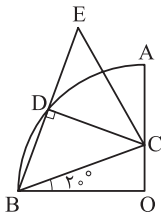
گام دوم (محاسبهٔ AB): در شکل بالا d بر دایره مماس است، پس $OH = \Delta k$ همان شعاع دایره است، OA هم شعاع دایره است، پس: $OA = \Delta k$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی بالا فیثاغورس می‌نویسیم تا به طول AH' برسیم: $AH' = \sqrt{(\Delta k)^2 - (3k)^2} = \sqrt{16k^2} = 4k$
 OH' بر وتر AB عمود است، پس طبق مورد (۲) درس‌بکس، آن را نصف می‌کند:
 $AB = 2AH' = 2(4k) = 8k$

$\frac{8k}{\Delta k} \times \frac{2}{2} = 1/6$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): نسبت AB به شعاع می‌شود:

در شکل زیر، O مرکز ربع دایره است. اگر $\frac{BD}{BE} = \frac{1}{4}$ و $\hat{CBO} = 2^\circ$ باشد، زاویه E چند درجه است؟



(۱) 40°

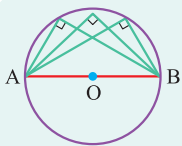
(۲) 45°

(۳) 50°

(۴) 60°

پاسخ: گزینه ۳

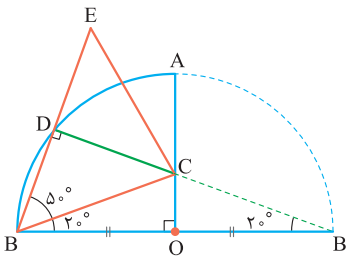
درس Box



(۱) طبق شکل مقابل، زاویه محاطی رو به قطر همیشه 90° است.

(۲) در مثلث متساوی الساقین ارتفاع، نیمساز و میانه وارد بر قاعده همگی بر هم منطبق اند و برعکس؛ یعنی اگر در مثلثی ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز یا میانه هم باشد، آن مثلث متساوی الساقین است.

گام اول (افزودن پاره خط مناسب به شکل): مطابق شکل، ربع دایره را تبدیل به نیم دایره می کنیم، طبق مورد (۱) درس باکس، زاویه محاطی رو به قطر است که 90° است، پس امتداد DC باید از سر دیگر قطر، یعنی B' بگذرد. به ارتفاع CO در مثلث BCB' نگاه کنید؛ میانه هم هست، چون BO و OB' هر دو برابر شعاع دایره اند، بنابراین طبق مورد (۲) درس باکس، BCB' متساوی الساقین است، در نتیجه $\hat{B}' = \hat{CBB}' = 2^\circ$ می شود.



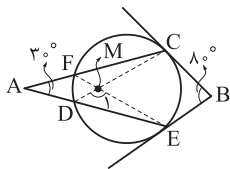
گام دوم (محاسبه $\hat{DCB}$): در مثلث قائم الزاویه BDB' ، جمع $\hat{DBB}'$ و $\hat{B}'$ باید 90° باشد:

$$\hat{DBB}' + \hat{B}' = (\hat{DBC} + 2^\circ) + 2^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{DBC} = 5^\circ$$

گام سوم (تشخیص نوع مثلث BEC و محاسبه خواسته سؤال): به گفته سؤال، $\frac{BD}{BE} = \frac{1}{4}$ است، پس D وسط BE و CD در

مثلث BEC ، علاوه بر ارتفاع، میانه هم هست، پس این مثلث هم متساوی الساقین است؛ در نتیجه $\hat{E} = \hat{DBC} = 5^\circ$ می شود.

در شکل زیر، اضلاع زاویه B بر دایره مماس هستند. اگر $\hat{B} = 8^\circ$ و $\hat{A} = 3^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\hat{M}_1$ کدام است؟



(۱) 7°

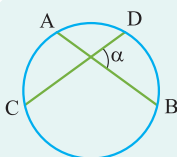
(۲) 8°

(۳) 100°

(۴) 11°

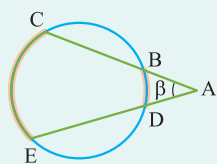
پاسخ: گزینه ۴

درس Box



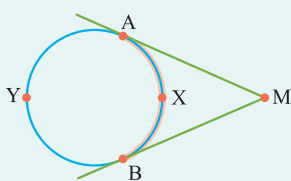
(۱) در شکل مقابل، زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره است، برای محاسبه چنین زاویه‌ای از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$



(۲) در شکل مقابل، زاویه بین امتداد دو وتر در خارج دایره است، برای محاسبه چنین زاویه‌ای از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\beta = \frac{\widehat{CE} - \widehat{BD}}{2}$$



(۳) اگر مثل شکل مقابل از نقطه M در خارج دایره، دو مماس بر دایره بکشیم، زاویه بین دو مماس و کمان کوچکی که در دایره درست می‌کند ($\widehat{AXB}$) مکمل‌اند، یعنی:

$$\hat{M} + \widehat{AXB} = 18^\circ$$

گام اول (محاسبه اندازه $\widehat{CE}$): در شکل مقابل، $\hat{B}$ ، زاویه بین دو مماس است، پس طبق مورد (۳) درس باکس، $\hat{B}$ و $\widehat{CE}$ مکمل‌اند:

$$8^\circ + \widehat{CE} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{CE} = 10^\circ$$

گام دوم (محاسبه اندازه $\widehat{FD}$): $\hat{A} = 3^\circ$ ، زاویه بین امتداد دو وتر در خارج دایره است، پس طبق مورد (۲) درس باکس می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CE} - \widehat{FD}}{2} \Rightarrow 3^\circ = \frac{10^\circ - \widehat{FD}}{2} \Rightarrow 10^\circ - \widehat{FD} = 6^\circ \Rightarrow \widehat{FD} = 4^\circ$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): $\hat{M}_1$ ، زاویه بین دو وتر در داخل دایره است، پس طبق مورد (۱) درس باکس داریم:

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{FD} + \widehat{CE}}{2} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{4^\circ + 10^\circ}{2} = 7^\circ$$

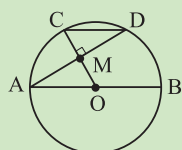
$$\hat{M}_1 = 18^\circ - \hat{M}_2 \Rightarrow 18^\circ - 7^\circ = 11^\circ$$

$\hat{M}_1$ ، مکمل $\hat{M}_2$ است، پس:

پاسخ خیلی تشریحی

۲۵

در شکل مقابل، $AB \parallel CD$ و O مرکز دایره است. اگر $CD = 2$ باشد، طول AD کدام است؟



(۲) $2\sqrt{3}$

(۴) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

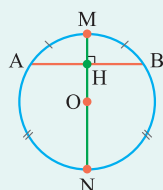
(۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

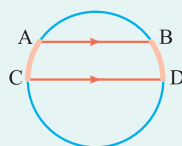
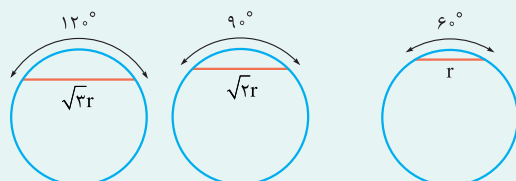
پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) قطر یا شعاع عمود بر وتر، هم خود وتر را نصف می کند، هم کمان های نظیرش را. مثلاً در شکل زیر، H وسط وتر AB و M و N وسط کمان ها است.



(۲) بعضی وقت ها به جای این که اندازه یک کمان را بدهند، طول وتر متناظر با آن کمان را می دهند. در یک دایره به شعاع r ، اندازه کمان متناظر با وترهایی که طولشان r ، $\sqrt{2}r$ و $\sqrt{3}r$ است، مطابق شکل های زیر به راحتی پیدا می شوند.



(۳) اندازه کمان های محصور بین دو وتر موازی برابرند، یعنی در شکل مقابل اگر $AB \parallel CD$ باشد، می توانیم بگوییم $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ می شود.

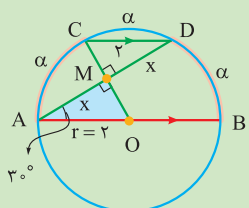
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (تحلیل شکل مسئله): به گفته سؤال، وترهای AB و CD در شکل زیر موازی اند، پس

طبق مورد (۳) درس باکس می توانیم کمان های بینشان را مساوی α در نظر بگیریم. از طرفی

شعاع OC بر وتر AD عمود است، پس طبق مورد (۱) درس باکس هم AD را نصف می کند:

$$\widehat{CD} = \widehat{AC} = \alpha \text{ ، هم } \widehat{AD} \text{ را نصف می کند: } AM = MD = x$$



گام دوم (محاسبه α): جمع کمان های بالای AB باید 180° باشد:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ$$

گام سوم (محاسبه طول شعاع و $\widehat{DAB}$): $\widehat{CD} = \alpha = 60^\circ$ شد، پس طبق مورد (۲) درس باکس، طول CD همان طول شعاع

$$r = CD = 2$$

دایره است.

گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال): می دانیم در یک مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است، پس داریم:

$$\triangle OAM : AM = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

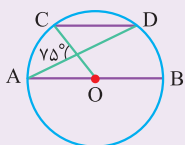
$$AD = 2x = 2\sqrt{3}$$

پس طول AD می شود:

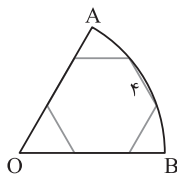


در دایره رسم شده شکل زیر $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.

(هندسه (۲) - تمرین ۴ صفحه ۱۷ کتاب درسی)



در شکل زیر، اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم برابر ۴ باشد، مساحت قطاع OAB کدام است؟



(۱) $\frac{56}{3}\pi$

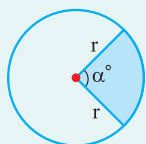
(۲) 28π

(۳) 32π

(۴) $\frac{61\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box



(۱) به سطح آبی رنگ مقابل که محصور بین دو شعاع دایره است، قطاع می‌گوییم، مساحتش هم $\frac{\alpha}{360}$ از مساحت کل دایره است، یعنی $S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{360} \times \pi r^2$

(۲) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع رو به زاویه 30° ، نصف وتر و ضلع رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر وتر است.

(۳) هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم می‌شود: $\frac{180(n-2)}{n}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (قطاع چند درجه است؟): طبق مورد (۳) درس باکس، هر زاویه داخلی ۶ ضلعی منتظم

می‌شود: $120^\circ = \frac{180(6-2)}{6}$

پس هر کدام از زاویه‌های OGF و GFO برابر $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ است؛ در نتیجه مثلث OGF

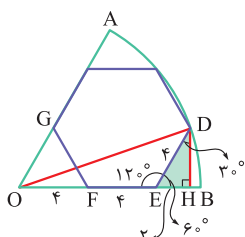
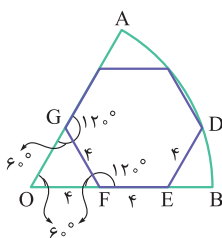
متساوی‌الاضلاع است؛ از این موضوع دوتا نتیجه می‌گیریم:

• $\hat{O} = 60^\circ$ و قطاع 60° است.

• $OF = GF = 4$ است.

گام دوم (افزودن پاره خط مناسب به شکل): برای محاسبه مساحت قطاع، شعاعش را لازم داریم.

شعاع OD را به شکل اضافه می‌کنیم. در ادامه عمود DH را اضافه می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه رنگی با زاویه 30° و 60° درست بشود.



طبق مورد (۲) درس باکس، ضلع رو به زاویه 30° نصف وتر است: $\frac{4}{2} = 2$ و $EH = \frac{DE}{2} = \frac{4}{2} = 2$ و ضلع رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر وتر است:

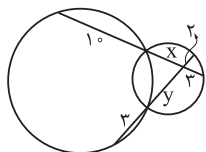
$$DH = \frac{\sqrt{3}}{2} DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

گام سوم (محاسبه شعاع و خواسته سؤال): حالا به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث ODH، طول شعاع OD را به دست می‌آوریم:

$$OD^2 = OH^2 + DH^2 \Rightarrow OD^2 = (4 + 4 + 2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 112 \Rightarrow OD = \sqrt{112}$$

مساحت قطاع 60° ، طبق مورد (۱) درس باکس می‌شود: $S = \frac{60}{360} \times \pi (\sqrt{112})^2 = \frac{56}{3}\pi$

در شکل مقابل، مقدار $x + y$ کدام است؟



۱۰ (۲)

۹ (۱)

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) در هر دایره وقتی دو وتر یا امتدادشان با هم برخورد می کنند، بین تکه هایی که روی هم می سازند، یک سری رابطه برقرار است. مشابه این رابطه ها، بین تکه هایی که از برخورد امتداد یک وتر و مماس ساخته می شود هم وجود دارد. این رابطه ها را در جدول برایتان آورده ایم.

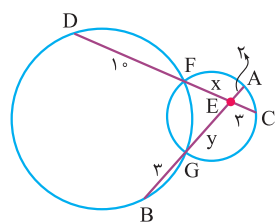
			شکل
$MT^2 = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$	رابطه

(۲) از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می توانیم نتیجه بگیریم که $\begin{cases} a = ck \\ b = dk \end{cases}$ می شود. مثلاً اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد، می توانیم فرض کنیم: $\begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases}$

گام اول (استفاده از روابط طولی در دایره کوچک):

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در دایره کوچک، وترهای AG و FC، داخل دایره یکدیگر را قطع می کنند، پس می توانیم بنویسیم:



$$x \times 3 = 2 \times y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{مورد (۲) درس یکس}} x = 2k, y = 3k$$

گام دوم (استفاده از روابط طولی در دایره بزرگ و محاسبه خواسته سؤال): در دایره بزرگ، امتداد وترهای FD و BG، خارج دایره یکدیگر را قطع کرده اند، پس داریم:

$$EF \times ED = EG \times EB \Rightarrow x(x + 10) = y(y + 3) \xrightarrow{\frac{x=2k}{y=3k}} 2k(2k + 10) = 3k(3k + 3)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } k} 2(2k + 10) = 3(3k + 3) \Rightarrow 4k + 20 = 9k + 9 \Rightarrow 5k = 11$$

پس $x + y = 2k + 3k = 5k = 11$ است.

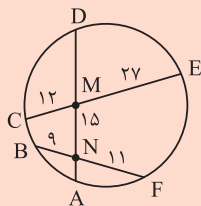
۲۸ در شکل زیر، طول پاره خط AD کدام است؟

۳۳ (۱)

۳۴ (۲)

۳۵ (۳)

۳۶ (۴)

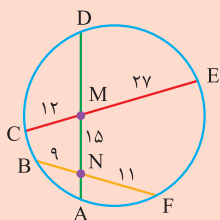


پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (استفاده از روابط طولی برای وترهای متقاطع):

فرض می‌کنیم $MD = x$ و $AN = y$ باشد. اول برای وترهای سبز و قرمز روابط طولی می‌نویسیم:



$$MD \times MA = MC \times ME \Rightarrow x(y + 15) = 12 \times 27 \quad (*)$$

$$\Rightarrow xy + 15x = 324 \quad (1)$$

حالا وترهای سبز و نارنجی:

$$AN \times ND = NB \times NF \Rightarrow y(x + 15) = 9 \times 11 \Rightarrow xy + 15y = 99 \quad (2)$$

گام دوم (محاسبه x و y و خواسته سؤال): طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم:

$$(xy + 15x) - (xy + 15y) = 324 - 99 \Rightarrow 15(x - y) = 225 \Rightarrow x - y = 15 \quad (3)$$

در (*), جای x می‌نویسیم $y + 15$:

$$(y + 15)^2 = 12 \times 27 \Rightarrow (y + 15)^2 = 4 \times 81 \Rightarrow y + 15 = \sqrt{4 \times 81} = 2 \times 9 = 18 \Rightarrow y = 3$$

۴×۳

$$x = 3 + 15 = 18$$

طبق (۳), x می‌شود:

$$AD = x + y + 15 = 18 + 3 + 15 = 36$$

پس طول AD می‌شود:

(سوال ۳۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

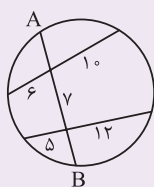
در شکل زیر، طول وتر AB کدام است؟

۱۶ (۱)

۱۷ (۲)

۱۸ (۳)

۱۹ (۴)



کنکور

در شکل زیر، دایره به قطر AB بر ضلع DC مماس است. اگر $AD = ۲$ و $BE = ۶$ باشد، مساحت چهارضلعی ABCD

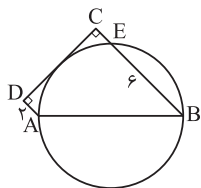
کدام است؟

۳۰ (۱)

۳۵ (۲)

۴۰ (۳)

۴۵ (۴)

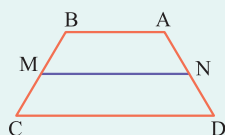


پاسخ: گزینه ۳

درس Box

قضیه تالس در دوزنقه هم برقرار است؛ یعنی در شکل مقابل اگر MN موازی قاعده‌های دوزنقه باشد، تناسب مقابل برقرار است:

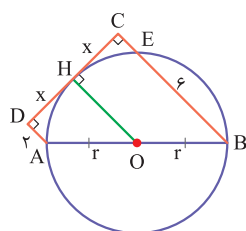
$$\frac{MB}{MC} = \frac{NA}{ND}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

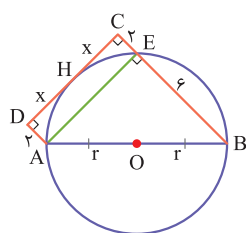
گام اول (تحلیل طول CH و DH): AD و BC هر دو بر DC عمودند، پس موازی‌اند؛ بنابراین چهارضلعی ABCD دوزنقه است. شعاع عمود بر مماس OH را به شکل اضافه می‌کنیم. موازی قاعده‌ها است، پس طبق درس باکس می‌توانیم در دوزنقه، تالس بنویسیم:

$$\frac{DH}{HC} = \frac{r}{r} \Rightarrow DH = HC = x$$



گام دوم (محاسبه طول CE): پاره‌خط AE را به شکل اضافه می‌کنیم تا چهارضلعی ADCE درست بشود. $\hat{E}$ ، زاویه محاطی رو به قطر است، پس $\hat{E} = 90^\circ$ می‌شود.

