

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله هفتم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/آبان/۱۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره یک

پایه		دوازدهم	یازدهم	دهم
مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰	
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراح: محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن زاده - سروش موئینی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: سید محمدرضا حسینی فرد - محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: امیرحسین ابو محبوب	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی کارشناسان علمی: امیرحسین ابو محبوب - مریم نظری	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانیپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



۱- در کدام رابطه y تابعی از x است؟

$$(1) \quad |y-2| = |x-1| \quad (2) \quad (y-2)^3 = |x + \log_2 4|$$

$$(3) \quad |y| = x^2 + 4 \quad (4) \quad |y^3| = x - 5$$

۲- از یک قطعه مقوایی مربع شکل به طول ضلع ۱۶ می‌خواهیم یک جعبه در باز بسازیم. برای این منظور، از هر چهار گوشه این مقوا چهار مربع به طول ضلع x می‌بریم و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام یک از توابع زیر حجم جعبه را بر حسب x بیان می‌کند؟

$$(1) \quad V(x) = 2x(16-x)^2 \quad (2) \quad V(x) = x(16-x)^2$$

$$(3) \quad V(x) = x(16-x^2)^2 \quad (4) \quad V(x) = x(16-2x)^2$$

۳- به ازای x های مثبت، اگر $x^3 + \frac{1}{x^3} = f(x - \frac{1}{x})$ باشد، $f(\sqrt{2})$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

۴- در مجموعه اعداد حقیقی، تابع f ثابت و تابع g همانی است. اگر $f(2) = 3g(1)$ باشد، مقدار $\frac{(f \circ g)(x - [x])}{(f - g)(2)}$ کدام است؟
([]، نماد جزء صحیح است.)

$$(1) \quad -3 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad -2 \quad (4) \quad 2$$

۵- در تابع خطی f ، اگر $f(2) = 3$ و $f(-2) = -5$ باشد، مجموع اعداد طبیعی که در برد تابع $g(x) = \frac{3f(x) - 7}{f(x) - 3}$ با دامنه $D_g = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ قرار ندارند، کدام است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 6$$

۶- تعداد اعداد صحیح دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{2[x]-1}}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 3$$

۷- اگر دامنه و برد تابع f با ضابطه $f(x) = b\sqrt{(a-2)x + a^2 - 2a - 2} + b^2 - b$ به ترتیب بازه‌های $(-\infty, -3]$ و $[2, +\infty)$ باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

$$(1) \quad (4, -1) \quad (2) \quad (4, 2) \quad (3) \quad (1, -1) \quad (4) \quad (1, 2)$$

۸- نمودار وارون تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + 3x + a$ خط $2x - y - 1 = a$ را روی محور x قطع می‌کند. مقدار $f(a)$ کدام است؟

$$(1) \quad 5 \quad (2) \quad -5 \quad (3) \quad -4 \quad (4) \quad 4$$

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & ; x \leq -1 \\ x+2 & ; x > -1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & ; f(x) < 0 \\ 2x-6 & ; f(x) \geq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $(fog)(-1)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۶ (۳) -۱ (۴) -۱۰

۱۰- اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، به ازای $x \geq 1$ کدام گزینه نادرست است؟

$$(gof)(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (۱)$$

$$(fog)(x) = x - 1 \quad (۲)$$

$$(fof)(x) = x^4 - 2x^2 \quad (۳)$$

$$(gog)(x) = \sqrt{x^4} \quad (۴)$$

۱۱- نمودار تابع خطی f با عرض از مبدأ ۲ بر نمودار تابع f^{-1} منطبق است. اگر $g(x) = 2x + 3$ باشد، با کدام انتقال، نمودار gof را می‌توان به نمودار تابع fog تبدیل کرد؟

(۱) ۸ واحد به راست (۲) ۴ واحد به راست (۳) ۸ واحد به چپ (۴) ۴ واحد به چپ

۱۲- نقطه $A(2, a)$ روی نمودار تابع f و نقطه $A'(4, b)$ متناظر با نقطه A روی نمودار تابع وارون g با ضابطه

$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{قرار دارد. حاصل } a + b \text{ کدام است؟}$$

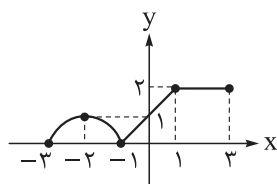
(۱) $\frac{26}{3}$ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) $\frac{24}{5}$

۱۳- کدام تابع روی بازه $(\frac{3}{4}, +\infty)$ وارون پذیر نیست؟

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (۱) \quad g(x) = 5x - x^2 \quad (۲)$$

$$h(x) = \frac{x-2}{|x-1|} \quad (۳) \quad k(x) = x^3 - 3x + 1 \quad (۴)$$

۱۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر D_g و R_g به ترتیب دامنه و برد تابع g با ضابطه $g(x) = 3f\left(\frac{x}{3}\right) + 1$ باشند، حاصل $D_g \cap R_g$ کدام است؟



(۱) $[1, \frac{3}{4}]$ (۲) $[1, 6]$

(۳) $[0, \frac{3}{4}]$ (۴) $[0, 6]$

۱۵- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در راستای محور x ، دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار تابع g^{-1} از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

$$16- \text{تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} 2x+6 & ; x \leq -1 \\ x+2 & ; x > -1 \end{cases} \text{ مفروض است. اگر تابع } g \text{ با ضابطه } g(x) = \begin{cases} x+2 & ; f(x) < 0 \\ 2x+a & ; f(x) \geq 0 \end{cases}$$

صعودی باشد، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

$$17- \text{تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = 4^{x+a^2} - 2^{2x+1} \text{ نزولی است. اختلاف کم‌ترین و بیشترین مقدار قابل قبول برای } a \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

$$18- \text{چندجمله‌ای } P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2 \text{ بر } x-1 \text{ بخش پذیر است. اگر باقی مانده تقسیم } P(x) \text{ بر } x+2 \text{ برابر } -1$$

باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) $5/2$ (۲) $5/4$ (۳) $5/6$ (۴) $5/8$

۱۹- اگر A ماتریسی 3×3 باشد به طوری که $|A| = \frac{1}{4}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $4A$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳۲ (۴)

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه بزرگ ترین درایه ماتریس $A^{10} + (A - I)^3$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۶ (۴)

۲۱- دستگاه $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ مفروض است. اگر A ماتریس ضرایب این دستگاه و B ماتریس مقادیر معلوم آن باشد، مجموع درایه های ماتریس $B \cdot (A + 7A^{-1})$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴)

۲۲- اگر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایه سطر اول، ستون دوم ماتریس A کدام است؟

- ۲/۳ (۱) ۱/۴ (۲) -۱/۴ (۳) -۲/۳ (۴)

۲۳- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} ij - a_{ij} & ; i > j \\ 1 & ; i \leq j \end{cases}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $I + A$ کدام است؟

- ۱/۵ (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴)

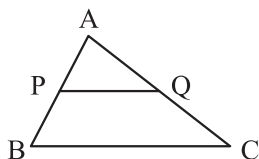
۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 0/5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0/2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 0/9 & 10 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A^T B$ کدام است؟

- ۲/۴ (۱) -۲/۴ (۲) ۱/۲ (۳) -۱/۲ (۴)

۲۵- در مثلث ABC با اضلاع $a = 3$ و $b = 6$ ، اگر $2h_a + h_b = 3h_c$ باشد، آن گاه محیط مثلث کدام است؟ (h_a ارتفاع وارد بر ضلع $a = BC$ است.)

- ۱۱/۸ (۱) ۱۲/۶ (۲) ۱۲/۸ (۳) ۱۳/۲ (۴)

۲۶- در شکل روبه رو PQ با BC موازی است. حاصل $\frac{3BP - 2CQ}{3AP - 2AQ}$ کدام است؟



$$\frac{PQ}{BC} \quad (۲)$$

$$\frac{BC}{PQ} - 1 \quad (۴)$$

$$\frac{BC}{PQ} \quad (۱)$$

$$\frac{3PQ}{2BC} \quad (۳)$$

۲۷- در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $AB < A'B'$ و نسبت مساحت آن‌ها $\frac{25}{64}$ است.

اگر M و M' به ترتیب وسط‌های BC و $B'C'$ باشند، نسبت $\frac{A'M'}{AM}$ کدام است؟

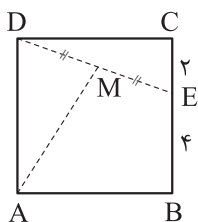
$\frac{5}{4} \quad (4)$

$3/2 \quad (3)$

$\frac{5}{8} \quad (2)$

$1/6 \quad (1)$

۲۸- در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ مربع و M وسط DE است. طول AM کدام است؟



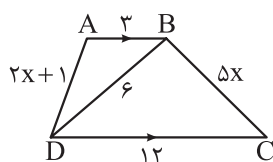
$\sqrt{34} \quad (1)$

$\sqrt{30} \quad (2)$

$3\sqrt{2} \quad (3)$

$2\sqrt{5} \quad (4)$

۲۹- محیط دوزنقه در شکل مقابل کدام است؟



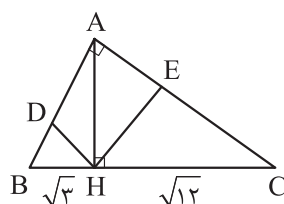
$25 \quad (2)$

$18 \quad (1)$

$20 \quad (4)$

$30 \quad (3)$

۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل، AH ارتفاع وارد بر وتر، DH نیمساز زاویه AHB و EH نیمساز زاویه AHC است. نسبت $\frac{EH}{DH}$ برابر با کدام است؟



$\sqrt{3} \quad (2)$

$2 \quad (1)$

$\frac{4}{3} \quad (4)$

$\sqrt{2} \quad (3)$

۳۱- برای اثبات درستی گزاره «حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ است»، از کدام هم‌ارزی استفاده می‌کنیم؟

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge (p_3 \Rightarrow r) \quad (۱)$$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \vee (p_2 \Rightarrow r) \vee (p_3 \Rightarrow r) \quad (۲)$$

$$p_1 \wedge p_2 \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \vee (p_2 \Rightarrow r) \quad (۳)$$

$$p_1 \vee p_2 \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \quad (۴)$$

۳۲- دو عدد $۶k+۱$ و $۱۳k+۳$ هر دو بر عدد طبیعی $a > ۱$ بخش پذیرند. اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، p به کدام صورت ممکن است باشد؟

$$(a+۱)n+a \quad (۱)$$

$$(a+۱)n+a-۲ \quad (۳)$$

$$(a+۱)n+a-۱ \quad (۴)$$

۳۳- باقی‌مانده تقسیم عدد m بر دو عدد ۵ و ۷ به ترتیب برابر ۱ و ۳ است. کدام گزینه در مورد باقی‌مانده تقسیم عدد m بر ۳۵ درست است؟

$$(۱) \text{ اول است} \quad (۲) \text{ مضرب ۳ است.}$$

$$(۳) \text{ مربع کامل است.} \quad (۴) \text{ یکرقمی است.}$$

۳۴- اگر $a \mid b$, $۲a \mid c^۲$, $b^۲ \mid c^۲$ حاصل $[(a^۳, a^۵), (b, (c^۳, a))]$ کدام است؟

$$(۱) \mid b \mid^۲ \quad (۲) \mid c \mid^۳$$

$$(۳) \mid a \mid^۳ \quad (۴) \mid a \mid$$

۳۵- اگر $x+y=۱۳$ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $x^۳+y^۳$ بر ۱۲ چه مقداری ممکن است داشته باشد؟

$$(۱) \text{ فقط ۱} \quad (۲) ۱ \text{ یا } ۷ \quad (۳) ۲ \text{ یا } ۷ \quad (۴) ۱ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۷$$

۳۶- اگر $(a+b)(a+c)(a+b+c)$ عددی فرد باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $a^۲+b^۲+c^۲+۲b+۲c$ بر ۸ کدام است؟

$$(۱) \text{ صفر} \quad (۲) ۳$$

$$(۳) ۱ \quad (۴) \text{ ممکن است هر کدام از اعداد } ۰, ۱, ۳ \text{ باشد.}$$

۳۷- تعداد زیرمجموعه‌های A ، ۲۸ تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ بوده و تعداد زیرمجموعه‌های B نیز ۱۲ تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ است. تعداد زیرمجموعه‌های $A - B$ چند تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $B - A$ است؟

$$(۱) ۱۴ \quad (۲) ۶ \quad (۳) ۱۲ \quad (۴) ۴$$

۳۸- A و B دو مجموعهٔ ناتهی هستند که $A \times B = B \times A$. اگر مجموعه‌های X و Y به گونه‌ای باشند که $Y - X \subseteq A$ و $Y - X \subseteq B'$ ، کدام گزاره درست است؟ (U مجموعهٔ مرجع است).

$$(1) \forall x; (x \in Y \Rightarrow x \in X)$$

$$(2) \forall x; (x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

$$(3) \exists x \in U; x \in A - B$$

(۴) گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر سه درست هستند.

۳۹- بین ۳ مجموعهٔ A ، B و C رابطهٔ $A - B \subseteq C$ برقرار است. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

$$(1) A \cap C \subseteq B$$

$$(2) A - C \subseteq B$$

$$(3) C - A \subseteq B$$

$$(4) A \cap B \subseteq C$$

۴۰- $A \times B$ مجموعه‌ای ۶ عضوی بوده و $(1, 3)$ و $(3, 4)$ دو عضو آن هستند. زوج مرتب حتماً عضو $A \times B$ بوده و زوج مرتب قطعاً عضو $A \times B$ نیست.

$$(1) (2, 3) - (1, 4)$$

$$(2) (1, 2) - (1, 4)$$

$$(3) (2, 1) - (3, 3)$$

$$(4) (3, 2) - (3, 3)$$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۲:۳۰ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله هفتم

پایه دوازدهم

۱۶/ آبان/ ۱۴۰۴

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره دو

پایه						
مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۱ صفحه ۱ تا ۲۸	—
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۱ صفحه ۱ تا ۳۶	—
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه	—	

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: رضا سبزمیدانی - نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: سروش عبادی - یاسر عبداللہی - آرمین عظیمی - محمد قهرمانی نژاد امیرحسین مسلمی - مرتضی نصیرزاده کارشناس علمی: مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللہی - سروش عبادی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

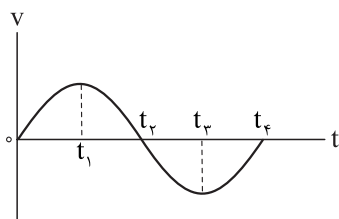
این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.

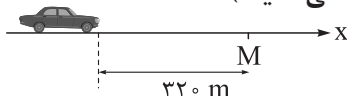


۴۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام یک از موارد زیر درباره این متحرک درست است؟



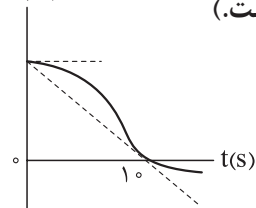
- (۱) در بازه زمانی صفر تا t_2 ، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است.
- (۲) در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، اندازه شتاب متحرک کاهش یافته است.
- (۳) در بازه زمانی t_3 تا t_4 ، شتاب متحرک پیوسته در خلاف جهت محور x است.
- (۴) در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

۴۲- در شکل زیر، خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت ثابت 30 km/h در حال حرکت است. مدت چند دقیقه فاصله خودرو از نقطه M کم‌تر یا مساوی 150 m است؟ (در محاسبات از طول خودرو چشم‌پوشی کنید.)



- (۱) $3/0$
- (۲) $6/0$
- (۳) 18
- (۴) 36

۴۳- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در 10 ثانیه اول اندازه سرعت متوسط متحرک برابر 4 m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در همین مدت در SI کدام است؟ (در شکل خط چین افقی مماس بر نمودار در لحظه $t_1 = 0$ و خط چین مایل، مماس بر نمودار در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ است.)



- (۱) $2\vec{i}/0$
- (۲) $2\vec{i}/0$
- (۳) $4\vec{i}/0$
- (۴) $4\vec{i}/0$

۴۴- متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند. اگر تندی متحرک در مکان‌های $x_1 = 3 \text{ m}$ و $x_2 = -9 \text{ m}$ به ترتیب برابر 16 m/s و 20 m/s باشد، شتاب متحرک در SI کدام است؟

- (۱) $6\vec{i}$
- (۲) $-6\vec{i}$
- (۳) $12\vec{i}$
- (۴) $-12\vec{i}$

۴۵- معادله سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t - 6$ است. سرعت متوسط متحرک در $5/0$ ثانیه پنجم چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $3\vec{i}$
- (۲) $-3\vec{i}$
- (۳) $4\vec{i}$
- (۴) $-4\vec{i}$

۴۶- تندی خودرویی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در هر دو لحظه $t_1 = 4 \text{ s}$ و $t_2 = 8 \text{ s}$ برابر 6 m/s است. اگر شتاب متحرک در جهت محور x باشد، سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $36\vec{i}$
- (۲) $-36\vec{i}$
- (۳) $18\vec{i}$
- (۴) $-18\vec{i}$