بنابراین چهارضلعی ADCE مستطیل و ضلع‌های مقابلش برابرند: $CE = AD = ۲$



گام سوم (محاسبه x): حالا برای قطعه مماس CH، رابطه طولی می‌نویسیم:

$$CH^2 = CE \times CB \Rightarrow x^2 = 2(2+6) = 16 \Rightarrow x = 4$$

گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال): مساحت دوزنقه می‌شود:

$$S = \frac{AD+BC}{2} \times DC = \frac{2+8}{2} \times 8 = 5 \times 8 = 40$$

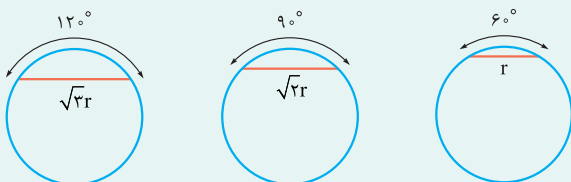
۳۰. نقطه M خارج دایره $C(O, \sqrt{3})$ قرار دارد و دایره به قطر MO دایره C را در نقاط P و Q قطع می کند. اگر $PQ = 3$ باشد، مساحت چهارضلعی MPOQ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

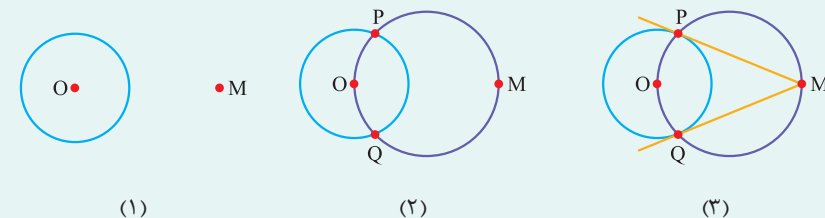
پاسخ: گزینه ۲

درس Box

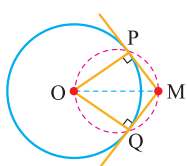
(۱) بعضی وقت ها به جای این که اندازه یک کمان را بدهند، طول وتر متناظر با آن کمان را می دهند. در یک دایره به شعاع r ، اندازه کمان متناظر با وترهایی که طولشان r ، $\sqrt{2}r$ و $\sqrt{3}r$ است، مطابق شکل های زیر به راحتی پیدا می شود:



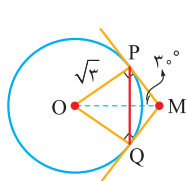
(۲) از یک نقطه خارج دایره مثل M در شکل (۱)، دو مماس می توانیم بر آن رسم کنیم. برای کشیدن این مماس ها، اول دایره ای به قطر OM می کشیم (شکل (۲)) تا دایره آبی را در نقاط P و Q قطع کند. حالا با وصل کردن M به Q و P به M مماس ها رسم می شوند، طول های این دو مماس همیشه برابرند.



(۳) مرکز دایره، همیشه روی نیمساز زاویه بین دو مماس قرار دارد، یعنی در شکل زیر، OM نیمساز زاویه M است.



گام اول (رسم شکل و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت زیر است. به گفته سؤال دایره به قطر OM، دایره آبی را در نقاط P و Q قطع می کند، پس طبق مورد (۲) درس باکس MP و MQ بر دایره در نقاط P و Q مماس اند و شعاع های OP و OQ عمود بر آنها هستند.



گام دوم (محاسبه $\widehat{OMP}$): به گفته سؤال $PQ = 3$ و شعاع دایره برابر $\sqrt{3}$ است؛ یک لحظه نسبت PQ به r را ببینید:

$$\frac{PQ}{r} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow PQ = r\sqrt{3}$$

طول PQ ، برابر شعاع شد، پس طبق مورد (۱) درس باکس، $\widehat{PQ} = 120^\circ$ می شود، $\widehat{M}$ ، زاویه بین دو مماس است که مکمل PQ است: $\widehat{M} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. از طرفی، طبق مورد (۳) درس باکس، OM نیمساز زاویه $\widehat{M} = 60^\circ$ است، پس $\widehat{PMO} = 30^\circ$ می شود.

گام سوم (محاسبه طول MP و خواسته سؤال): در مثلث قائم الزاویه OPM، برای زاویه 60° ، تانژانت می نویسیم:

$$\tan 30^\circ = \frac{OP}{MP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{MP} \Rightarrow MP = 3$$

مثلث های OMP و OMQ با سه ضلع برابر هم نهشت اند، پس مساحت چهارضلعی OPMQ می شود:

$$S_{OPMQ} = 2S_{OPM} = 2\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3\right) = 3\sqrt{3}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۱

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$\sim r$ (۴)

r (۳)

F (۲)

T (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته

ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ تنها در صورتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.
ارزش گزاره دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ در صورتی درست است که ارزش دو گزاره p و q یکسان باشد و اگر p و q غیرهم‌ارز باشند، ارزش $p \Leftrightarrow q$ نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در گزاره داده‌شده، به جای p و q ارزش آن‌ها را قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

ارزش این گزاره برابر با ارزش r است

$$(T \Rightarrow r) \Leftrightarrow (F \Rightarrow \sim r) \equiv r \Leftrightarrow T$$

به انتقای مقدم درست است

گام اول: ارزش گزاره دوشروطی $r \Leftrightarrow T$ نیز برابر با ارزش r است، یعنی اگر r درست باشد ارزش این گزاره درست و اگر r نادرست باشد ارزش این گزاره نادرست است، پس:

$$r \Leftrightarrow T \equiv r$$

کنکور

اگر p گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

(سؤال ۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

$\sim T$ (۴)

$\sim r$ (۳)

T (۲)

r (۱)

۳۲ نقیض گزاره $(p \vee \sim q) \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$ با کدام گزاره، ارزش یکسانی دارد؟

F (۴)

T (۳)

$q \Rightarrow p$ (۲)

$p \Rightarrow q$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



ارزش گزاره فصلی $p \vee q$ تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره p و q ارزش نادرست داشته باشند: (در بقیه حالت‌ها دارای ارزش درستی است).
عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ نوشته می‌شود، عکس نقیض گزاره شرطی، با خود گزاره شرطی هم‌ارزش است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: جدول ارزش p و q را در ۴ حالت می‌نویسیم:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

گام دوم: $\sim q \Rightarrow \sim p$ همان $p \Rightarrow q$ است که فقط در سطر دوم نادرست است. $p \vee \sim q$ هم فقط در سطر سوم نادرست است.

p	q	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \vee \sim q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	د	ن
ن	ن	د	د

گام سوم: پس ترکیب فصلی این‌ها در هر ۴ سطر درست است و ارزشش همواره T است.

گام چهارم: صورت سؤال ارزش نقیض گزاره را خواسته که همواره F است.

۳۳

گزارهٔ «معکوس هر عدد صحیح ناصفر، از خود آن عدد بزرگ‌تر نیست» با استفاده از نماد سورها ($\forall$ یا $\exists$) به کدام صورت نوشته می‌شود و ارزش آن چیست؟

(۱) $\frac{1}{x} \geq x$; $\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ، درست

(۲) $\frac{1}{x} \geq x$; $\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ، نادرست

(۳) $\frac{1}{x} \leq x$; $\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ، درست

(۴) $\frac{1}{x} \leq x$; $\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ، نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۴

گزاره‌های سوری:

درس Box

سور عمومی: هرگاه بخواهیم یک خاصیت را به همهٔ اعضای مجموعه نسبت بدهیم از سور عمومی استفاده می‌کنیم، در این جا کلماتی مانند «هر»، «به ازای هر» و «به ازای جمیع مقادیر» به کار می‌بریم و به زبان ریاضی آن را به صورت $\forall$ نشان می‌دهیم. **سور وجودی:** گاهی اوقات یک خاصیت برای همهٔ اعضای دامنهٔ متغیر درست نیست و به ازای بعضی از آن‌ها یا فقط یکی از آن‌ها برقرار است، در این جا از کلماتی مانند «وجود دارد»، «بعضی» و «به ازای بعضی از مقادیر» استفاده می‌کنیم و به زبان ریاضی آن را به صورت $\exists$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه: اگر D دامنه متغیر باشد، گزارهٔ $\forall x \in D; p(x)$ در صورتی درست است که همهٔ عضوهای D خاصیت $p(x)$ را داشته باشند و گزارهٔ $\exists x \in D; p(x)$ زمانی درست است که حداقل یکی از اعضای D خاصیت $p(x)$ را داشته باشد.

گام اول: از کلمهٔ «هر» استفاده شده است، پس سور عمودی داریم و از نماد $\forall$ استفاده می‌کنیم و این گزاره را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\}; \frac{1}{x} \leq x$$

گام دوم: ارزش این گزاره نادرست است، چراکه در اعداد صحیح کوچک‌تر از -1 ، معکوس اعداد بزرگ‌تر از خود اعداد هستند. به عنوان مثال معکوس -3 یعنی $-\frac{1}{3}$ بزرگ‌تر از خود -3 است؛ بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزارهٔ زیر را با استفاده از نماد سورها ($\forall$ یا $\exists$) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(سؤال ۴ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۳)

«هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچک‌تر است.»

امتحان
نهایی

۳۴ به جای $p(x)$ ، کدام گزاره را در $\forall x \in (0,1); p(x)$ بنویسیم تا ارزش آن نادرست باشد؟

$$x^3 < x^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} > 1 \quad (1)$$

$$(2x-1)^2 > 0 \quad (4)$$

$$\sqrt{x} > x \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به خاصیت اعداد بین ۰ و ۱ گزینه درست را انتخاب کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: $p(x)$ برای هر عدد حقیقی $0 < x < 1$ شرطی را بیان می‌کند که درست نیست. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی کنیم.

گام دوم: بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): شرط $\frac{1}{x} > 1$ برای هر عدد حقیقی بین ۰ و ۱ درست است.

گزینه (۲): برای هر عدد بین ۰ و ۱ مقدار x^2 از x^3 بیشتر است.

گزینه (۳): برای تمام x ها در بازه $(0,1)$ مقدار $\sqrt{x}$ از x بیشتر است.

اما در گزینه (۴)، شرط $(2x-1)^2 > 0$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ برقرار نیست، پس با سور عمومی $(\forall)$ ارزش نادرست دارد.

۳۵ نقیض گزاره $x^2 + x + 1 > 0; x > 0$ کدام است؟

(۱) $x^2 + x + 1 \leq 0; x \leq 0$

(۲) $x^2 + x + 1 \leq 0; x > 0$

(۳) $x^2 + x + 1 > 0; x \leq 0$

(۴) $x^2 + x + 1 > 0; x \leq 0$

پاسخ: گزینه ۲

نقیض گزاره سوری:

درس Box

برای این که گزاره سوری $\forall x \in D; p(x)$ و یا $\exists x \in D; p(x)$ را نقیض کنیم، مراحل زیر را طی می کنیم:

(۱) دامنه متغیر، تغییر نمی کند.

(۲) نوع سور، عوض می شود.

(۳) بیان گزاره، یعنی $p(x)$ نقیض می شود.

گام اول: نوع سور باید عوض شود، ولی دامنه عوض نمی شود:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\forall x > 0 \xrightarrow{\text{نقیض}} \exists x > 0$$

گام دوم: بیان گزاره نما باید نقیض شود:

$$x^2 + x + 1 > 0 \xrightarrow{\text{نقیض}} x^2 + x + 1 \leq 0$$

گام سوم: پس نقیض گزاره به صورت $x^2 + x + 1 \leq 0; x > 0$ است که در گزینه (۲) آمده است.

نقیض گزاره: «به ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۳ مانند n ، اگر n عددی اول باشد، آن گاه باقی مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ است.» در کدام گزینه آمده است؟

(۱) بعضی از عددهای طبیعی بزرگتر از ۳ مانند n وجود دارند، به طوری که n عددی اول است و باقی مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ نمی شود.

(۲) بعضی از عددهای طبیعی بزرگتر از ۳ مانند n وجود دارند، به طوری که اگر n اول باشد باقی مانده n^2 در تقسیم بر ۶ برابر ۱ نمی شود.

(۳) به ازای هر عدد اول بزرگتر از ۳ مانند n اگر n اول باشد، باقی مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ نمی شود.

(۴) به ازای هر عدد اول بزرگتر از ۳ مانند n ، n عددی اول است و باقی مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ نمی شود.

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از هم‌ارزی‌های «تبدیل شرطی به فصلی» می‌دانیم که $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ؛ بنابراین اگر بخواهیم گزاره شرطی را نقیض کنیم با استفاده از هم‌ارزی دموگان، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

گام اول: دامنه گزاره، مجموعه اعداد طبیعی بزرگتر از ۳ است و گزاره به صورت شرطی آمده است. نوع سور، عمومی است و اگر بخواهیم نقیض آن را بنویسیم سور عمومی به سور وجودی تبدیل می‌شود، یعنی به ازای «هر عدد» از کلمه «بعضی» استفاده می‌کنیم، پس گزینه‌های (۳) و (۴) حذف می‌شوند.

گام دوم: برای نقیض کردن، دامنه تغییری نمی‌کند، بیان گزاره طبق نکته به صورت زیر نقیض می‌شود:

(n عددی اول است و باقی مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ نمی‌شود) $\equiv$ (اگر n عددی اول باشد، آن گاه باقی مانده n^2 در تقسیم بر ۶، برابر ۱ است) $\sim$ پس گزینه (۱) درست است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۷ سور مناسب برای این که ارزش گزاره $x + y = 16$ همواره درست باشد کدام است؟

(۱) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}$

(۲) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z}$

(۳) $\exists x \in \mathbb{E}, \exists y \in \mathbb{O}$

(۴) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: از روی گزینه‌ها می‌خوانیم:

گزینه (۱): برای هر عدد طبیعی x ، عدد طبیعی y وجود دارد که $x + y = 16$.

گزینه (۲): عدد طبیعی x وجود دارد که برای هر عدد صحیح y ، جمعشان ۱۶ شود.

گزینه (۳): عدد زوج x وجود دارد که عدد فرد y پیدا می‌شود که جمع آن‌ها ۱۶ باشد.

گزینه (۴): برای هر عدد طبیعی x ، عدد صحیح y وجود دارد که جمع‌شان ۱۶ است.

گام دوم: فکر کنیم در گزینه (۱) برای $x \geq 16$ (مثلاً خود ۱۶ یا ۱۷) عدد طبیعی y نداریم.

گزینه (۲): بی‌معنی است، یک عدد x وجود ندارد که با همه اعداد y مجموع ۱۶ دهد.

گزینه (۳): جمع عدد فرد و زوج اصلاً ۱۶ نمی‌شود!

گزینه (۴): برای هر عدد طبیعی x ، می‌توانیم عدد صحیح $y = 16 - x$ را معرفی کنیم و درست است. ✓

کدام یک از موارد زیر نادرست است؟ **۳۸**

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv A \subseteq B \quad (۱)$$

$$\exists x; (x \in A \wedge x \notin B) \equiv A \not\subseteq B \quad (۲)$$

$$\forall x; (x \in A) \Rightarrow (x \in B \vee x \in C) \equiv A \subseteq (B \cup C) \quad (۳)$$

$$\forall x; (x \in A) \Rightarrow (x \in B \wedge x \notin C) \equiv A \subseteq (B - C) \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۲

زیرمجموعه‌ها:

درس Box

اگر هر عضو A عضوی از B نیز باشد، مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، مثلاً اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، آن‌گاه $A \subseteq B$ است. اما B زیرمجموعه A نیست چون بعضی از اعضای B در A نیستند، پس $A \not\subseteq B$.

$$\begin{cases} A \subseteq B \equiv \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ A \not\subseteq B \equiv \exists x; (x \in A \wedge x \notin B) \end{cases}$$

پس در حالت کلی داریم:

از روی گزینه‌ها می‌خوانیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): به ازای هر x دلخواه، اگر x عضو A باشد، آن‌گاه x عضو B نیز هست. این نشان می‌دهد که A زیرمجموعه B است، یعنی $A \subseteq B$ پس این گزینه درست است. ✓

گزینه (۲): x وجود دارد که اگر x عضو A باشد و عضو B نباشد، پس A زیرمجموعه B نیست و $A \not\subseteq B$ ، پس این گزینه هم درست است. ✓

گزینه (۳): به ازای هر x دلخواه اگر x عضو A باشد، آن‌گاه x عضو B یا عضو C است، یعنی A زیرمجموعه اجتماع B و C یعنی $A \subseteq (B \cup C)$ است، پس این گزینه نادرست است. ✗

گزینه (۴): به ازای هر x دلخواه، اگر x عضو A باشد، آن‌گاه x عضو B است و عضو C نیست، یعنی $A \subseteq (B - C)$ ؛ پس گزینه (۳) پاسخ سؤال است.