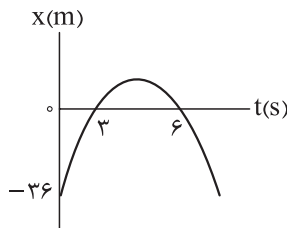
۴۷- معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 6t + 11$ است. در بازه‌ای که سرعت متحرک از 2 m/s به -6 m/s می‌رسد، جابه‌جایی متحرک بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $-4\vec{i}$
- (۲) $-8\vec{i}$
- (۳) $4\vec{i}$
- (۴) $8\vec{i}$

۴۸- خودرویی در مسیر مستقیم با تندی 90 km/h در حال حرکت است. در لحظه‌ای، راننده خودرو ترمز می‌گیرد و تندی خودرو با شتاب ثابت کاهش می‌یابد و خودرو پس از طی مسافت 75 m متوقف می‌شود. اندازه جابه‌جایی خودرو در ۲ ثانیه آخر حرکت آن چند متر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) $12/5$ (۳) $\frac{50}{3}$ (۴) $\frac{25}{3}$

۴۹- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این متحرک در ۴ ثانیه دوم چند متر بر ثانیه است؟

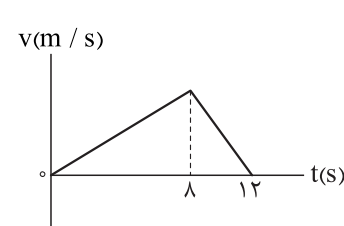


- (۱) ۳ (۲) $3/125$ (۳) ۶ (۴) $6/25$

۵۰- جهت حرکت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه $t = 4 \text{ s}$ تغییر می‌کند. اندازه جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیه اول، چند برابر مسافت طی شده توسط آن در ۳ ثانیه دوم است؟

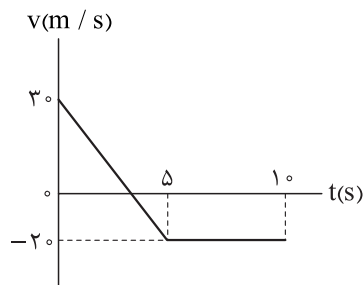
- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) $\frac{17}{3}$ (۴) $\frac{17}{5}$

۵۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 9 \text{ s}$ برابر 25 m/s^2 باشد، بیشینه تندی متحرک چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

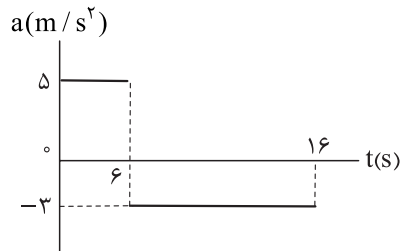
۵۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) $7/5$ (۲) ۱۶ (۳) $16/5$ (۴) ۲۳

۵۳- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در امتداد محور x و از حال سکون شروع به حرکت می کند، به شکل زیر است.

مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 6\text{ s}$ تا $t_2 = 16\text{ s}$ برابر چند متر است؟



(۱) ۱۵۰

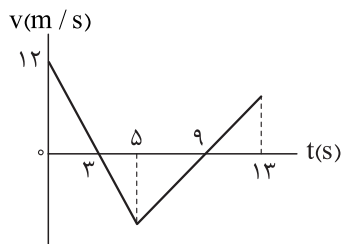
(۲) ۲۴۰

(۳) ۳۰۰

(۴) ۴۸۰

۵۴- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی $t_1 = 0$

تا $t_2 = 12\text{ s}$ مسافت طی شده توسط متحرک، چند برابر اندازه جابه جایی آن است؟



(۱) ۵/۸

(۲) ۶/۸

(۳) ۱۶

(۴) ۱۷

۵۵- متحرکی روی محور x در مبدأ زمان در خلاف جهت محور x از حال سکون شروع به حرکت می کند و به مدت 20 s

با شتاب ثابت a_1 به حرکت خود ادامه می دهد. در 10 ثانیه بعدی با شتاب ثابت a_2 تندی خود را کاهش می دهد تا متوقف

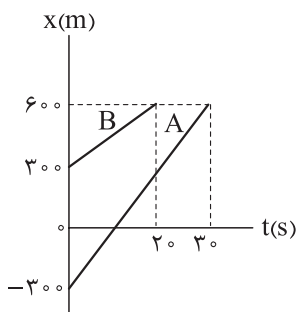
شود. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در این 30 s برابر 360 m باشد، شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 5\text{ s}$

تا $t_2 = 25\text{ s}$ در SI کدام است؟

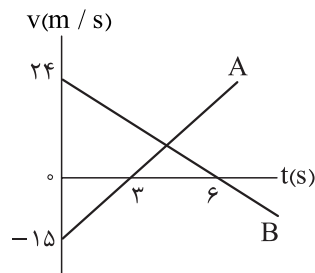
(۴) $-0.6\vec{i}$ (۳) $-0.3\vec{i}$ (۲) $0.6\vec{i}$ (۱) $0.3\vec{i}$

۵۶- شکل زیر بخشی از نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B را نشان می دهد که در راستای محور x حرکت می کنند.

فاصله دو متحرک در لحظه $t = 15\text{ s}$ چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t = 10\text{ s}$ است؟

(۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۷- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند به شکل زیر است. اگر جهت حرکت دو متحرک A و B به ترتیب در مکان های $x_1 = -20 \text{ m}$ و $x_2 = 20 \text{ m}$ تغییر کند، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ چند متر است؟



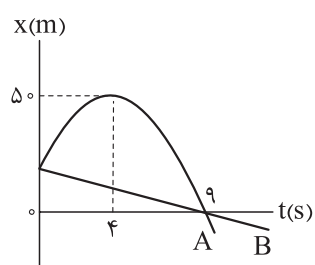
(۱) ۲۸

(۲) ۳۲

(۳) ۴۸

(۴) ۵۲

۵۸- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. اگر شتاب متحرک A، ثابت باشد، در لحظه ای که سرعت دو متحرک برابر است، فاصله متحرک A از مبدأ مکان چند برابر فاصله متحرک B از مبدأ مکان است؟



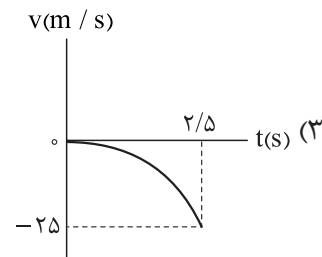
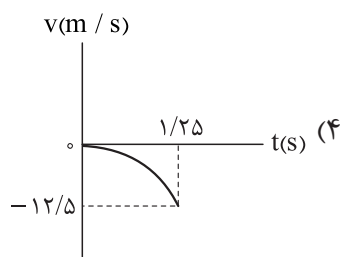
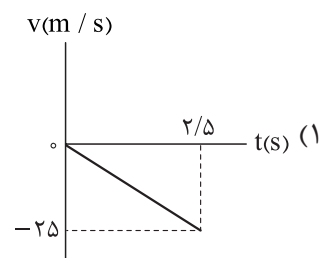
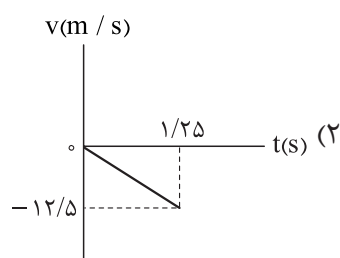
(۱) ۵

(۲) ۵ / ۵

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

۵۹- در شرایط خلأ، گلوله ای از ارتفاع $31/25$ متری سطح زمین رها می شود. نمودار سرعت - زمان گلوله از لحظه رها شدن آن تا لحظه برخورد به سطح زمین، کدام است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



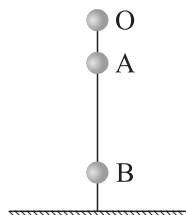
۶۰- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها شده و ۴ s بعد به زمین برخورد می‌کند. تندی گلوله در نیمه راه چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) $10\sqrt{2}$ (۲) ۲۰ (۳) $20\sqrt{2}$ (۴) ۴۰

۶۱- گلوله‌ای از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ۲ ثانیه آخر حرکت خود قبل از رسیدن به سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۶۲- در شکل زیر، گلوله‌ای از نقطه O رها می‌شود و در مدت ۲/۴ s از نقطه A به نقطه B می‌رسد. اگر فاصله دو نقطه A و B برابر ۶۰ m باشد، فاصله دو نقطه O و A برابر چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



- (۱) ۸/۴۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۶/۹ (۴) ۲۶

۶۳- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک نقطه از ارتفاع نسبتاً زیاد رها می‌شود. وقتی این گلوله مسافت ۱۰ m را طی می‌کند، گلوله دیگری از همان نقطه رها می‌شود. بعد از رها شدن گلوله دوم تا رسیدن گلوله اول به زمین، فاصله بین دو گلوله چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 9/8 \text{ m/s}^2$)

- (۱) در هر ثانیه ۱۴ متر افزایش می‌یابد. (۲) در هر ثانیه ۷ متر افزایش می‌یابد. (۳) در هر ثانیه ۱۴ متر کاهش می‌یابد. (۴) در هر ثانیه ۷ متر کاهش می‌یابد.

۶۴- جسمی به جرم ۶ kg به اندازه ۵ m در جهت محور y جابه‌جا می‌شود. کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F} = (6 \text{ N})\vec{i} - (8 \text{ N})\vec{j}$ که در طی این حرکت به جسم وارد می‌شود، چند ژول است؟

- (۱) ۳۰ (۲) -۳۰ (۳) ۴۰ (۴) -۴۰

۶۵- خودرویی به جرم ۸۰۰ kg با تندی v در حال حرکت است. اگر تندی خودرو ۱۸ km/h افزایش یابد، انرژی جنبشی آن ۹۰ kJ تغییر می‌کند. v برابر با چند کیلومتر بر ساعت است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۷۲ (۴) ۹۰

۶۶- جسمی با تندی ثابت از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شود. اگر در این جابه‌جایی انرژی پتانسیل گرانشی جسم از J ۲۰۰ به J ۳۰۰ برسد، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن وارد بر جسم و کار کل انجام‌شده روی جسم به ترتیب از راست به چپ چند ژول است؟

- (۱) ۱۰۰، ۱۰۰ (۲) ۱۰۰، صفر (۳) -۱۰۰، ۱۰۰ (۴) -۱۰۰، صفر

۶۷- معادله مکان-زمان متحرکی به جرم 5 kg که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = \frac{3}{2}t^2 - 5t + 9$ است. کار کل انجام شده روی متحرک در ۲ ثانیه دوم، چند ژول است؟

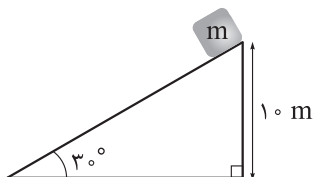
(۴) ۲۴۰

(۳) ۱۸۰

(۲) ۱۲۰

(۱) ۹۰

۶۸- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $m = 2 \text{ kg}$ از بالای سطح شیب دار به پایین سطح می لغزد. اگر بزرگی نیروی اصطکاک در این مسیر $\frac{1}{4}$ بزرگی وزن جسم باشد، در این جابه جایی، انرژی جنبشی جسم چند ژول و چگونه تغییر می کند؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



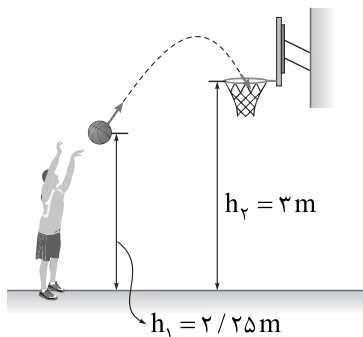
(۱) ۱۰۰، افزایش می یابد.