اگر سه عضو به مجموعه A اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌هایش ۸۹۶ تا اضافه می‌شود. اگر از مجموعه A، دو عضو کم می‌کردیم، از تعداد زیرمجموعه‌هایش چه تعداد کم می‌شد؟

۹۶ (۴)

۴۸ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

مشاوره به تمرینات کتاب درسی توجه ویژه‌ای داشته باشید، چراکه همواره مورد توجه طراحان است.

پاسخ: گزینه ۴

رابطه $2^{n+3} - 2^n = 896$ را تشکیل دهید و از 2^n فاکتور بگیرید.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n است.

گام اول: می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است، پس اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، خواهیم داشت:

$$2^{n+3} - 2^n = 896 \Rightarrow 2^n \times 2^3 - 2^n = 896$$

$$\xrightarrow{\text{از } 2^n \text{ فاکتور می‌گیریم}} 2^n (2^3 - 1) = 896 \xrightarrow{\div 7} 2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$$

پس مجموعه A دارای ۷ عضو است.

گام دوم: حال اگر دو عضو از مجموعه A کم کنیم، خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$2^7 - 2^5 = 128 - 32 = 96$$

اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

(تمرین ۲ کتاب درسی - صفحه ۳۳)

یک سوم زیرمجموعه‌های چهارعضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ شامل ۱ هستند. این مجموعه چند زیرمجموعه حداقل ۲ عضوی دارد؟ ($n > 4$)

۵۰۹ (۴)

۱۰۱۱ (۳)

۴۰۸۳ (۲)

۲۰۳۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

رابطه $\frac{1}{3} \binom{n}{4} = \binom{n-1}{3}$ را تشکیل دهید و n را بیابید.

Hint

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی، برابر است با $\binom{n}{k}$.

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعه n عضوی، شامل i عضو خاص و فاقد j عضو خاص برابر $\binom{n-i-j}{k-i}$ است.

رابطه زیر را به خاطر بسپارید:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

نکته

گام اول: مجموعه n عضوی دارای $\binom{n}{4}$ زیرمجموعه چهارعضوی است.

گام دوم: زیرمجموعه ۴ عضوی شامل ۱ به صورت $B = \{1, 0, 0, 0\}$ است و به تعداد $\binom{n-1}{3}$ تا وجود دارد.

گام اول: طبق صورت سؤال داریم:

$$\frac{1}{3} \binom{n}{4} = \binom{n-1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کنیم}} n = 12$$

گام چهارم: تعداد زیرمجموعه‌های حداقل ۲ عضوی برابر است با:

$$\binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \dots + \binom{12}{12} = 2^{12} - \binom{12}{0} - \binom{12}{1} = 4096 - 1 - 12 = 4083$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

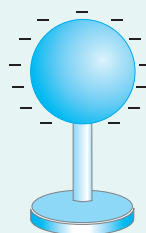
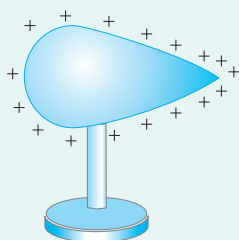
یک کره فلزی توپر و بدون بار، روی پایه عایقی قرار دارد. جسم رسانای بارداری را با آن تماس داده و دور می‌کنیم. کدام یک از موارد زیر درباره این کره درست است؟
الف) بار الکتریکی به طور یکنواخت در تمام کره پخش می‌شود.
ب) میدان الکتریکی درون کره برابر صفر است.
پ) همه نقاط کره هم‌پتانسیل‌اند.

- (۱) الف و ب
(۲) ب و پ
(۳) الف و پ
(۴) الف، ب و پ

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

هرگاه به یک جسم رسانای منزوی، بار الکتریکی داده شود، بار الکتریکی بر روی خارجی‌ترین سطح آن توزیع می‌شود. اگر جسم رسانا به صورت کره باشد، توزیع بار به صورت یکنواخت است؛ اما اگر جسم دارای نقاط نوک‌تیز باشد، تجمع و تراکم بار در نقاط نوک‌تیز بیشتر است.



پتانسیل تمام نقاط یکسان است. تراکم بار در تمام نقاط سطح خارجی یکسان است. پتانسیل تمام نقاط یکسان است. تراکم بار در نقاط نوک‌تیز بیشتر است. میدان الکتریکی خالص درون جسم رسانای باردار یا جسم رسانایی که در میدان الکتریکی خارجی قرار دارد، صفر است. (توجه کنید! میدان قائل درونی!)

عبارت «الف» نادرست و عبارت‌های «ب» و «پ» صحیح است، زیرا بار الکتریکی در تمام کره پخش نمی‌شود، بلکه فقط روی سطح خارجی کره پخش می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کره فلزی توپر، روی پایه عایقی قرار دارد. جسم رسانای باردار را با آن تماس داده و دور می‌کنیم. به ترتیب: بار الکتریکی در کره چگونه پخش می‌شود، پتانسیل الکتریکی نقاط مختلف کره چگونه است و میدان الکتریکی در درون کره چگونه است؟

(سوال ۱۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

- (۱) یکنواخت در همه جا - صفر - صفر
(۲) فقط در سطح خارجی - صفر - یکنواخت
(۳) فقط در سطح خارجی - هم‌پتانسیل با هم - صفر
(۴) یکنواخت در همه جا - هم‌پتانسیل با هم - یکنواخت

اگر از جسم بارداری 5×10^{10} الکترون بگیریم، بزرگی بار الکتریکی آن تغییری نمی‌کند. بار الکتریکی اولیه این جسم چند نانوکولن است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

۸ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تعداد الکترون‌های انتقال یافته را در رابطه $(-2q_1 = ne)$ قرار دهید تا بار الکتریکی اولیه جسم را به دست آورید.

Hint

بار الکتریکی یک کمیت کوانتومی است؛ یعنی همواره مضرب صحیحی از یک مقدار پایه (بار بنیادی) بوده و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد:

درس

$$q = \pm ne, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

تعداد الکترون مبادله شده بین دو جسم

علامت +: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت -: برای جسمی که الکترون دریافت کرده است.

اگر بخواهیم از جسمی الکترون بگیریم یا به آن الکترون بدهیم تا بزرگی بار الکتریکی آن تغییر نکند، باید انتقال الکترون به اندازه‌ای باشد که بار آن قرینه شود.

پاسخ خیلی تشریحی

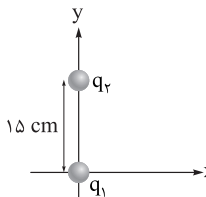
$$q_2 = -q_1 \Rightarrow \Delta q = -2q_1$$

$$\Delta q = ne \Rightarrow -2q_1 = ne \Rightarrow -2q_1 = 5 \times 10^{10} \times 1.6 \times 10^{-19}$$

$$\Rightarrow 2q_1 = -8 \times 10^{-9} \text{ C} \Rightarrow q_1 = -4 \times 10^{-9} \text{ C} \times \frac{1 \text{ nC}}{10^{-9} \text{ C}} \Rightarrow q_1 = -4 \text{ nC}$$

در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5 \mu C$ و $q_2 = -6 \mu C$ در فاصله 15 cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. بردار

نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 در SI کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$)



(۱) $12 \vec{j}$

(۲) $-12 \vec{j}$

(۳) $120 \vec{j}$

(۴) $-120 \vec{j}$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا با استفاده از رابطه قانون کولن، بزرگی نیرو را محاسبه کنید، سپس با توجه به نوع بارها، نوع نیرو و جهت آن را مشخص کنید.

Hint

درس‌Box

هر دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصله r ، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند که این نیرو از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

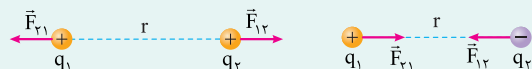
اندازه نیرو: $F(N)$

$$\text{ثابت کولن: } k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

فاصله دو بار از هم: $r(m)$

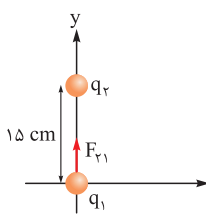
بارهای الکتریکی نقطه‌ای: $q_1, q_2 (C)$

نیروی بین دو بار در حالتی که دو بار همنام هستند، از نوع دافعه (رانشی) و در حالتی که دو بار ناهمنام هستند، از نوع جاذبه (ربایشی) است. بنا بر قانون سوم نیوتون، نیروی الکتروستاتیکی‌ای که دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند، هم‌اندازه، هم‌راستا ولی در خلاف جهت یکدیگرند:



ابتدا اندازه نیرویی را که دو بار الکتریکی بر یکدیگر وارد می‌کنند، حساب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$F_{12} = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow F_{12} = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^{-6}}{(15 \times 10^{-2})^2}$$

$$\Rightarrow F_{12} = \frac{9 \times 5 \times 6 \times 10^{-3}}{15 \times 15 \times 10^{-4}} \Rightarrow F_{12} = 12 \text{ N}$$

و با توجه به جهت نیرو که در شکل نمایش داده شده، $\vec{F} = (12 \text{ N}) \vec{j}$ درست است.

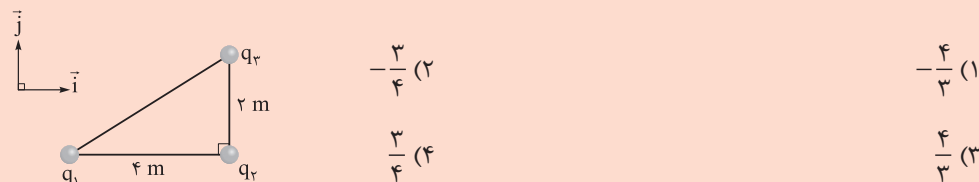
دقت کنید که برای محاسبه بزرگی نیروی بین دو بار، زمانی که بارها برحسب میکروکولن و فاصله‌ها برحسب سانتی‌متر است، از

تیزبازی

رابطه $F = \frac{9 \times 10^9 |q_1| |q_2|}{r^2}$ بدون این که آن‌ها را به SI ببریم، استفاده می‌کنیم.

$$F_{12} = \frac{9 \times 5 \times 6}{15^2} = 12 \text{ N}$$

سه ذره باردار مطابق شکل زیر، در سه رأس مثلث قائم الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 در SI، $\vec{F}_T = 4 \times 10^{-3} \vec{i} - 12 \times 10^{-3} \vec{j}$ باشد، $\frac{q_3}{q_1}$ کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



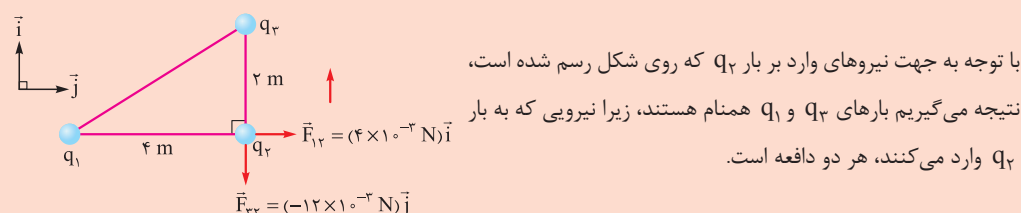
پاسخ: گزینه ۴

جهت نیروها را روی شکل رسم کنید و با توجه به جهت نیروها، مشخص می‌شود که بارهای q_1 و q_3 همانام هستند. در ادامه نسبت

نیروها را در رابطه مقایسه‌ای $\frac{F_{23}}{F_{12}} = \frac{q_3}{q_1} \times \frac{q_2}{q_2} \times (\frac{r_{12}}{r_{23}})^2$ قرار دهید تا نسبت به دست آید.

با توجه به قانون کولن $(F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2})$ ، رابطه مقایسه‌ای بین نیروهای وارد بر بار الکتریکی در دو حالت مختلف به صورت زیر است:

$$\frac{F'}{F} = \frac{|q'_1|}{|q_1|} \times \frac{|q'_2|}{|q_2|} \times (\frac{r}{r'})^2$$



$$\frac{F_{23}}{F_{12}} = \frac{|q_3|}{|q_1|} \times \frac{|q_2|}{|q_2|} \times (\frac{r_{12}}{r_{23}})^2 \Rightarrow \frac{12 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = \frac{|q_3|}{|q_1|} \times 1 \times (\frac{4}{3})^2 \Rightarrow 3 = \frac{|q_3|}{|q_1|} \times 4 \Rightarrow \frac{|q_3|}{|q_1|} = \frac{3}{4}$$

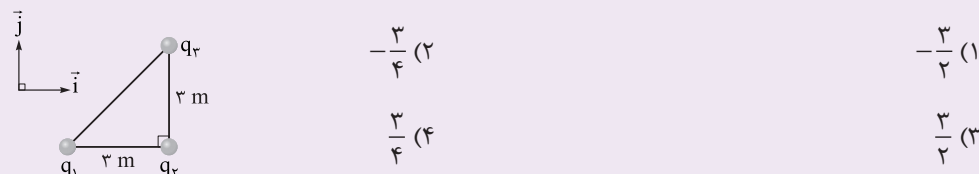
با توجه به توضیحات ابتدای سؤال، $\frac{q_3}{q_1} = \frac{3}{4}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

سه ذره باردار مطابق شکل زیر، در سه رأس مثلث قائم الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار

q_2 در SI، $\vec{F}_T = 8 \times 10^{-3} \vec{i} + 6 \times 10^{-3} \vec{j}$ باشد، $\frac{q_3}{q_1}$ کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

(سؤال ۶۴ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



کنکور

۴۵ بردار میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای، در فاصله ۳۰ cm از آن، در SI به صورت $\vec{E} = 560\vec{i} - 420\vec{j}$

است. اندازه بار این جسم چند نانوکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

۷ (۴)

۸ (۳)

۷۰ (۲)

۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

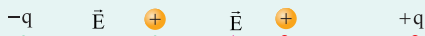
ابتدا اندازه میدان الکتریکی را از رابطه $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ به دست آورید، سپس از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ ، اندازه بار الکتریکی را محاسبه کنید.

Hint

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

برای تعیین جهت میدان در هر نقطه، فرض می‌کنیم در آن نقطه یک بار مثبت (بار آزمون) وجود دارد و در نتیجه جهت میدان در آن نقطه هم‌جهت با نیروی وارد بر بار آزمون از طرف بار q است.



هرگاه یک کمیت برداری به صورت بردارهای یکه داشته باشیم، برای محاسبه اندازه آن به صورت زیر داریم:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \Rightarrow |E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$|E| = \sqrt{(560)^2 + (420)^2} \Rightarrow |E| = \sqrt{70^2(8^2 + 6^2)} \Rightarrow |E| = 700 \text{ N/C}$$

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow 700 = \frac{9 \times 10^9 \times |q|}{(30 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow 700 = \frac{9 \times 10^9 \times |q|}{9 \times 10^{-2}}$$

$$\Rightarrow |q| = 7 \times 10^{-9} \text{ C} \times \frac{1 \text{ nC}}{10^{-9} \text{ C}} \Rightarrow |q| = 7 \text{ nC}$$

پاسخ خیلی تشریحی

روی محور x ، بارهای الکتریکی q_1 ، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1 = -4 \text{ cm}$ ، $x_2 = 1 \text{ cm}$ و $x_3 = 11 \text{ cm}$

۴۶

قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 برابر صفر باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ برابر کدام است؟

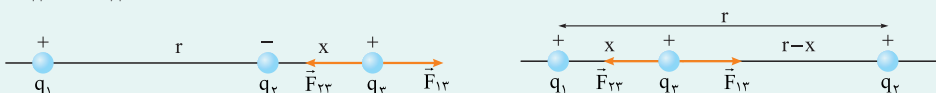
- (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) $-\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $-\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه ۴

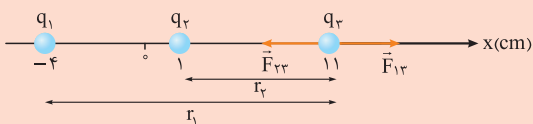
درس Box

اگر دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر ثابت شده باشند و بخواهیم بار q_3 را روی خط وصل دو بار یا امتداد آن قرار دهیم تا نیروی خالص وارد بر آن از سمت دو بار q_1 و q_2 صفر باشد، اگر دو بار همنام باشند، بار q_3 بین آن‌ها و نزدیک بار کوچک‌تر و اگر دو بار ناهمنام باشند، بار q_3 خارج آن‌ها و نزدیک بار کوچک‌تر قرار می‌گیرد. در این صورت برای به دست آوردن فاصله بار q_3 تا بار کوچک‌تر، اندازه نیروهای وارد بر آن را برابر قرار می‌دهیم:

$$|F_{13}| = |F_{23}|$$



گام اول: ابتدا محل قرارگیری بارها روی محور x را مشخص کرده و نیروهای وارد بر بار الکتریکی q_3 را رسم می‌کنیم. دقت کنید که بار الکتریکی q_3 مثبت است، چون در خارج دو بار الکتریکی دیگر قرار گرفته و در تعادل است، بارهای الکتریکی q_1 و q_2 باید ناهمنام باشند؛ بنابراین نیروها به صورت زیر است:



گام دوم: حال باید اندازه نیروهای وارد بر بار الکتریکی q_3 را برابر قرار دهیم تا نیروی خالص صفر شود:

$$|F_{23}| = |F_{13}| \Rightarrow \frac{k |q_2| |q_3|}{r_2^2} = \frac{k |q_1| |q_3|}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|q_2|}{10^2} = \frac{|q_1|}{15^2} \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = \frac{100}{225} \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{q_2}{q_1} = -\frac{4}{9}$$