(۲) ۳۰۰، کاهش می یابد.

(۳) ۱۰۰، کاهش می یابد.

(۴) ۳۰۰، افزایش می یابد.

۶۹- در شکل زیر، ورزشکار توپ را با تندی چند متر بر ثانیه پرتاب کند، تا توپ با تندی 5 m/s وارد دهانه سبد شود؟

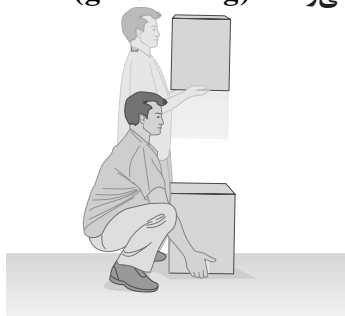
($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

(۱) $\sqrt{10}$

(۲) $2\sqrt{10}$

(۳) ۶

(۴) ۸

۷۰- در شکل زیر، شخصی با وارد کردن نیروی ثابت 90 N ، جعبه ای ساکن به جرم 5 kg از سطح زمین در راستای قائم جابه جا می کند. تندی جعبه در ارتفاع $1/5 \text{ m}$ از سطح زمین به چند متر بر ثانیه می رسد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)


(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{6}$

(۳) ۳

(۴) ۶

۷۱- خودرویی به جرم 1500 kg در یک مسیر افقی، در مدت 8 s تندی خود را از 54 km/h به 90 km/h می‌رساند.

توان متوسط خودرو برای انجام این کار حداقل چند اسب بخار است؟ ($1 \text{ hp} = 750 \text{ W}$)

$$\frac{12}{5} \quad (1) \quad 50 \quad (2)$$

$$125 \quad (3) \quad 500 \quad (4)$$

۷۲- تلمبه‌ای با توان ورودی 8 kW در هر دقیقه 900 L از آب دریاچه‌ای به چگالی 1 g/cm^3 را به اندازه 16 m در

راستای قائم بالا آورده و آن را با تندی 4 m/s وارد یک مخزن می‌کند. بازده تلمبه چند درصد است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$28/5 \quad (1) \quad 30 \quad (2)$$

$$31/5 \quad (3) \quad 33 \quad (4)$$

۷۳- شخصی به جرم 60 kg از ارتفاع $8/4$ متری سطح زمین و از حال سکون روی تشک بزرگی به ضخامت 2 m

سقوط می‌کند. اگر در حین برخورد شخص به تشک حداقل ضخامت تشک به 1 m برسد، اندازه نیروی وارد بر شخص

از طرف تشک، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)، مقاومت هوا ناچیز و حرکت شخص همواره در

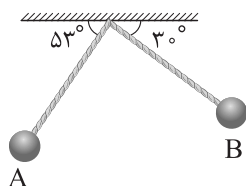
راستای قائم است.)

$$2640 \quad (1) \quad 3240 \quad (2) \quad 3840 \quad (3) \quad 4440 \quad (4)$$

۷۴- در شکل زیر، وزنه‌ای را به نخ بسته و از سقف آویزان کرده‌ایم. وزنه را روی دایره‌ای به شعاع n از حالت قائم

آن قدر دور می‌کنیم که زاویه نخ با راستای قائم 90° درجه شود و از این حالت وزنه را رها می‌کنیم. تندی وزنه در نقطه A

چند برابر تندی آن در نقطه B است؟ ($\sin 53^\circ = 4/5$ و $g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا و جرم نخ ناچیز است.)



$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{4} \quad (3) \quad \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad (4)$$

۷۵- جسمی از سطح زمین با تندی 12 m/s در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر در برگشت، جسم با تندی 6 m/s

به سطح زمین برخورد کند، اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم، با فرض ثابت بودن در طی مسیر، چند برابر اندازه

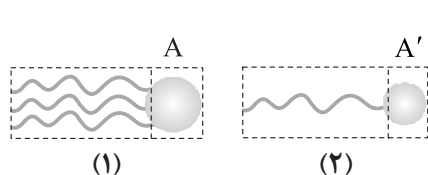
وزن جسم است؟

$$\frac{2}{5} \quad (1) \quad \frac{3}{5} \quad (2) \quad \frac{4}{5} \quad (3) \quad \frac{6}{5} \quad (4)$$

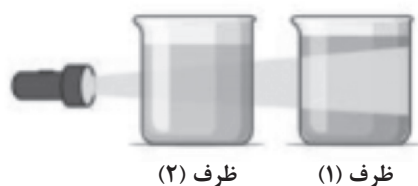
محل انجام محاسبات

۷۶- کدام مورد درست است؟

- (۱) در واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گاز هیدروژن تولید می‌شود و گرما از محیط به سامانه انتقال می‌یابد.
 - (۲) کاغذ pH در محلول‌های جوش شیرین و اتیلن گلیکول در آب، به رنگ آبی درمی‌آید.
 - (۳) اگر به جای گروه‌های NH_2 در اوره، گروه‌های CH_3 قرار گیرد، ماده‌ای به دست می‌آید که به هر نسبت در آب حل می‌شود.
 - (۴) وازلین با فرمول مولکولی $\text{C}_{18}\text{H}_{38}$ ، ناقطبی بوده و در هگزان به خوبی حل می‌شود.
- ۷۷- با توجه به شکل‌های زیر که الگویی برای نمایش یک مولکول اسید چرب و یک استر سنگین است، کدام مورد نادرست است؟