با توجه به توضیحات ارائه‌شده در گام اول سؤال، q_1 و q_2 ناهمنام هستند؛ بنابراین:

هرگاه نیروی خالص وارد بر یک بار از طرف دو بار دیگر روی یک خط راست صفر شود، فاصله بار (q_3) از بار کوچک‌تر (x) به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{r}{q_1} \quad \frac{x}{q_2} \quad \frac{q_3}{q_3} \quad |q_2| < |q_1|$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right| \pm 1}}$$

+: بارهای همنام

−: بارهای ناهمنام

$$10 = \frac{5}{\sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right| - 1}} \Rightarrow \sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right|} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right|} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = \frac{9}{4} \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = -\frac{4}{9}$$

تیزبازی



روی محور x ، بارهای الکتریکی $q_1 = 50 \mu C$ ، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 0$ ، $x_2 = 4 \text{ m}$ و $x_3 = 5 \text{ m}$ قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_3 برابر صفر باشد، q_2 چند میکروکولن است؟

(سوال ۶۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

- | | |
|-----------|------------|
| ۱) $12/5$ | ۲) 2 |
| ۳) -2 | ۴) $-12/5$ |

دو بار الکتریکی نقطه‌ای و همنام q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر قرار دارند. اگر ۲۵ درصد از بار q_1 را به بار q_2 منتقل کرده و فاصله بین بارها را $\sqrt{3}$ برابر کنیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها تغییر نمی‌کند. $\frac{q_1}{q_2}$ برابر کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

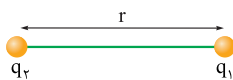
۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

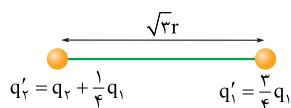
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نیروی بین بارها را در دو حالت محاسبه می‌کنیم:

حالت اول:



$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$$

حالت دوم:



$$q'_1 = q_2 + \frac{1}{4}q_1 \quad q'_2 = \frac{3}{4}q_1$$

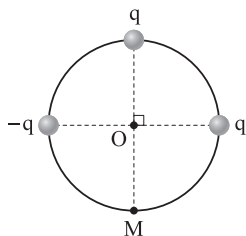
$$F' = \frac{k(\frac{3}{4}q_1)(q_2 + \frac{1}{4}q_1)}{(\sqrt{3}r)^2} \Rightarrow F' = \frac{\frac{3}{4}k(q_1)(q_2 + \frac{1}{4}q_1)}{3r^2}$$

گام دوم: نیروی دو حالت را برابر قرار می‌دهیم:

$$F' = F \Rightarrow \frac{kq_1q_2}{r^2} = \frac{\frac{3}{4}k(q_1)(q_2 + \frac{1}{4}q_1)}{3r^2}$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{1}{4}q_2 + \frac{1}{16}q_1 \Rightarrow \frac{3}{4}q_2 = \frac{1}{16}q_1 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = 12$$

سه ذره باردار مطابق شکل زیر روی محیط دایره‌ای قرار دارند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه O (مرکز دایره)، چند برابر بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه M است؟



$$\frac{4\sqrt{3}}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{3} \quad (۳)$$

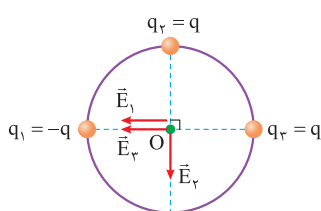
پاسخ: گزینه ۳

Hint

میدان‌های الکتریکی خالص در نقاط O و M را محاسبه کنید و سپس نسبت آن‌ها را به دست آورید.

گام اول: ابتدا میدان الکتریکی خالص در نقطه O را به دست می‌آوریم:

بزرگی میدان الکتریکی هر سه بار با هم برابر است. (چرا؟)



$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

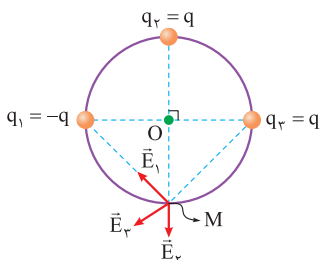
$$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{k|q|}{r^2} = E$$

$$E_{1,2,3} = E_1 + E_2 + E_3 = 3E$$

$$E_O = \sqrt{(3E)^2 + (E)^2} \Rightarrow E_O = \sqrt{10}E$$

گام دوم: میدان الکتریکی خالص را در نقطه M به دست می‌آوریم:

دقت کنید که در گام اول مقدار $\frac{kq}{r^2}$ را برابر با E در نظر گرفتیم؛ بنابراین:



$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{(r\sqrt{2})^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{kq}{2r^2} = \frac{E}{2}$$

$$E_3 = \frac{kq}{(2r)^2} \Rightarrow E_3 = \frac{kq}{4r^2} = \frac{E}{4}$$

$$E_{1,2,3} = \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2} \Rightarrow E_{1,2,3} = \frac{\sqrt{2}}{2}E$$

$$E_M = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}E\right)^2 + \left(\frac{E}{4}\right)^2} \Rightarrow E_M = \sqrt{\frac{E^2}{2} + \frac{E^2}{16}}$$

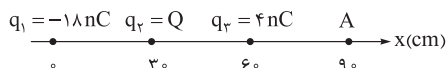
$$\Rightarrow E_M = \sqrt{\frac{9E^2}{16}} \Rightarrow E_M = \frac{3E}{4}$$

گام سوم: نسبت میدان‌های الکتریکی خالص در نقطه O به نقطه M را به دست می‌آوریم:

$$\frac{E_O}{E_M} = \frac{\sqrt{10}E}{\frac{3E}{4}} \Rightarrow \frac{E_O}{E_M} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای، روی محور x ثابت شده‌اند. Q برحسب نانوکولن در کدام محدوده باشد، تا

بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه A کم‌تر از 500 N/C شود؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



$$-28 < Q < 20 \quad (2)$$

$$-36 < Q < 12 \quad (1)$$

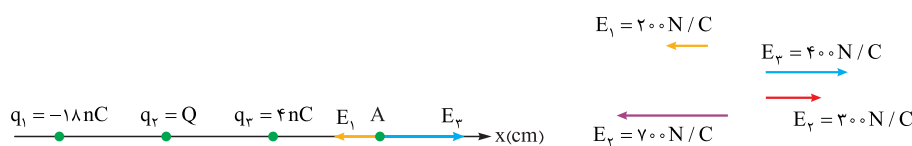
$$-28 < Q < 12 \quad (4)$$

$$-12 < Q < 20 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا میدان‌های الکتریکی بارهای q_1 و q_2 را در نقطه A به دست می‌آوریم:



$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

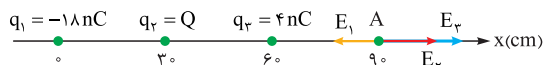
$$E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 18 \times 10^{-9}}{(90 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9 \times 18}{81 \times 10^{-2}} \Rightarrow E_1 = 200 \text{ N/C}$$

$$E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-9}}{(30 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow E_2 = \frac{9 \times 4}{9 \times 10^{-2}} \Rightarrow E_2 = 400 \text{ N/C}$$

$$E_{1,2} = |E_2 - E_1| \Rightarrow E_{1,2} = 200 \text{ N/C}$$

گام دوم: با توجه به اندازه و جهت میدان الکتریکی خالص بارهای q_1 و q_2 برای این‌که اندازه میدان الکتریکی خالص حاصل از سه بار در نقطه A ، تا 500 N/C برسد دو حالت امکان‌پذیر است، زیرا صورت سؤال در مورد جهت آن چیزی نگفته است؛ بنابراین یک بار آن را در جهت محور x و بار دیگر آن را خلاف جهت محور x در نظر می‌گیریم:

حالت اول: میدان الکتریکی خالص تا 500 N/C در جهت محور x باشد، در نتیجه:

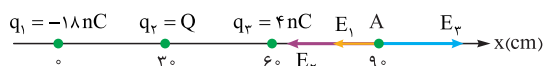


$$E_2 = 300 \text{ N/C} \Rightarrow 300 = \frac{9 \times 10^9 \times |Q|}{(60 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow 300 = \frac{9 \times 10^9 \times |Q|}{4 \times 36 \times 10^{-2}}$$

$$|Q| = 12 \times 10^{-9} \text{ C} \times \frac{1 \text{ nC}}{10^{-9} \text{ C}} \Rightarrow |Q| = 12 \text{ nC}$$

که با توجه به جهت میدان الکتریکی بار Q ، باید آن بار اولاً مثبت و دوماً برای این‌که میدان الکتریکی خالص کوچک‌تر از 500 N/C باشد، بار Q باید کوچک‌تر از 12 nC باشد.

حالت دوم: میدان الکتریکی خالص 500 N/C خلاف جهت محور x باشد، در نتیجه:



$$E_2 = 700 \text{ N/C} \Rightarrow 700 = \frac{9 \times 10^9 \times |Q|}{(60 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow 700 = \frac{9 \times 10^9 \times |Q|}{4 \times 36 \times 10^{-2}}$$

$$\Rightarrow |Q| = 28 \times 10^{-9} \text{ C} \times \frac{1 \text{ nC}}{10^{-9} \text{ C}} \Rightarrow |Q| = 28 \text{ nC}$$

و با توجه به جهت میدان الکتریکی بار Q ، باید این بار اولاً منفی و دوماً برای این‌که میدان الکتریکی خالص کوچک‌تر از 500 N/C باشد، بار Q باید بزرگ‌تر از 28 nC باشد.

در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $5 \times 10^3 \text{ N/C}$ که جهت آن قائم و روبه پایین است، ذره‌بارداری به جرم $4 \mu\text{g}$ معلق و به حال سکون قرار دارد. این ذره چند الکترون و چگونه مبادله کند تا از نظر الکتریکی خنثی شود؟
($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و $g = 10 \text{ N/kg}$)

(۱) 5×10^{10} الکترون دریافت کند. (۲) 5×10^7 الکترون دریافت کند.

(۳) 5×10^{10} الکترون از دست دهد. (۴) 5×10^7 الکترون از دست دهد.

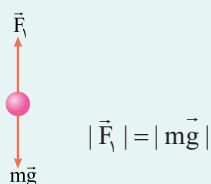
پاسخ: گزینه ۴

Hint

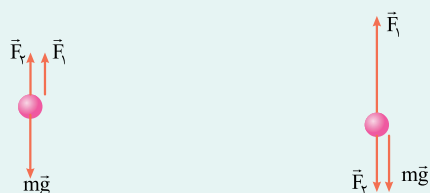
با توجه به جهت میدان که روبه پایین است و نیروی وزن که روبه پایین وارد می‌شود، نیروی میدان الکتریکی و نوع بار را برای معلق ماندن بار الکتریکی مشخص کنید و سپس از رابطه $E|q| = mg$ ، اندازه بار و پس از آن از رابطه $q = ne$ تعداد الکترون‌های مبادله شده برای خنثی شدن را به دست آورید.

درس Box

اگر جسمی به جرم m در یک فضا در حال تعادل باشد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود. در صورتی که علاوه بر وزن، یک نیروی دیگر به آن وارد شود، این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت یکدیگر هستند:

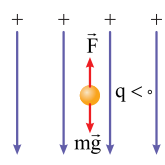


و اگر چند نیروی دیگر نیز همراه نیروی وزن به آن اثر کند، باید برابری نیروهای وارد بر آن صفر شود:



با توجه به جهت میدان الکتریکی و جهت نیروهای وارد بر آن، بار الکتریکی منفی است؛ بنابراین ذره باید الکترون بدهد تا خنثی شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$|\vec{F}| = |\vec{mg}| \Rightarrow E|q| = mg$$

$$\Rightarrow 5 \times 10^3 \times |q| = 4 \times 10^{-9} \times 10 \Rightarrow |q| = \frac{4 \times 10^{-8}}{5 \times 10^3} \Rightarrow |q| = 0.8 \times 10^{-11} \text{ C}$$

$$q = ne \Rightarrow 0.8 \times 10^{-11} = n \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = \frac{0.8 \times 10^{-11}}{1.6 \times 10^{-19}} \Rightarrow n = 0.5 \times 10^8$$

$$\Rightarrow n = 5 \times 10^7$$

ذره‌ای با بار مثبت در یک میدان الکتریکی یکنواخت پرتاب می‌شود. اگر در بخش معینی از مسیر حرکت این ذره، کار انجام شده توسط میدان الکتریکی، منفی باشد، در این بخش از مسیر، چه تعداد از موارد زیر، الزاماً درست است؟ (از نیروهای اتلافی و نیروی وزن صرف نظر کنید).

الف) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، افزایش می‌یابد.

ب) پتانسیل الکتریکی، افزایش می‌یابد.

پ) انرژی جنبشی ذره، افزایش می‌یابد.

۳ (۴)

۲ (۳)

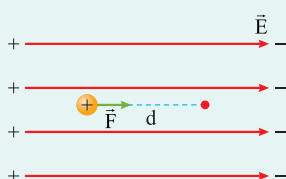
۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

اگر بار الکتریکی q درون میدان الکتریکی یکنواخت قرار بگیرد، این میدان بر بار q نیرو وارد می‌کند. حال، اگر این بار الکتریکی در اثر نیروی میدان جابه‌جا شود می‌توانیم کار انجام شده توسط میدان را به صورت زیر محاسبه کنیم:



$$W_{\text{میدان}} = E |q_0| d \cos \theta$$

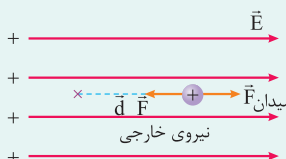
W : کار میدان الکتریکی (J)

E : میدان الکتریکی (N/C)

q_0 : بار الکتریکی (C)

d : جابه‌جایی (m)

اگر بار الکتریکی q را درون میدان الکتریکی یکنواخت با نیرویی هم‌اندازه با نیروی الکتریکی میدان، اما در خلاف جهت آن جابه‌جا کنیم، برای این جابه‌جایی، کار انجام داده‌ایم که از رابطه زیر قابل محاسبه است:



$$|\vec{F}_{\text{میدان}}| = |\vec{F}_{\text{خارجی}}| = E |q_0|$$

$$W_{\text{نیروی خارجی}} = E |q_0| d \cos \theta$$

W : کار نیروی خارجی (J)

E : میدان الکتریکی (N/C)

q_0 : بار الکتریکی (C)

d : جابه‌جایی (m)

$$\left. \begin{aligned} W > 0 & \leftarrow \cos \theta > 0 \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \\ W < 0 & \leftarrow \cos \theta < 0 \quad 90^\circ < \theta \leq 180^\circ \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \theta: \text{زاویه بین نیرو و جابه‌جایی}$$

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی:

اگر یک بار الکتریکی درون یک میدان الکتریکی یکنواخت جابه‌جا شود (توسط نیروی الکتریکی و یا توسط نیروی خارجی)، روی آن کار انجام می‌شود و اندازه این کار برابر با اندازه تغییرات انرژی پتانسیل بار است.

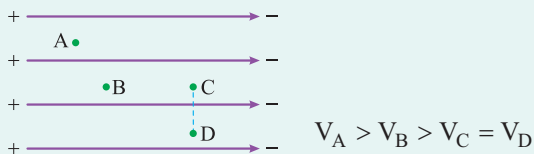
اگر بار الکتریکی در جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U < 0$ و اگر بار الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U > 0$ است.

بار الکتریکی منفی: در جهت میدان حرکت کند. $\Delta U > 0$
 خلاف جهت میدان حرکت کند. $\Delta U < 0$

بار الکتریکی مثبت: در جهت میدان حرکت کند. $\Delta U < 0$
 خلاف جهت میدان حرکت کند. $\Delta U > 0$

پتانسیل الکتریکی:

این کمیت از ویژگی‌های میدان الکتریکی است و ارتباطی به حضور یا عدم حضور بار الکتریکی درون میدان ندارد. به طوری که درون میدان، پتانسیل الکتریکی در نزدیک صفحه مثبت بیشتر از پتانسیل در نزدیکی صفحه منفی است؛ پس با حرکت در جهت میدان، پتانسیل کاهش می‌یابد و بالعکس، با حرکت در خلاف جهت میدان، پتانسیل افزایش می‌یابد.



دقت کنید که در یک راستای عمود بر میدان، پتانسیل الکتریکی ثابت می‌ماند.

بر طبق اصل پایستگی انرژی، اندازه تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی با یکدیگر هم‌اندازه و علامت آن‌ها قرینه یکدیگر است.

بررسی عبارت‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) درست؛ با توجه به این که کار میدان الکتریکی منفی است، پس ذره با بار مثبت خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است. در نتیجه، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، افزایش می‌یابد.

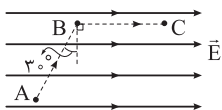
ب) درست؛ چون ذره خلاف جهت میدان الکتریکی (به سمت بارهای مثبت) حرکت می‌کند، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد.

پ) نادرست؛ با افزایش انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، طبق اصل پایستگی انرژی، انرژی جنبشی ذره کاهش می‌یابد.

بنابراین دو مورد درست است.