- (۱) هر دو ترکیب، از اجزای سازنده چربی‌ها بوده و بخش‌های A و A' در آن‌ها، به ترتیب دارای گروه‌های عاملی استری و کربوکسیل هستند.
 - (۲) هر دو ترکیب، دارای بخش‌های قطبی و ناقطبی بوده و نیروی بین مولکولی غالب در هر دو آن‌ها از نوع وان‌دروالسی است.
 - (۳) در ساختار هر مولکول از ترکیب (۱)، ۶ پیوند $\text{C}-\text{O}$ وجود دارد.
 - (۴) هر دو ترکیب، توانایی واکنش با محلول سود را دارند و فرآورده این واکنش‌ها، آب و نمک اسید چرب است.
- ۷۸- با توجه به شکل زیر که مربوط به مقایسه رفتار نور در کلوئیدها و محلول‌ها است، درستی یا نادرستی کدام گزینه با بقیه گزینه‌ها تفاوت دارد؟



- (۱) هر دو مخلوط، پایدار هستند و با گذشت زمان، ذرات سازنده آن‌ها ته‌نشین نمی‌شود.
 - (۲) مخلوط (۱) همانند سوسپانسیون‌ها، ناهمگن به شمار می‌آید.
 - (۳) مخلوط اتانول و آب از نوع (۲) و شیر از نوع (۱) است.
 - (۴) ذرات حل‌شده در مخلوط (۱)، توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت هستند.
- ۷۹- کدام مورد درست است؟

- (۱) صابون مراغه به دلیل خاصیت بازی و افزودنی‌های مناسب مانند گوگرد و کلر، خاصیت لکه‌بری و پاک‌کنندگی خوبی دارد.
- (۲) برای از بین بردن رسوب تشکیل‌شده در دیگ‌های بخار و لوله‌ها، باید از پاک‌کننده‌های غیرصابونی استفاده کرد.
- (۳) از واکنش هر مول اسید $\text{C}_7\text{H}_7\text{COOH}$ با مقدار کافی پتاسیم هیدروکسید، یک مول صابون مایع با قدرت پاک‌کنندگی بالا تولید می‌شود.
- (۴) پیش از توصیف علمی اسیدها و بازها توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با برخی از واکنش‌های میان این مواد آشنا بودند.

۸۰- اگر یک پاک کننده صابونی مایع در زنجیر آلکیل خود (R)، دارای ۱۳ پیوند کربن - کربن باشد و $103/6$ گرم از آن با مقدار کافی منیزیم کلرید واکنش دهد، جرم رسوب تشکیل شده چند گرم خواهد بود و اختلاف شمار اتم های کربن و هیدروژن در فرمول شیمیایی این پاک کننده کدام است؟ (در ساختار پاک کننده، یون فلزی وجود ندارد.)

($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Mg = 24 : g.mol^{-1}$)

(۱) $18 - 96/4$ (۲) $18 - 101/2$ (۳) $14 - 96/4$ (۴) $14 - 101/2$

۸۱- یک مول از هر کدام از ترکیب های Li_2O, N_2O_5 و BaO ، در ظرف هایی جداگانه به 10 لیتر آب افزوده می شود. کدام مورد درست است؟ (از تغییر حجم آب صرف نظر کنید.)

(۱) رسانایی الکتریکی محلول دی نیتروژن پنتا اکسید از محلول لیتیم اکسید، بیشتر است.

(۲) مدل آرنیوس می تواند تفاوت رنگ کاغذ pH در محلول های دی نیتروژن پنتا اکسید و باریم اکسید را توجیه کند.

(۳) با یونش لیتیم اکسید در آب، $23 \times 10^{-8} / 24$ یون در محلول ایجاد می شود.

(۴) مدل فضا پرکن آنیون نیتروژن دار موجود در محلول دی نیتروژن پنتا اکسید، مشابه یون سولفات است.

۸۲- اگر ثابت یونش نوعی اسید ضعیف HA در دمای اتاق برابر 8×10^{-5} باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول $2/3$ گرم بر لیتر آن، به تقریب کدام است و چنان چه غلظت اولیه محلول را با افزودن اسید به $2/0$ مولار برسانیم، درجه یونش اسید به تقریب چند درصد تغییر می کند؟ ($HA = 46 g.mol^{-1}$)

(۱) $50 - 0/002$ کاهش (۲) $50 - 0/002$ افزایش

(۳) $50 - 0/04$ کاهش (۴) $50 - 0/04$ افزایش

۸۳- در دمای $25^\circ C$ ، pH محلول $0/1$ مولار کدام اسید در آب بیشتر است؟

(۱) هیدرویدیک اسید (۲) نیترواسید (۳) هیدروفلوئوریک اسید (۴) نیتریک اسید

۸۴- اگر محلولی یک لیتری از دو اسید هیدروسیانیک اسید (I) و فورمیک اسید (II) با غلظت یک مولار در دمای یکسان داشته باشیم، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)

(الف) رسانایی محلول (I) از (II) کم تر و تفاوت جرم آنیون حاصل از آن ها برابر 19 گرم است.

(ب) ثابت یونش محلول هر دو اسید از ثابت یونش استیک اسید، بیشتر است.

(پ) سرعت واکنش فلز سدیم در ظرف (II) از ظرف (I) بیشتر اما حجم گاز تولیدی در دو ظرف در پایان واکنش برابر است.

(ت) اگر در دمای $25^\circ C$ ، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول (II)، $2/5$ برابر محلول (I) باشد، pH محلول (II)،

$4/0$ واحد کم تر از محلول (I) است.