در شکل زیر، در میدان الکتریکی یکنواخت $E = 5 \times 10^3 \text{ N/C}$ ، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -4 \mu\text{C}$ ، مسیر ABC را طی می‌کند. تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در این مسیر چند میلی‌ژول است؟

$(\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ و } \overline{AB} = \overline{BC} = 1 \text{ m})$



(۱) 30°

(۲) 3°

(۳) -30°

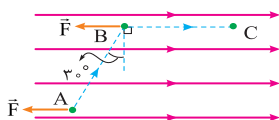
(۴) -3°

پاسخ: گزینه ۱



از رابطه $(\Delta U = Eqd \cos \alpha)$ تغییرات انرژی پتانسیل در هر یک از مراحل AB و BC را به دست آورده و آن‌ها را با یکدیگر جمع کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\Delta U_{ABC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC}$$

$$\Delta U_{AB} = E|q|d \cos \alpha \xrightarrow{\alpha = 18^\circ - 12^\circ = 6^\circ, d = 1 \text{ m}, E = 5 \times 10^3 \text{ N/C}} \Delta U_{AB} = 5 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-6} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta U_{AB} = 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \Delta U_{BC} = 5 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-6} \times 1 \Rightarrow \Delta U_{BC} = 2 \times 10^{-2} \text{ J} \quad : (\alpha = 18^\circ - 18^\circ = 0^\circ) \text{ در مسیر BC}$$

$$\Delta U_{ABC} = 10^{-2} + 2 \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-2} \text{ J} \times \frac{1 \text{ mJ}}{10^{-3} \text{ J}} \Rightarrow \Delta U_{ABC} = 30 \text{ mJ}$$

در میدان الکتریکی یکنواخت $E = 8 \times 10^3 \text{ N/C}$ ، پروتون با تندی v_0 در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. اگر پروتون پس از 10 cm جابه‌جایی متوقف شود، v_0 چند کیلومتر بر ثانیه است؟ (بار پروتون

$C = 1.6 \times 10^{-19}$ و جرم آن $kg = 1.6 \times 10^{-27}$ است.)

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۴۰۰ (۲)

۲۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$W_{\text{میدان}} = E |q| \cos \alpha \Rightarrow W_{\text{میدان}} = 8 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10 \times 10^{-2} \times -1$$

$$W_{\text{میدان}} = -12.8 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$\Delta U = -W_{\text{میدان}} \Rightarrow \Delta U = -(-12.8 \times 10^{-17}) \Rightarrow \Delta U = 12.8 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$\Delta U = -\Delta K \Rightarrow \Delta K = -12.8 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow -12.8 \times 10^{-17} = \frac{1}{2} \times 1.6 \times 10^{-27} (0 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 16 \times 10^{10} \Rightarrow v_0 = 4 \times 10^5 \text{ m/s} \times \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}}$$

$$\Rightarrow v_0 = 4 \times 10^2 \text{ km/s} = 400 \text{ km/s}$$

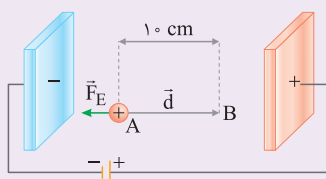
کتاب
درسی

در یک میدان الکتریکی یکنواخت $E = 2 \times 10^3 \text{ N/C}$ ، پروتون از نقطه A با سرعت $\vec{v}_0$ در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است. پروتون سرانجام در نقطه B متوقف می‌شود. بار پروتون $C = 1.6 \times 10^{-19}$ و

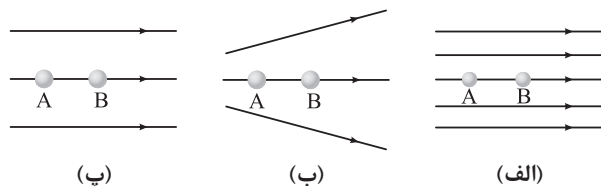
(فیزیک (۲) - مثال ۱۰-۱ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی پروتون در این جابه‌جایی چه قدر است؟

ب) تندی پرتاب پروتون را پیدا کنید (از وزن پروتون و مقاومت هوا چشم‌پوشی شود).



شکل زیر، سه آرایش خطوط میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. در هر آرایش، یک پروتون از حالت سکون در نقطه A رها می‌شود و سپس توسط میدان الکتریکی تا نقطه B شتاب می‌گیرد. نقطه‌های A و B در هر سه آرایش در فاصله‌های یکسانی از هم قرار دارند. اگر تندی پروتون هنگام عبور از نقطه B در شکل‌های (الف)، (ب) و (پ) به ترتیب v_1 ، v_2 و v_3 باشد، کدام مقایسه درست است؟



$$v_2 > v_1 = v_3 \quad (1)$$

$$v_1 = v_3 > v_2 \quad (2)$$

$$v_3 > v_2 > v_1 \quad (3)$$

$$v_1 > v_2 > v_3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به رابطه کار درون میدان الکتریکی، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی و انرژی جنبشی، به صورت زیر داریم:

$$|W| = |\Delta U| = |\Delta K| \Rightarrow Eqd \cos \alpha = \frac{1}{2} m(v_3^2 - v_1^2)$$

با توجه به این که اندازه بار الکتریکی (q)، فاصله طی شده (d)، جرم ذرات (m) و تندی اولیه برای تمام بارها یکسان است، پس تندی پروتون‌ها در نقطه B متناسب با اندازه میدان الکتریکی است، پس هر چه میدان قوی‌تر باشد، تندی در نقطه B بیشتر است. در شکل (الف) خطوط میدان الکتریکی به هم نزدیک‌تر هستند، پس میدان الکتریکی آن‌جا قوی‌تر است، پس از آن میدان الکتریکی در شکل (ب) و پس از آن در شکل (پ) قوی‌تر است؛ بنابراین:

$$v_1 > v_2 > v_3$$

۵۵

بار الکتریکی $q = -4 \mu\text{C}$ از نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی V_1 تا نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_2 = 45 \text{ V}$ جابه‌جا

می‌شود. اگر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q در این جابه‌جایی $J \times 10^{-4}$ کاهش یابد، V_1 چند ولت است؟

- ۷۵ (۱) -۷۵ (۲) ۳۰ (۳) -۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

با کمک رابطه $(\Delta U = q(V_2 - V_1))$ می‌توانید پتانسیل الکتریکی نقطه (۱) را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta U = q \Delta V \Rightarrow -3 \times 10^{-4} = -4 \times 10^{-6} (45 - V_1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \times 10^{-2} = 45 - V_1 \Rightarrow 75 = 45 - V_1 \Rightarrow V_1 = -30 \text{ V}$$

بار الکتریکی $q = -10 \text{ nC}$ از نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_1 = 15 \text{ V}$ تا نقطه‌ای با پتانسیل V_2 آزادانه جابه‌جا

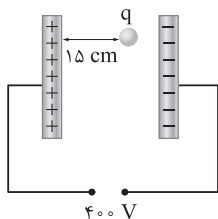
می‌شود. اگر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q در این جابه‌جایی $J \times 10^{-7}$ کاهش یابد، V_2 چند ولت است؟

(سؤال ۷ قسمت الف) - امتحان نهایی ریاضی فرداد ۱۴۰۴

امتحان
نهایی

۵۶

در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه رسانا برابر با 400 V و فاصله آن ها 20 cm است. بار الکتریکی $q = 2\text{ }\mu\text{C}$ ، بین این دو صفحه قرار دارد. اندازه نیروی الکتریکی وارد بر این بار، چند میلی نیوتون است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا از رابطه $E = \frac{\Delta V}{d}$ اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه را به دست آورید و سپس با رابطه $F = E |q|$ ، اندازه نیروی وارد بر بار q را محاسبه کنید.

درس Box

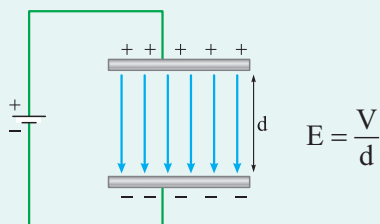
هرگاه بار آزمون (q_0) درون یک میدان الکتریکی (E) قرار بگیرد و نیروی F از طرف میدان به آن وارد شود، اندازه میدان از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = \frac{F}{|q_0|}$$

میدان الکتریکی (N/C)
نیروی وارد بر بار (N)
اندازه بار آزمون (C)

جهت میدان الکتریکی در هر نقطه، هم جهت با نیروی وارد بر بار مثبت در آن نقطه است که این همان تعریف کمی میدان الکتریکی است.

بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه فلزی موازی که به یک باتری با اختلاف پتانسیل V متصل هستند، از رابطه زیر به دست می آید:



$$E = \frac{V}{d}$$

E : میدان الکتریکی (N/C)

V : اختلاف پتانسیل بین دو صفحه (V)

d : فاصله بین دو صفحه (m)

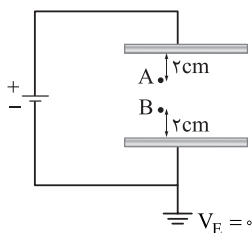
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow E = \frac{400}{20 \times 10^{-2}} \Rightarrow E = 2 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$F = E |q| \Rightarrow F = 2 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} \Rightarrow F = 4 \times 10^{-3} \text{ N} \times \frac{1 \text{ mN}}{10^{-3} \text{ N}}$$

$$\Rightarrow F = 4 \text{ mN}$$

در شکل زیر، فاصله دو صفحه رسانای موازی و بزرگ که به دو سر یک باتری متصل شده‌اند، برابر 20 cm است. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر با 36 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B، چند ولت است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

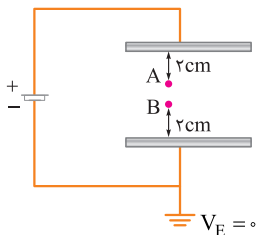
درس Box

چون درون یک میدان الکتریکی یکنواخت، اندازه میدان در همه نقاط با هم برابر است، اگر اندازه اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B مطابق شکل برابر $|\Delta V_{AB}|$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت موجود در فضا برابر است با:

$$E = \frac{|\Delta V_{AB}|}{d'}$$

میدان الکتریکی مقابل یکنواخت و در همه نقاط با هم برابر است؛ بنابراین:

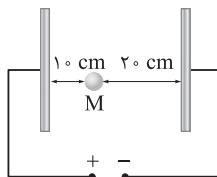
پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \frac{\Delta V_{AE}}{d_{AE}} = \frac{\Delta V_{BE}}{d_{BE}} \Rightarrow \frac{36}{18} = \frac{\Delta V_{BE}}{2} \Rightarrow \Delta V_{BE} = 4\text{ V}$$

با توجه به این که پتانسیل نقطه E صفر است، پس پتانسیل نقطه B برابر با 4 V است.

در شکل زیر، دو صفحه رسانای موازی به اختلاف پتانسیل الکتریکی معینی وصل هستند. اگر ذره‌ای به جرم ۱۰ میلی گرم و بار الکتریکی $q = -۵ \mu C$ را در نقطه M رها کنیم، ذره با تندی ۴ m/s به یکی از صفحه‌ها برخورد می‌کند. اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه چند ولت است؟ (از اثر وزن ذره، صرف نظر کنید).



۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۴۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار را به دست می‌آوریم:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times (4^2 - 0)$$

$$\Rightarrow \Delta K = 8 \times 10^{-5} \text{ J} \Rightarrow \Delta U = -\Delta K = -8 \times 10^{-5} \text{ J}$$

گام دوم: اگر بار q را در نقطه M رها کنیم، با توجه به این که بار آن منفی است، در خلاف جهت میدان حرکت کرده و به صفحه مثبت برخورد می‌کند؛ بنابراین:

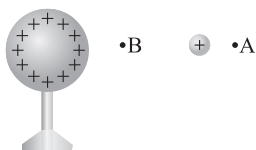
$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{-8 \times 10^{-5}}{-5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta V = 16 \text{ V}$$

گام سوم: چون میدان یکنواخت است، میدان بین دو صفحه با میدان الکتریکی بین نقطه M و صفحه مثبت برابر است:

$$\frac{\Delta V_{\text{باتری}}}{d_{\text{دو صفحه}}} = \frac{\Delta V_{M+}}{d_{M+}} \Rightarrow \frac{\Delta V_{\text{باتری}}}{30} = \frac{16}{10} \Rightarrow \Delta V_{\text{باتری}} = 48 \text{ V}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، ذره باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطه A به سمت کره باردار که روی پایه عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطه B قرار می‌دهیم. کدام مورد درباره کاری که ما در این جابه‌جایی انجام می‌دهیم (W) و مقایسه پتانسیل الکتریکی (V) دو نقطه A و B درست است؟



$$V_A > V_B, W > 0 \quad (1)$$

$$V_B > V_A, W < 0 \quad (2)$$

$$V_A > V_B, W < 0 \quad (3)$$

$$V_B > V_A, W > 0 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که نیروی ما در این حرکت با جابه‌جایی هم‌جهت است؛ بنابراین:

$$W = F \cdot d \cdot \cos \alpha \xrightarrow[\cos \alpha = 1]{\alpha = 0} W > 0$$

$$V_B > V_A$$

و چون پتانسیل الکتریکی در نزدیکی بارهای مثبت از سایر نقاط بیشتر است:

بنابراین گزینه (۴) درست است.

شعاع دو کره فلزی باردار و هم اندازه A و B برابر با ۱۰ cm است. با تماس دو کره به یکدیگر، $2 \mu\text{C}$ بار الکتریکی بین دو کره منتقل شده و چگالی سطحی بار الکتریکی کره A، $12/5$ درصد کاهش می‌یابد. چگالی سطحی بار الکتریکی کره B، قبل از تماس در SI کدام است؟ ($\pi = 3$)

(۲) 10^{-4}

(۱) 10^{-3}

(۴) 2×10^{-4}

(۳) 2×10^{-3}

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

اگر بار الکتریکی یک رسانا با سطح خارجی A، برابر با Q باشد، چگالی سطحی بار الکتریکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{|Q|}{A}$$

سطح خارجی کره به شعاع r از رابطه $A = 4\pi r^2$ به دست می‌آید. رابطه چگالی سطحی به صورت مقایسه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{|Q_A|}{|Q_B|} \times \frac{A_B}{A_A} \xrightarrow{\text{اگر دو رسانا کروی باشند}} \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{|Q_A|}{|Q_B|} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\sigma = \frac{|Q|}{A}$$

$$\frac{\sigma'_A}{\sigma_A} = \frac{17/5}{100} \Rightarrow \sigma'_A = \frac{17}{100} \sigma_A \Rightarrow Q'_A = \frac{17}{100} Q_A$$

پس بار کره A، $\frac{1}{100}$ بار اولیه‌اش تغییر کرده است، در نتیجه:

$$\frac{1}{100} Q_A = 2 \mu\text{C} \Rightarrow Q_A = 200 \mu\text{C} \Rightarrow Q'_A = \frac{17}{100} \times 200 = 34 \mu\text{C}$$

$$Q'_A = Q'_B = 34 = \frac{Q_A + Q_B}{2} \Rightarrow 34 = \frac{200 + Q_B}{2} \Rightarrow Q_B = 68 \mu\text{C}$$

$$\sigma_B = \frac{Q_B}{A} \Rightarrow \sigma_B = \frac{68 \times 10^{-6}}{4 \times 3 \times 10^{-2}} \Rightarrow \sigma_B = 5.67 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$$

۶۱ با توجه به شکل زیر که برخی از عنصرهای گروه ۱۴ جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟

A
B
C
D
E

(۱) ۶۰ درصد از عنصرهای نشان داده شده دارای سطح براق و صیقلی هستند.

(۲) عنصر B مانند فلزها، رسانایی الکتریکی دارد و مانند نافلزها در واکنش با اتم‌ها الکترون می‌گیرد.

(۳) تفاوت عدد اتمی اولین نافلز گروه نشان داده شده با اولین فلز این گروه، برابر ۴۴ است.

(۴) عنصر C برخلاف عنصر A، نمی‌تواند در واکنش با اکسیژن، دی‌اکسید تشکیل دهد.

پاسخ: گزینه ۳

در بین ۵ عنصر اول گروه ۱۴، هم نافلز، هم شبه‌فلز و هم فلز وجود دارد:

C	۶	→ نافلز
Si	۱۴	} شبه‌فلز
Ge	۳۲	
Sn	۵۰	} فلز
Pb	۸۲	

شکل داده شده مربوط به عنصرهای گروه ۱۴ جدول دوره‌ای است. اولین نافلز این گروه، کربن (در این جا A) با عدد اتمی ۶ و اولین فلز آن، قلع (در این جا D) با عدد اتمی ۵۰ است.

$$۵۰ - ۶ = ۴۴$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): عنصرهای B (۱۴Si)، C (۳۲Ge)، D (۵۰Sn) و E (۸۲Pb) دارای سطح براق و صیقلی هستند؛ یعنی ۴ عنصر از ۵ عنصر نشان داده شده:

$$\frac{۴}{۵} \times ۱۰۰ = ۸۰\%$$

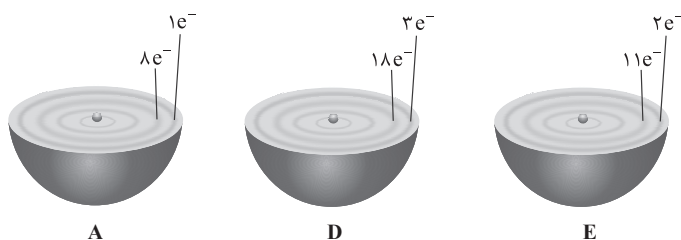
گزینه (۲): عنصر B همان شبه‌فلز سیلیسیم است که تمایل به اشتراک الکترون دارد، نه گرفتن الکترون!

گزینه (۴): رفتار شیمیایی عنصرهای یک گروه مشابه هم بوده و همه عنصرهای گروه ۱۴، همانند کربن می‌توانند در ترکیب با اکسیژن، دی‌اکسید تولید کنند (CO_۲، SiO_۲، GeO_۲، PbO_۲، SnO_۲).



پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۲ با توجه به شکل‌های زیر که برشی از اتم‌های چند عنصر را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب داده‌شده درست‌اند؟



الف) وجود ترکیب‌های عنصر D در سنگ‌ها و شیشه‌ها، می‌تواند سبب ایجاد رنگ شود.

ب) عنصر A مانند عنصر E، سطح درخشان و براقی داشته و نسبت به E در مجاورت هوا به سرعت کدر می‌شود.

پ) عنصر E همانند عنصر بعد از خود در جدول دوره‌ای، می‌تواند با کلر ترکیب‌هایی پایدار با فرمول شیمیایی XCl_3 و XCl_4 تشکیل دهد.

ت) یون‌های پایدار عنصرهای D و A برخلاف عنصر E، به آرایش الکترونی گاز نجیب می‌رسند.

(۱) الف - ب (۲) الف - ت (۳) ب - پ (۴) پ - ت

پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به شمار الکترون‌ها در لایه‌های الکترونی اتم‌های داده‌شده، می‌توانیم به راحتی عدد اتمی آن‌ها را به دست آوریم (گنجایش الکترونی لایه‌های اول و دوم به ترتیب ۲ و ۸ الکترون است):

$$\text{E (یکی از فلزهای واسطه در دوره ۴)} \Rightarrow 23V \Rightarrow 2 + 8 + 11 + 2 = 23 \Rightarrow \text{عدد اتمی E}$$

$$\text{D (فلز دسته p در دوره ۴)} \Rightarrow 31Ga \Rightarrow 2 + 8 + 18 + 3 = 31 \Rightarrow \text{عدد اتمی D}$$

$$\text{A (فلز قلیایی در دوره ۴)} \Rightarrow 19K \Rightarrow 2 + 8 + 8 + 1 = 19 \Rightarrow \text{عدد اتمی A}$$

حالا عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) وجود ترکیب‌های عنصرهای واسطه در سنگ‌ها و شیشه‌ها، می‌تواند سبب ایجاد رنگ شود. در بین عنصرهای داده‌شده، فقط E همان فلز واندایم) جزء عنصرهای واسطه است نه D. ✗

ب) هر سه عنصر داده‌شده در سؤال، فلز هستند و سطح درخشان و براقی دارند ولی فلزهای دسته d واکنش‌پذیری کم‌تری از فلزهای دسته s دارند و نسبت به این فلزها، با اکسیژن در هوای مرطوب به کندی واکنش می‌دهند. ✓

پ) عنصر E، فلز واندایم و عنصر بعد از آن در جدول دوره‌ای با عدد اتمی ۲۴، فلز کروم (۲۴ Cr) است. هر دو فلز واندایم و کروم دارای کاتیون‌های پایدار $2+$ و $3+$ هستند و می‌توانند با کلر ترکیب‌هایی با فرمول شیمیایی XCl_3 و XCl_4 تشکیل دهند. ✓

ت) بین سه فلز $23V$ ، $31Ga$ و $19K$ ، فقط یون پایدار پتاسیم ($19K^+$) به آرایش گاز نجیب (آرگون) می‌رسد.



(۱) بیشتر عنصرهای جدول دوره‌ای را فلزها تشکیل می‌دهند که به طور عمده در سمت چپ و مرکز جدول قرار دارند.

(۲) بین اولین و دومین هالوژن جدول تناوبی، شمار عنصرهای نافلزی بیشتر از عنصرهای فلزی است.

${}_{17}\text{Cl}$

(۳) عنصرهای گروه اول جدول دوره‌ای، بیشترین شعاع اتمی را در مقایسه با عنصرهای هم‌دوره خود دارند.

${}_{9}\text{F}$

(۴) به طور کلی با افزایش عدد اتمی عنصرها، خصلت نافلزی آن‌ها در گروه‌ها، کاهش و در دوره‌ها، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اولین و دومین هالوژن جدول تناوبی ${}_{9}\text{F}$ و ${}_{17}\text{Cl}$ هستند. از $17 - 9 = 8$ عنصر موجود بین این دو عنصر در جدول تناوبی، عنصرهای ${}_{10}\text{Ne}$ ، ${}_{15}\text{P}$ و ${}_{16}\text{S}$ ، یعنی ۳ عنصر، نافلز و عنصرهای ${}_{11}\text{Na}$ ، ${}_{12}\text{Mg}$ و ${}_{13}\text{Al}$ ، یعنی ۳ عنصر، فلزند. دقت کنید که ${}_{14}\text{Si}$ شبه‌فلز است، بنابراین شمار عنصرهای فلزی و نافلزی با هم برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): درست! پی بگیریم دیگه؟!

گزینه (۳): در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ پس در یک دوره، عنصر گروه اول بیشترین شعاع اتمی را دارد.

گزینه (۴): در یک گروه از بالا به پایین، خصلت نافلزی کاهش و در یک دوره از چپ به راست، خصلت نافلزی افزایش می‌یابد.

کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف) در میان نافلزها، تنها نافلزهای گازی به شکل آزاد در طبیعت وجود دارند.

ب) کانه هماتیت یک نمونه ناخالص از آهن (III) اکسید است.

پ) در میان فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های رنگی لایه‌لای خاک یافت می‌شود.

ت) فلز کروم مانند فلزهای کلسیم و سدیم، فقط یک نوع کاتیون پایدار دارد.

۴) الف و ت

۳) ب و پ

۲) ب و ت

۱) الف و پ

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) برخی از نافلزهای جامد مانند گوگرد هم به شکل آزاد در طبیعت یافت می‌شوند.

ت) کروم دارای دو نوع کاتیون پایدار Cr^{2+} و Cr^{3+} است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۵

تفاوت عدد اتمی دومین عنصر واسطه دوره چهارم با عدد اتمی چهارمین عنصر اصلی دوره پنجم کدام است؟

عنصر گروه ۱۴

۳۸ (۲)

عنصر گروه ۴

۲۸ (۱)

۳۰ (۴)

۲۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

نکته

به عنصرهای دسته‌های s و p جدول، عنصرهای اصلی و به عنصرهای دسته d جدول، عنصرهای واسطه می‌گویند.

عنصرهای اصلی ← گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ تا ۱۸

عنصرهای واسطه ← گروه‌های ۳ تا ۱۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دومین عنصر واسطه دوره چهارم در گروه ۴ قرار داشته و عدد اتمی آن ۴ واحد بیشتر از گاز نجیب دوره سوم یعنی Ar_{18} است؛
 $18 + 4 = 22$.

از طرفی در دوره پنجم، در گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ تا ۱۸ عنصرهای اصلی (دسته s و p) و در گروه‌های ۳ تا ۱۲ عنصرهای واسطه (دسته d) قرار دارند؛ بنابراین چهارمین عنصر اصلی این دوره، متعلق به گروه ۱۴ ($5s^2 5p^2$) بوده و عدد اتمی آن ۴ واحد از گاز نجیب دوره پنجم (Xe_{54}) کم‌تر است؛ $54 - 4 = 50$.

$50 - 22 = 28$: تفاوت عدد اتمی دو عنصر مورد نظر

اگر شمار الکترون‌های دارای $l = 1$ در اتم عنصرهای A، B و C به ترتیب ۱۰، ۱۴ و ۵ باشد، کدام گزینه مقایسه شعاع اتمی آن‌ها را به درستی نشان می‌دهد؟

$$B > C > A \quad (۲)$$

$$C > B > A \quad (۱)$$

$$B > A > C \quad (۴)$$

$$C > A > B \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا باید عدد اتمی عنصرهای A، B و C را پیدا کرده و آن‌ها را شناسایی کنیم:

$$A \text{ در } l=1 \text{ e با } 10 = \Rightarrow 2p^6 3p^4 \Rightarrow {}_{16}\text{A} : [{}_{10}\text{Ne}] 3s^2 3p^4$$

A، نافلز S_{۱۶} است.

$$B \text{ در } l=1 \text{ e با } 14 = \Rightarrow 2p^6 3p^6 4p^2 \Rightarrow {}_{32}\text{B} : [{}_{18}\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^2$$

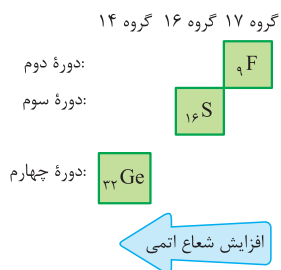
B، شبه‌فلز Ge_{۳۲} است.

$$C \text{ در } l=1 \text{ e با } 5 = \Rightarrow 2p^5 \Rightarrow {}_9\text{C} : [{}_2\text{He}] 2s^2 2p^5$$

C، نافلز F_۹ است.

گام دوم: با توجه به جایگاه این سه عنصر در جدول تناوبی و این که در هر گروه با افزایش عدد اتمی و در هر دوره، با کاهش عدد

اتمی، شعاع اتمی عناصر افزایش پیدا می‌کند، خواهیم داشت:



$$\text{مقایسه شعاع اتمی: } \text{Ge} > \text{S} > \text{F} \Rightarrow \text{B} > \text{A} > \text{C}$$

با توجه به داده‌های جدول زیر که به عنصرهای واسطه دوره چهارم جدول تناوبی مربوط است، کدام مقایسه‌های زیر درست است؟

نماد گونه				
A^{2+}	B^+	C	D	ویژگی‌ها
z	۶	a	۸	شمار الکترون‌ها با $l = 0$
۶	b	۳	۱/۵	نسبت شماره گروه به تعداد الکترون‌های لایه اول اتم
—	B_2O	C_2O_3	—	فرمول اکسید

الف) واکنش‌پذیری: $B < A$

ب) شمار الکترون‌ها با $l = 2$: $A > B > C > D$

پ) $a > z > b$

ت) بیشترین نسبت شمار کاتیون به آنیون در فرمول اکسید(های) عناصر: $B > A > C > D$

(۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

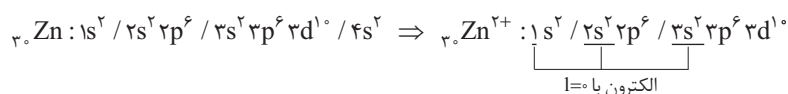
پاسخ: گزینه ۳

موارد «الف» و «پ» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا باید با استفاده از اطلاعات جدول، ۴ عنصر واسطه A ، B ، C و D را شناسایی کنیم.

A : در لایه اول الکترونی عناصر واسطه، ۲ الکترون وجود دارد ($1s^2$)؛ بنابراین شماره گروه عنصر A ، $12 = 2 \times 6$ است. عنصر واسطه دوره چهارم و گروه ۱۲ جدول، همان فلز روی ($_{30}Zn$) است:

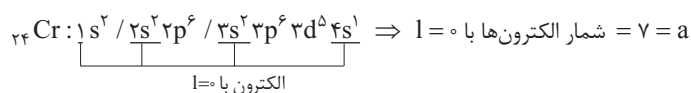


$\Rightarrow Z = 6 =$ شمار الکترون‌ها با $l = 0$ (زیرلایه‌های s) در $A^{2+} (_{30}Zn^{2+})$

B : مجموع شمار الکترون‌ها در زیرلایه‌های s (با $l = 0$) یون B^+ ، برابر ۶ است. می‌دانیم که در تشکیل کاتیون، جداسازی الکترون از اتم، ابتدا از بیرونی‌ترین زیرلایه ($4s$) صورت می‌گیرد؛ بنابراین فلز واسطه B ، ۷ الکترون در زیرلایه‌های s خود دارد و آرایش الکترونی آن به $3d^5 4s^1$ ($_{24}Cr$) یا $3d^{10} 4s^1$ ($_{29}Cu$) ختم می‌شود. از آن‌جا که این فلز واسطه، یون پایدار B^+ دارد، همان B فلز مس ($_{29}Cu$) است که در گروه ۱۱ دوره چهارم جدول قرار دارد.

$$b = \frac{\text{شماره گروه}}{\text{تعداد الکترون‌های لایه اول}} = \frac{11}{2} = 5.5$$

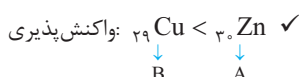
C : شماره گروه عنصر C ، $6 = 3 \times 2$ است و همان فلز کروم ($_{24}Cr$) است.



D : شماره گروه عنصر D ، $3 = 1/5 \times 2$ است و همان فلز اسکاندیم ($_{21}Sc$) می‌باشد. اسکاندیم دارای یون پایدار Sc^{3+} بوده و فرمول اکسید آن Sc_2O_3 است.

گام دوم: حالا می‌ریم سراغ بررسی موارد:

الف)



ب) $\times$ $A = B > C > D$ یا $_{30}Zn = _{29}Cu > _{24}Cr > _{21}Sc$: شمار الکترون‌ها با $l = 2$ (در زیرلایه d)

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
۱۰e ۵e ۱e

پ) a، z و b به ترتیب ۷، ۶ و ۵ هستند، بنابراین $a > z > b$ است. ✓

ت) فرمول اکسید یا اکسیدهای فلزهای مورد نظر به صورت ZnO ، CuO و Cu_2O ، CrO و Cr_2O_3 ، Sc_2O_3 است. ترتیب بیشترین نسبت شمار کاتیون به آنیون در این اکسیدها به صورت زیر است:

$B > A = C > D$ ✗ یا $\underbrace{\text{Cu}_2\text{O}}_2 > \underbrace{\text{ZnO}, \text{CrO}}_1 > \underbrace{\text{Sc}_2\text{O}_3}_3$ بیشترین مقدار $\frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}}$ در اکسید فلزها

۶۸

در چند گرم از نمونه آمونیوم نیترات با خلوص ۶۰ درصد، $1/806 \times 10^{24}$ اتم نیتروژن وجود دارد؟ (در ناخالصی ها اتم

نیتروژن وجود ندارد؛ 1 g.mol^{-1} ، $\text{H} = 1$ ، $\text{N} = 14$ ، $\text{O} = 16$)



۲۰۰ (۲)

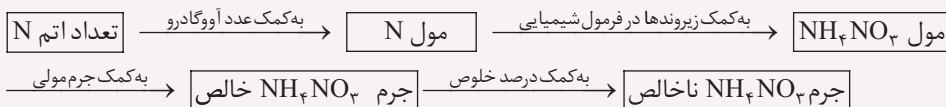
۷۲ (۱)

۲۴۰ (۴)

۱۴۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

Hint



با توجه به فرمول آمونیوم نیترات (NH_4NO_3)، در هر مول از این ترکیب، ۲ مول اتم نیتروژن وجود دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

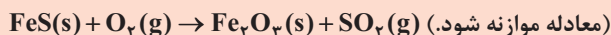
$$\frac{1/806 \times 10^{24} \text{ atom N}}{1} \times \frac{1 \text{ mol atom N}}{6.02 \times 10^{23} \text{ atom N}} \times \frac{1 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3}{2 \text{ mol atom N}} \times \frac{80 \text{ g NH}_4\text{NO}_3}{1 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3} = \text{خالص}$$

$$\times \frac{100 \text{ g NH}_4\text{NO}_3 \text{ ناخالص}}{60 \text{ g NH}_4\text{NO}_3 \text{ خالص}} = \frac{0.3 \times 80 \times 10}{2 \times 6} = 200 \text{ g}$$

کسر تبدیل مربوط به درصد خلوص

۶۹

اگر در واکنش ۱۱۰ گرم آهن (II) سولفید با گاز اکسیژن، ۱۶/۸ لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید در شرایط STP، طبق واکنش زیر تشکیل شود، بازده درصدی این واکنش کدام است و چند گرم فراورده جامد به دست می‌آید؟
($\text{Fe} = ۵۶, \text{S} = ۳۲, \text{O} = ۱۶ : \text{g.mol}^{-1}$)



۳۶ - ۶۰ (۴)

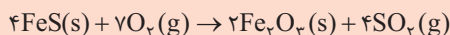
۶۰ - ۶۵ (۳)

۶۰ - ۶۰ (۲)

۳۶ - ۶۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$۴\text{FeS(s)} + ۷\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow ۲\text{Fe}_2\text{O}_3(\text{s}) + ۴\text{SO}_2(\text{g})$

برای قسمت اول سؤال، ابتدا مقدار نظری SO_2 را به دست می‌آوریم و بعد با داشتن مقدار عملی آن (داده مسئله) به راحتی بازده درصدی واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{SO}_2 \text{ مقدار نظری} = ۱۰\% \text{ g FeS} \times \frac{۱ \text{ mol FeS}}{۸۸ \text{ g FeS}} \times \frac{۴ \text{ mol SO}_2}{۴ \text{ mol FeS}} \times \frac{۲۲/۴ \text{ L SO}_2}{۱ \text{ mol SO}_2} = ۲۸ \text{ L SO}_2$$

$$\text{بازده درصدی واکنش} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۶/۸}{۲۸} \times ۱۰۰ = ۶۰\%$$

برای قسمت دوم سؤال و به دست آوردن جرم فراورده جامد می‌توانیم از مقدار فراورده دیگر واکنش (حجم SO_2 تولیدی) استفاده کنیم. فقط دقت کنید از آن‌جا که هر دو، فراورده واکنش هستند، نباید بازده درصدی را در محاسبات وارد کنیم (انگار یک بار برای حجم SO_2 تولیدی از مواد واکنش‌دهنده، بازده درصدی واکنش محاسبه شده است).

$$۱۶/۸ \text{ L SO}_2 \times \frac{۱ \text{ mol SO}_2}{۲۲/۴ \text{ L SO}_2} \times \frac{۱ \text{ mol Fe}_2\text{O}_3}{۴ \text{ mol SO}_2} \times \frac{۱۶۰ \text{ g Fe}_2\text{O}_3}{۱ \text{ mol Fe}_2\text{O}_3} = ۶۰ \text{ g}$$

می‌شد از روش کسر تناسب استفاده کرد و بین FeS ، Fe_2O_3 و SO_2 تناسب برقرار کرد. دقت کنید که در روش استفاده از کسر تناسب، بازده درصدی را باید حتماً در کسر مربوط به واکنش‌دهنده (FeS) ضرب کنیم:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{۱۰۰} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{ضریب} \times ۲۲/۴} \Rightarrow \frac{۱۰\% \times x}{۴ \times ۸۸} = \frac{y}{۲ \times ۱۶۰} = \frac{۴/۲ \times ۱۶/۸}{۴ \times ۲۲/۴}$$

(I) (II) (III)

$$\Rightarrow \text{(I) و (III): } x = \frac{۴/۲ \times ۴ \times ۱۰\%}{۲۲/۴} = ۶۰\%$$

$$\Rightarrow \text{(II) و (III): } y = \frac{۴/۲ \times ۲ \times ۱۶۰}{۲۲/۴} = ۶۰ \text{ g}$$

یه‌چور دیگه

اگر در تجزیه ۵/۰ مول آلومینیم سولفات طبق معادله موازنه‌نشده: $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3(\text{s}) \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3(\text{s}) + \text{SO}_2(\text{g})$ ، ۲۸/۸ لیتر فراورده گازی در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۲۴ لیتر است، به دست آید، بازده درصدی واکنش کدام است و چند گرم فراورده جامد به دست می‌آید؟ ($\text{S} = ۳۲, \text{Al} = ۲۷, \text{O} = ۱۶ : \text{g.mol}^{-1}$)

(سؤال ۲۱۵ کنکور ریاضی ۱۳۹۶)

۵۰/۱، ۸۰ (۲)

۴۰/۸، ۸۰ (۱)

۵۰/۱، ۸۵ (۴)

۴۰/۸، ۸۵ (۳)

کنکور

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

اسکاندیم

- از نخستین عنصر واسطه جدول دوره‌ای در ساخت تلویزیون و شیشه رنگی استفاده می‌شود.
- در بین عناصر واسطه دوره چهارم، دومین عنصری که خارجی‌ترین زیرلایه اشغال شده اتم آن نیمه پر است، به شکل آزاد هم در طبیعت یافت می‌شود.
- واکنش‌پذیری عناصر فلزی دوره چهارم جدول دوره‌ای، از چپ به راست، کاهش می‌یابد.
- اگر آرایش الکترونی یون A^{m+} مربوط به عنصری از دسته d، به زیرلایه پر ختم شود، اتم عنصر A به یقین در آرایش الکترونی خود دارای زیرلایه d پر است.

(۲) درست - نادرست - درست - نادرست

(۱) درست - نادرست - نادرست - درست

(۴) درست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - درست - نادرست - نادرست

پاسخ: گزینه ۲

عبارتهای اول و دوم، درست و عبارتهای سوم و چهارم، نادرست‌اند.

بررسی همه عبارتهای:

عبارت اول: اسکاندیم (Sc ، ۲۱)، نخستین عنصر واسطه جدول دوره‌ای است و از آن در ساخت تلویزیون و شیشه رنگی استفاده می‌شود. عبارت دوم: خارجی‌ترین زیرلایه در عناصر واسطه دوره چهارم، زیرلایه ۴s است. این زیرلایه ابتدا در اتم عنصر واسطه ۲۴Cr ($3d^5 4s^1$) و بعد در اتم عنصر واسطه ۲۹Cu ($3d^{10} 4s^1$) (به عنوان دومین عنصر واسطه دوره چهارم) نیمه پر است. فلز مس علاوه بر ترکیب به شکل عنصری و آزاد نیز در طبیعت وجود دارد.

عبارت سوم: روند تغییرات واکنش‌پذیری فلزات واسطه دوره چهارم جدول، منظم نیست! یعنی در فلزات واسطه دوره چهارم، از چپ به راست، با افزایش عدد اتمی، الزاماً واکنش‌پذیری کاهش پیدا نمی‌کند. مثلاً Zn، ۳. واکنش‌پذیری بیشتری از ۲۹Cu و ۲۶Fe دارد.

عبارت چهارم: دو حالت وجود دارد که آرایش الکترونی کاتیون فلز واسطه (A^{m+}) به زیرلایه پر ختم شود:

$$(۱) \quad A^{m+} : \dots (n-1)d^{1^0} \Rightarrow A : (n-1)d^{1^0} 4s^m$$

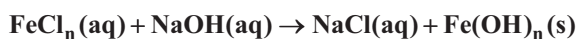
$$(۲) \quad A^{m+} : \dots (n-1)p^f \Rightarrow A : (n-1)p^f \underbrace{3d^x 4s^y}_{x+y=m}$$

در حالت (۱)، زیرلایه d عنصر A پر است ($(n-1)d^{1^0}$) ولی در حالت (۲)، این زیرلایه به طور کامل پر نیست!

(در حالت (۲)، برخلاف حالت (۱)، کاتیون فلز واسطه به آرایش گاز نجیب قبل از خود رسیده است.)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر از واکنش کامل ۲۰ میلی لیتر محلول ۴۰ درصد جرمی سدیم هیدروکسید با چگالی $1/2 \text{ g.mL}^{-1}$ با کلریدی از آهن (FeCl_n)، ۱۰/۸ گرم رسوب تشکیل شود، رنگ رسوب و جرم فراورده کلردار واکنش به ترتیب کدام است؟
($\text{Fe} = 56, \text{Cl} = 35/5, \text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$) (معادله واکنش موازنه شود.)



(۲) سبز - ۳۹

(۱) سبز - ۱۴/۰۴

(۴) قرمز - ۳۹

(۳) قرمز - ۱۴/۰۴

پاسخ: گزینه ۱



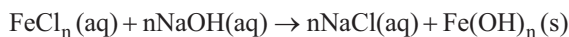
ابتدا با استفاده از حجم، چگالی و درصد جرمی محلول سدیم هیدروکسید، مول NaOH مصرفی در واکنش رو به دست بیار. بعد، معادله واکنش رو موازنه کن و با داشتن مول NaOH مصرفی و جرم رسوب (Fe(OH)_n) تولیدشده، از طریق استوکیومتری واکنش مقدار n رو به دست بیار. با توجه به مقدار n، رنگ رسوب هیدروکسید رو مشخص کن. برای قسمت دوم سؤال هم می تونی از طریق مول NaOH مصرفی یا جرم Fe(OH)_n تولیدی، جرم فراورده کلردار واکنش یعنی NaCl رو به دست بیاری.

گام اول: محاسبه مول NaOH مصرفی در واکنش:

$$20 \text{ mL محلول} \times \frac{1/2 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{40 \text{ g NaOH}}{100 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} = 0/24 \text{ mol NaOH}$$

چگالی محلول کسر مربوط به درصد جرمی

گام دوم: موازنه معادله واکنش:



گام سوم: به دست آوردن مقدار n (ظرفیت فلز):

$$0/24 \text{ mol NaOH} \times \frac{1 \text{ mol Fe}(\text{OH})_n}{n \text{ mol NaOH}} \times \frac{(56 + 17n) \text{ g Fe}(\text{OH})_n}{1 \text{ mol Fe}(\text{OH})_n} = 10/8 \text{ g Fe}(\text{OH})_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0/24} (56 + 17n) = \frac{45}{10/8} n \Rightarrow 56 + 17n = 45n \Rightarrow 28n = 56 \Rightarrow n = 2$$

استفاده از روش کسر تناسب:



$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0/24}{\text{NaOH}} = \frac{10/8}{1 \times (56 + 17n)} \Rightarrow 45n = 56 + 17n \Rightarrow 28n = 56 \Rightarrow n = 2$$

گام چهارم: مشخص کردن رنگ رسوب: با توجه به مقدار $n = 2$ ، رسوب تولیدشده، آهن (II) هیدروکسید (Fe(OH)₂) است که به رنگ سبز می باشد. دقت کنید که آهن (III) هیدروکسید (Fe(OH)₃) قرمز رنگ است.

گام پنجم: محاسبه جرم NaCl تولیدی:

$$0/24 \text{ mol NaOH} \times \frac{2 \text{ mol NaCl}}{2 \text{ mol NaOH}} \times \frac{58/5 \text{ g NaCl}}{1 \text{ mol NaCl}} = 14/04 \text{ g}$$

استفاده از کسر تناسب:



$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0/24}{\text{NaOH}} = \frac{x}{2 \times 58/5} \Rightarrow x = 14/04 \text{ g}$$



۷۲

اگر به ازای مصرف ۱۰ گرم گاز هیدروژن ۸۰ درصد خالص، در واکنش با هالوژن X_2 ، ۱۴۶ گرم فرآورده تولید شده باشد، این هالوژن با کدام فلز، هم‌دوره است؟ ($F = 19$, $Cl = 35/5$, $Br = 80$, $I = 127$, $H = 1$: $g.mol^{-1}$)، بازده واکنش را ۵۰ درصد

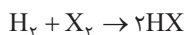
در نظر بگیرید.)



پاسخ: گزینه ۱

گام اول: هالوژن‌ها (X_2) می‌توانند با گاز H_2 مطابق معادله زیر واکنش دهند:

✓ **پاسخ خیلی تشریحی**



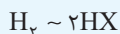
با داشتن جرم H_2 مصرفی و جرم فراورده تولیدی (HX)، می‌توانیم جرم مولی هالوژن (X) را به دست آورده و آن را شناسایی کنیم. (جرم مولی HX را M در نظر می‌گیریم).

$$146 \text{ g HX} \times \underbrace{\frac{100 \text{ g HX نظری}}{50 \text{ g HX عملی}}}_{\text{کسر مربوط به بازده درصدی}} \times \frac{1 \text{ mol HX}}{\text{Mg HX}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{1 \text{ mol HX}} \times \underbrace{\frac{100 \text{ g H}_2 \text{ ناخالص}}{80 \text{ g H}_2 \text{ خالص}}}_{\text{کسر مربوط به درصد خلوص}} = 10 \text{ g H}_2 \text{ ناخالص}$$

$$\Rightarrow M = \frac{146 \times 100 \times 100}{50 \times 80 \times 10} = 36.5 \text{ g.mol}^{-1}$$

می‌تونید برای حل این مسئله از روش کسر تناسب نیز استفاده کنید. فقط حواستون باشه که در این روش کسر مربوط به بازده درصدی باید در صورت کسر مواد واکنش‌دهنده ضرب شود.

یہ جو ریگہ



$$\frac{\frac{\text{جرم مولی} \times \text{درصد خلوص}}{100} \times \frac{\text{جرم ناخالص}}{100}}{H_r} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{HX} \Rightarrow \frac{10 \times \frac{80}{100} \times \frac{50}{100}}{1 \times \cancel{100}} = \frac{146}{\cancel{100} \times M}$$

$$\Rightarrow M = \frac{146 \times 2}{1} = 36 / 5 \text{ g.mol}^{-1}$$

گام دوم:

$$(HX \text{ جرم مولی}) M = 36/5 \Rightarrow X \text{ جرم مولی} = 36/5 - 1 = 35/5$$

بنابراین هالوژن مورد نظر ^{35}Cl ، با جرم مولی $35/5 \text{ g.mol}^{-1}$ است که در دوره سوم جدول قرار داشته و با فلز قلیایی ^{11}Na و فلز قلیایی خاکی ^{12}Mg ، هم دوره است.

کدام گزینه درست است؟ (A، B و X، عنصرهای فلزی اند.)

- (۱) اگر واکنش $A + FeO \rightarrow \dots$ انجام پذیر باشد، خارجی ترین زیرلایه الکترونی اشغال شده از الکترون در اتم عنصر A، به یقین دارای $l = 0$ است.
- (۲) اگر واکنش $B + XD \rightarrow BD + X$ انجام پذیر باشد، استخراج عنصر B از X دشوارتر است.
- (۳) واکنش کربن با سدیم اکسید، برخلاف واکنش کربن با مس (II) اکسید، انجام پذیر است.
- (۴) تأمین شرایط نگهداری عنصر هم گروه Ag_{47} که در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارد، از عنصر بعدی خود سخت تر است.

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) تعیین موقعیت یک عنصر در جدول تناوبی، بدون نوشتن آرایش الکترونی آن و با استفاده از گازهای نجیب:

بدون نوشتن آرایش الکترونی و با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب هم می توانیم شماره دوره و گروه عنصرها را تعیین کنیم.

الف) تعیین شماره دوره: گازهای نجیب با عددهای اتمی ۲، ۱۰، ۱۸، ۳۶، ۵۴، ۸۶ و ۱۱۸ به ترتیب در انتهای دوره های اول تا هفتم قرار دارند؛ بنابراین برای تعیین شماره دوره یک عنصر، کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قبل و بعد از آن قرار دهیم. شماره دوره عنصر با شماره دوره گاز نجیب با عدد اتمی بیشتر، یکسان است.

بازه عدد اتمی	۱ و ۲	۳ - ۱۰	۱۱ - ۱۸	۱۹ - ۳۶	۳۷ - ۵۴	۵۵ - ۸۶	۸۷ - ۱۱۸
شماره دوره عنصر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

ب) تعیین شماره گروه: برای تعیین شماره گروه، سه حالت پیش می آید:

(۱) اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، در این حالت شماره گروه برابر با تفاوت عدد اتمی عنصر با گاز نجیب دوره قبل است (شماره گروه برابر ۱ یا ۲ می باشد).

مثال عنصری با عدد اتمی ۱۹ متعلق به گروه ۱ و عنصری با عدد اتمی ۵۶ متعلق به گروه ۲ است.

$$X: 19 - 18 = 1 \quad \text{و} \quad Y: 56 - 54 = 2$$

آرگون زنون

(۲) عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهایی با عدد اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲) همگی به گروه ۳ تعلق دارند.

(۳) برای بقیه عنصرها که عدد اتمی آنها بیش از دو واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم دوره اش را از عدد ۱۸ کم کنیم تا شماره گروه به دست آید.

مثال

$$A_{23} \xrightarrow{23-18=5} \text{شماره گروه} = 18 - (36-23) = 5$$

گاز نجیب هم دوره

$$B_{17} \xrightarrow{17-10=7} \text{شماره گروه} = 18 - (18-17) = 17$$

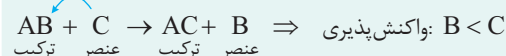
گاز نجیب هم دوره

$$C_{43} \xrightarrow{43-36=7} \text{شماره گروه} = 18 - (54-43) = 7$$

گاز نجیب هم دوره

(۲) مقایسه واکنش پذیری عنصرها:

در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می شود، واکنش پذیری فراورده ها از واکنش دهنده ها کم تر است؛ پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یک عنصر آزاد وجود داشته باشد و بگرن که این واکنش به طور طبیعی انجام می شه، ما خیلی سریع می توانیم واکنش پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم:



به طور کلی واکنش پذیری فلزهای دسته s (گروه ۱ و ۲) و فلز آلومینیم (از دسته p) از فلزهای واسطه بیشتر است.

همچنین واکنش پذیری فلزهای واسطه ای مانند آهن و روی از فلزهای واسطه ای مانند مس، نقره و طلا بیشتر می باشد. در ضمن واکنش پذیری کربن (C) از واکنش پذیری فلزهای گروه ۱، ۲ و آلومینیم، کم تر و از فلزهای واسطه بیشتر است. *فلاسه این که باید مقایسه کلی زیر رو بلد باشین:*

$\text{Al} > \text{C} > \text{Zn} > \text{Fe} > \text{Cu} > \text{Ag} > \text{Au}$ فلزهای گروه ۱ و ۲: واکنش پذیری

هر چه واکنش پذیری یک عنصر بیشتر باشد، تمایل آن به ایجاد ترکیب بیشتر بوده و ترکیب های آن پایدارترند، در نتیجه شرایط نگهداری عنصر سخت تر بوده و استخراج آن نیز سخت تر است.

واکنش پذیری کربن از سدیم کم تر است؛ بنابراین کربن با سدیم اکسید واکنش نمی دهد ولی واکنش پذیری کربن از مس بیشتر بوده و واکنش کربن با مس (II) اکسید انجام پذیر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

واکنش نمی دهد. $\text{Na}_2\text{O}(\text{s}) + \text{C}(\text{s}) \xrightarrow{\Delta}$

$2\text{CuO}(\text{s}) + \text{C}(\text{s}) \rightarrow 2\text{Cu}(\text{s}) + \text{CO}_2(\text{g})$

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): اگر واکنش $\text{A} + \text{FeO} \rightarrow \dots$ انجام پذیر باشد، واکنش پذیری A از Fe بیشتر بوده و A می تواند یکی از فلزهای قلیایی یا قلیایی خاکی، فلز Al، فلز Zn یا نافلز کربن (C) باشد. اگر A، Al یا C باشد، خارجی ترین زیرلایه اشغال شده در آنها به ترتیب زیرلایه ۳p و ۲p است که $l = 1$ دارند.

${}_{13}\text{Al}: [{}_{10}\text{Ne}] 3s^2 3p^1$ ، ${}_{6}\text{C}: [{}_{2}\text{He}] 2s^2 2p^2$

گزینه (۲): اگر واکنش $\text{B} + \text{XD} \rightarrow \text{BD} + \text{X}$ انجام پذیر نباشد، واکنش پذیری B از X کم تر بوده و بنابراین استخراج عنصر X از B دشوارتر است.

گزینه (۴): عدد اتمی Ag ۴۷، ۷ واحد از عدد اتمی گاز نجیب دوره پنجم جدول (Xe) ۸۴ کم تر بوده و بنابراین متعلق به گروه $18 - 7 = 11$ جدول است. عنصر گروه ۱۱ از دوره چهارم جدول تناوبی، همان فلز مس (Cu) ۲۹ است که واکنش پذیری کمتری نسبت به عنصر بعد از خود یعنی فلز روی (Zn) ۳۰ دارد، بنابراین تأمین شرایط نگهداری فلز Cu از فلز Zn آسان تر است نه سخت تر!

کدام گزینه دربارهٔ عنصر طلا (Au ۷۹) نادرست است؟

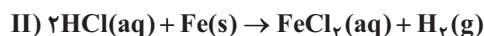
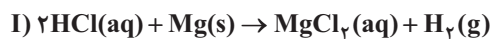
- (۱) به دلیل داشتن رسانایی الکتریکی بالا و حفظ آن در شرایط دمایی گوناگون، در ساخت قطعات الکترونیکی استفاده می‌شود.
- (۲) با گازهای نیتروژن و اکسیژن موجود در هوا واکنش نمی‌دهد و در صنایع الکترونیک نیز کاربرد دارد.
- (۳) مقدار آن در معادن طلا بسیار کم بوده و استخراج آن پسماند زیادی به همراه دارد.
- (۴) از چند گرم آن می‌توان صفحه‌ای به مساحت چند متر مربع تهیه کرد که حاکی از سختی بالا و چکش‌خواربودن آن است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

به علت چکش‌خواری و نرمی زیاد فلز طلا (نه سفتی بالای آن!) می‌توان چند گرم از آن را به صفحه‌ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به واکنش‌های زیر، اگر حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش یک گرم منیزیم ناخالص با هیدروکلریک اسید با حجم گاز هیدروژن حاصل از واکنش یک گرم آهن ناخالص با هیدروکلریک اسید برابر باشد، نسبت درصد خلوص آهن به منیزیم در نمونه‌های اولیه به تقریب چه قدر است؟ ($\text{Fe} = 56, \text{Mg} = 24: \text{g.mol}^{-1}$) و شرایط انجام واکنش‌ها را یکسان در نظر بگیرید.



۲ / ۳۳ (۴)

۱ / ۳۳ (۳)

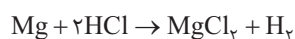
۱ / ۱۶ (۲)

۰ / ۴۳ (۱)

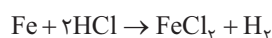
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که شرایط انجام واکنش‌ها یکسان است، برابری حجم گازها در دو واکنش به معنای برابری مول آن‌ها است. اگر درصد خلوص منیزیم و آهن را به ترتیب X و Y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$1 \text{ g Mg ناخالص} \times \frac{\text{خالص } x \text{ g Mg}}{100 \text{ g Mg ناخالص}} \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{24 \text{ g Mg}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{1 \text{ mol Mg}} = \frac{x}{2400} \text{ mol H}_2$$



$$1 \text{ g Fe ناخالص} \times \frac{\text{خالص } y \text{ g Fe}}{100 \text{ g Fe ناخالص}} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{56 \text{ g Fe}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{1 \text{ mol Fe}} = \frac{y}{5600} \text{ mol H}_2$$

شمار مول‌های H_2 تولیدشده در واکنش را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{x}{2400} = \frac{y}{5600} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\text{درصد خلوص آهن}}{\text{درصد خلوص منیزیم}} = \frac{56}{24} = \frac{y}{x} = \frac{7}{3} \approx 2/33$$

با توجه به این که ضریب H_2 در معادله دو واکنش با هم برابر است، می‌توانیم به طور مستقیم بین Mg و Fe تناسب برقرار کنیم:

$\text{Mg} \sim \text{Fe}$

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{Mg}} = \frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{Fe}} \Rightarrow \frac{1 \times \frac{x}{100}}{1 \times 24} = \frac{1 \times \frac{y}{100}}{1 \times 56} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3} \approx 2/33$$

په‌چور دیگه

کدام مورد درباره واکنش ترمیت نادرست است؟

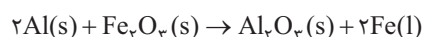


- (۱) عنصر فلزی تولیدشده در این واکنش، فلزی است که بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد.
- (۲) مجموع ضرایب استوکیومتری عناصر آزاد در معادله موازنه شده آن، دو برابر مجموع ضرایب استوکیومتری ترکیبها در آن است.
- (۳) یکی از ترکیبهای شرکت کننده در واکنش، برای تهیه رنگ قرمز در نقاشی استفاده می شود.
- (۴) کاتیون موجود در فرمول شیمیایی فراورده ها برخلاف کاتیون موجود در فرمول شیمیایی واکنش دهنده ها، به آرایش گاز نجیب رسیده است.

پاسخ: گزینه ۴

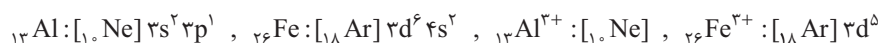
پاسخ خیلی تشریحی ✓

به واکنش آلومینیم با آهن (III) اکسید، واکنش ترمیت می گویند. فراورده این واکنش فلز آهن مذاب و آلومینیم اکسید جامد است.

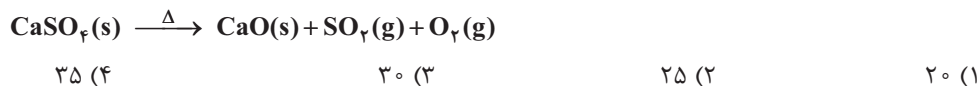


بررسی همه گزینه ها:

- گزینه (۱): عنصر Fe بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد. ✓
- گزینه (۲): در این واکنش، مجموع ضرایب عنصرها (Al, Fe) برابر ۴ و مجموع ضرایب ترکیبها (Al₂O₃, Fe₂O₃) برابر ۲ است. ۴ هم که ۲ برابر ۲ می شه. ✓
- گزینه (۳): آهن (III) اکسید (Fe₂O₃) به عنوان رنگ قرمز در نقاشی به کار می رود. ✓
- گزینه (۴): کاتیون موجود در فرمول شیمیایی فراورده ها، Al^{۳+} است که برخلاف کاتیون موجود در فرمول شیمیایی واکنش دهنده ها، یعنی Fe^{۳+}، به آرایش گاز نجیب رسیده است.



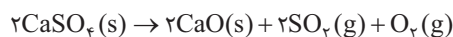
نمونه‌ای به جرم ۶۸ گرم کلسیم سولفات ناخالص بر اثر حرارت تجزیه می‌شود. اگر طی این فرایند جرم نمونه جامد موجود در ظرف واکنش به ۳۸ گرم کاهش یابد، درصد ناخالصی‌ها در نمونه اولیه کدام است؟ (ناخالصی‌ها در واکنش شرکت نمی‌کنند، معادله واکنش موازنه شود. $(Ca = 40, S = 32, O = 16 : g.mol^{-1})$)



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به معادله واکنش، میزان کاهش جرم ماده جامد با مجموع جرم گازهای تولیدشده برابر است؛ بنابراین مجموع جرم گازهای SO_2 و O_2 تولیدشده برابر است با:

$$68 - 38 = 30 \text{ g}$$

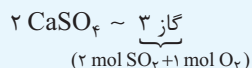
طبق معادله موازنه‌شده واکنش از تجزیه ۲ مول یا ۲۷۲ گرم $CaSO_4$ خالص، ۲ مول SO_2 (۱۲۸ g) و ۱ مول O_2 (۳۲ g) و در مجموع $128 + 32 = 160$ گرم گاز تولید می‌شود؛ یعنی به ازای تجزیه ۲۷۲ گرم $CaSO_4$ خالص، ۱۶۰ گرم کاهش جرم داریم؛ حالا باید حساب کنیم به ازای تجزیه چند گرم $CaSO_4$ خالص، ۳۰ گرم کاهش جرم خواهیم داشت:

$$\text{جرم } CaSO_4 \text{ خالص} = \frac{30 \text{ g کاهش جرم}}{160 \text{ g کاهش جرم}} \times 272 \text{ g } CaSO_4 = 51 \text{ g}$$

گام سوم: در ۶۸ گرم کلسیم سولفات ناخالص، ۵۱ گرم کلسیم سولفات و $68 - 51 = 17$ گرم ناخالصی وجود دارد؛ بنابراین درصد ناخالصی‌ها در این نمونه برابر است با:

$$\text{درصد ناخالصی‌ها} = \frac{\text{جرم ناخالصی‌ها}}{\text{جرم کلسیم سولفات ناخالص}} \times 100 = \frac{17}{68} \times 100 = 25\%$$

اگر درصد خلوص کلسیم سولفات را برابر P در نظر بگیریم، با استفاده از روش کسر تناسب خواهیم داشت:



در مسائل استوکیومتری واکنش، در مواردی که به جای جرم یک ماده، مجموع یا تفاوت جرم دو ماده، خواسته یا داده می‌شود، کسر تناسب مربوط به جرم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\text{مجموع جرم دو ماده}}{(\text{جرم مولی ماده ۱} \times \text{ضریب ماده ۱}) + (\text{جرم مولی ماده ۲} \times \text{ضریب ماده ۲})} \\ \frac{\text{تفاوت جرم دو ماده}}{(\text{جرم مولی ماده ۱} \times \text{ضریب ماده ۱}) - (\text{جرم مولی ماده ۲} \times \text{ضریب ماده ۲})} \end{cases}$$

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{مجموع جرم گازها}}{(\text{جرم مولی } SO_2 \times \text{ضریب } SO_2) + (\text{جرم مولی } O_2 \times \text{ضریب } O_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{68 \times \frac{P}{100}}{2 \times 136} = \frac{30}{(1 \times 32) + (2 \times 64)} \Rightarrow P = \frac{3 \times 4 \times 100}{16} = 75\%$$

درصد خلوص کلسیم سولفات ۷۵ درصد است؛ بنابراین درصد ناخالصی‌های آن، $100 - 75 = 25$ درصد می‌باشد.

په‌چور دیگه

اگر واکنش‌های (۱) و (۳) برخلاف واکنش‌های (۲) و (۴)، به‌طور طبیعی انجام نشوند، کدام مقایسه دربارهٔ واکنش‌پذیری عناصرها درست است؟



پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌Box

اگر واکنش‌پذیری عنصر A از B بیشتر باشد، عنصر A می‌تواند با نمک‌های B واکنش دهد:

انجام می‌شود. $A > B \Rightarrow A + B^{n+} \rightarrow$: واکنش‌پذیری

انجام نمی‌شود. $X < Y \Rightarrow X + Y^{m+} \rightarrow$: واکنش‌پذیری

واکنش‌های (۲) و (۴) نشان می‌دهند که X و E از D واکنش‌پذیری بیشتری دارند و توانسته‌اند D را از ترکیب‌هایش آزاد کنند.

واکنش (۱) نشان می‌دهد، E از X واکنش‌پذیری کم‌تری دارد و واکنش انجام نمی‌شود. واکنش (۳) هم نشان می‌دهد، A از D

واکنش‌پذیری کم‌تری دارد؛ بنابراین ترتیب واکنش‌پذیری این چهار عنصر به صورت زیر است:

واکنش‌پذیری: $X > E > D > A$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف) روش گیاه پالایی برای استخراج فلزها برخلاف روش استخراج فلز از سنگ معدن، آثار مخرب زیست‌محیطی ندارد.



ب) واکنش بی‌هوازی تخمیر گلوکز، از جمله واکنش‌هایی است که در فرایند تهیه سوخت سبز استفاده می‌شود.

پ) استخراج فلزهای طلا، مس و نیکل به کمک گیاه پالایی، صرفه اقتصادی ندارد.

ت) گاز حاصل از واکنش تخمیر بی‌هوازی گلوکز، از واکنش کلی انجام‌شده در شرکت‌های فولاد جهان برای استخراج

آهن نیز به دست می‌آید.

۴) ب - پ

۳) ب - ت

۲) الف - ت

۱) الف - ب

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

بررسی همه عبارت‌ها:

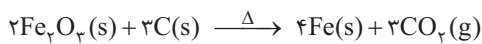
الف) در روش گیاه پالایی، حجم گیاه مصرفی و زمین زیر کشت برای استخراج فلزها زیاد است؛ بنابراین آثار زیست‌محیطی دارد. *

ب) سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود علاوه بر کربن و هیدروژن، اتم اکسیژن نیز داشته باشد. یکی از راه‌های تهیه سوخت سبز (مانند اتانول)، واکنش بی‌هوازی تخمیر گلوکز است:



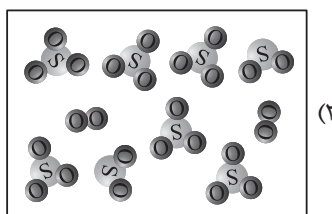
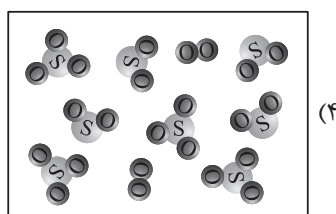
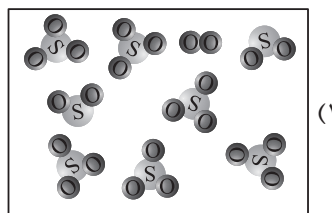
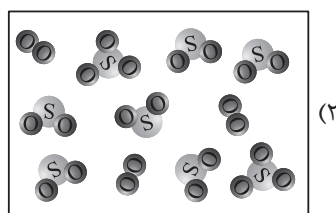
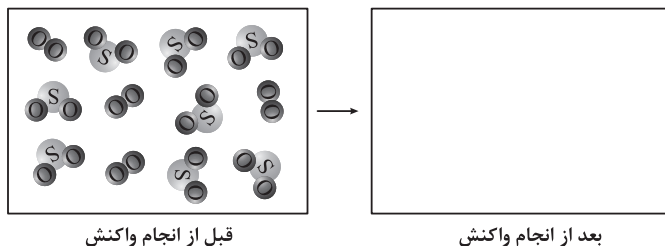
پ) استخراج فلزهای طلا و مس به روش گیاه پالایی، با توجه به قیمت و درصد بیشتر این فلزها در گیاه نسبت به سنگ معدن، صرفه اقتصادی دارد. *

ت) گاز حاصل از واکنش تخمیر بی‌هوازی گلوکز، CO_2 است. در واکنش اصلی انجام‌شده در شرکت‌های فولاد جهان برای استخراج آهن نیز، گاز CO_2 تولید می‌شود:



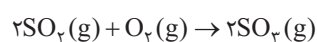
پاسخ خیلی تشریحی ✓

بر اثر واکنش گاز گوگرد دی اکسید با گاز اکسیژن، گاز گوگرد تری اکسید به دست می آید. اگر تصویر داده شده، مخلوط واکنش دهنده‌ها را قبل از انجام واکنش نشان دهد، با فرض این که بازده درصدی واکنش برابر با ۷۵٪ باشد، کدام گزینه شکل مولکول‌های موجود در ظرف را پس از انجام واکنش به درستی نشان می‌دهد؟ (فرض کنید دلیل ۱۰۰٪ نبودن بازده درصدی واکنش، مصرف نشدن همه واکنش دهنده‌ها است و هر ذره نشان داده شده در شکل، شمار مول‌های یکسانی را نشان می‌دهد.)



پاسخ: گزینه ۱

گام اول: ابتدا معادله موازنه شده واکنش را می‌نویسیم:



گام دوم: برای راحتی کار، فرض می‌کنیم هر ذره موجود در شکل، مقدار ۱ مول از هر ماده را نشان می‌دهد. با توجه به مقدار مول اولیه SO_2 یا O_2 ، مقدار مول نظری SO_3 را به دست می‌آوریم:

$$\text{mol SO}_3 = 8 \text{ mol SO}_2 \times \frac{2 \text{ mol SO}_3}{2 \text{ mol SO}_2} = 8 \text{ mol SO}_3$$

گام سوم: با توجه به بازده درصدی واکنش، مقدار عملی SO_3 و در نتیجه مقدار مول باقی‌مانده SO_2 و O_2 را به دست می‌آوریم:

$$\text{مقدار عملی} = \frac{\text{مقدار نظری}}{100} \times 100 \Rightarrow 75 = \frac{x}{8} \times 100 \Rightarrow (x = \text{مقدار عملی SO}_3) \Rightarrow x = \frac{75}{100} \times 8 = 6 \text{ mol SO}_3$$

پس شمار ذرات SO_3 بعد از انجام واکنش ۶ ذره است. با توجه به استوکیومتری واکنش برای تولید ۶ مول SO_3 در عمل باید ۶ مول SO_2 و ۳ مول O_2 مصرف شود؛ بنابراین شمار ذرات SO_2 و O_2 باقی‌مانده به ترتیب برابر با ۲ و ۱ و ۸-۶=۲ و ۴-۳=۱ است.



یا می‌توان نوشت:

مقدار مول اولیه	۸	۴	۰
تغییر مقدار	-۲x	-x	+۲x
مقدار نهایی	۸-۲x	۴-x	۲x

$$\Rightarrow (2x = 6 \text{ مقدار عملی SO}_3) \Rightarrow x = 3 \text{ mol}$$

$$\text{SO}_2 \text{ مقدار باقی‌مانده} = 8 - 2x = 8 - 2(3) = 2 \text{ mol (شکل ۲ ذره در شکل)}$$

$$\text{O}_2 \text{ مقدار باقی‌مانده} = 4 - x = 4 - 3 = 1 \text{ mol (شکل ۱ ذره در شکل)}$$