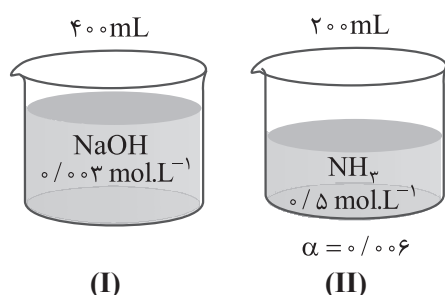
(۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۸۵- اگر ثابت یونش اسید HA، نصف ثابت یونش اسید HB و درصد یونش محلول ۱ مولار HB، ۲۰٪ باشد، درصد یونش محلول ۰/۱۵ مولار HA کدام است؟

- ۶۶ (۱) ۳۳ (۲) ۲۵ (۳) ۵۰ (۴)

۸۶- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) از واکنش ۱ لیتر محلول مولار سود با ۱ لیتر محلول مولار جوهرنمک، محلول آب‌نمک با غلظت ۱ مولار تولید می‌شود.
 (۲) محلولی از نیتریک اسید با $\text{pH} = 0$ ، همانند یک نمونه آب خالص، دارای یون هیدروکسید است.
 (۳) اگر برای محلول ۳ مولار یک اسید، pH در گستره صفر تا ۷ قرار گیرد، آن اسید از هیدروبرمیک اسید، ضعیف‌تر است.
 (۴) در مقداری آب گوجه‌فرنگی همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است.
 ۸۷- شکل زیر دو محلول با مشخصات مختلف (شامل حجم و غلظت اولیه) را در دمای یکسان نشان می‌دهد. کدام گزینه درباره آن‌ها درست است؟



- (۱) pH محلول (I) از pH محلول (II) بیشتر است.
 (۲) رسانایی الکتریکی محلول (II) از محلول (I) کم‌تر است.
 (۳) شمار یون‌های آمونیوم در محلول (II) با شمار یون‌های سدیم در محلول (I) برابر است.
 (۴) ثابت یونش باز ضعیف به تقریب برابر $10^{-5} \times 1/8$ است.

۸۸- درون ظرفی، ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲۵ مولار باریوم هیدروکسید وجود دارد. اگر ۵۰ میلی‌لیتر از این محلول را برداشته و به ظرف دیگری منتقل کنیم، pH محلول باقی‌مانده در ظرف، کدام خواهد بود؟

- ۱۰/۰ (۱) ۱۰/۳ (۲) ۱۳/۴ (۳) ۱۳/۷ (۴)

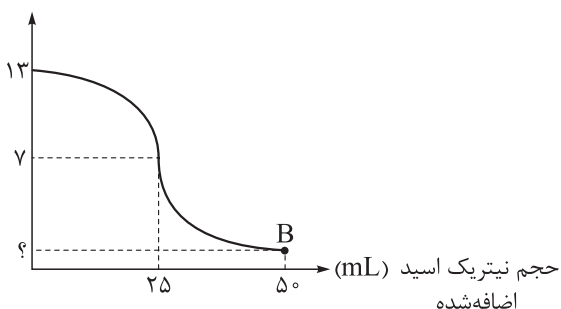
۸۹- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- الف) هر چه نسبت $\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]}$ در محلول یک باز بیشتر باشد، آن باز به یقین قوی‌تر است.
 ب) در محلول شیشه‌پاک‌کن، کاتیونی چنداتی وجود دارد که در ساختار برخی از صابون‌های مایع نیز وجود دارد.
 پ) با افزودن یک باز به آب، غلظت یون هیدروکسید افزایش یافته و به دلیل کاهش غلظت یون هیدرونیوم، رسانایی الکتریکی محلول تغییر قابل توجهی نمی‌کند.
 ت) از محلول آبی سدیم هیدروکسید، برای باز کردن لوله‌ها استفاده می‌شود.
 (۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) ب - ت (۴) پ - ت

۹۰- اگر به دو لیتر محلول نیتریک اسید ۰/۰۵ مولار، در هر ۴۸ ثانیه، ۶۰۰ میلی لیتر آب خالص افزوده شود، پس از گذشت چند دقیقه pH محلول به ۲/۳ می رسد و غلظت مولار یون هیدروکسید در این محلول، چند برابر می شود؟

- (۱) ۲۴ - ۰/۱
(۲) ۲۴ - ۱۰
(۳) ۸ - ۰/۱
(۴) ۸ - ۱۰

۹۱- با توجه به نمودار زیر که تغییرات pH را برای ۵۰ میلی لیتر محلول پتاس بر اثر افزودن تدریجی محلول نیتریک اسید نشان می دهد، pH در نقطه B چه قدر است؟



- (۱) ۸/۳
(۲) ۸/۰
(۳) ۳/۴
(۴) ۳/۱

۹۲- کدام مورد، درست است؟

- (۱) الکترولیت ها، موادی محلول در آب و غیرالکترولیت ها، موادی نامحلول در آب هستند.
(۲) فراورده یونی واکنش جوش شیرین با محلول هیدروکلریک اسید، نمک خوراکی است.
(۳) دستگاه گوارش انسان، یک سامانه اسیدی به شمار می آید.
(۴) مطابق مدل آرنیوس، اسیدها جزء ترکیب های مولکولی و بازها، جزء ترکیب های یونی هستند.
- ۹۳- در یک نمونه قرص ضداسید به جرم ۴ گرم، درصد جرمی آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید به ترتیب برابر با ۷/۸ و ۱۷/۴ درصد است. چه تعداد از این قرص برای خنثی کردن ۲/۷ لیتر شیره معده با $\text{pH} = ۱/۴$ لازم است؟ (سایر اجزای قرص با اسید معده واکنش نمی دهند؛ $\text{H} = ۱, \text{O} = ۱۶, \text{Mg} = ۲۴, \text{Al} = ۲۷ : \text{g.mol}^{-۱}$)

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۹۴- کدام مورد درست است؟

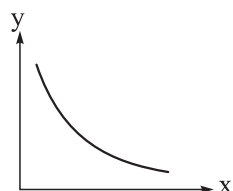
- (۱) منظور از ترکیب های یونی دوتایی، ترکیب هایی به فرم AB است که A، فلز و B، نافلز است.
(۲) مجموع بار الکتریکی کاتیون ها و آنیون های سازنده هر ترکیب یونی برابر صفر است و همه ترکیبات یونی خنثی هستند.
(۳) به فرمول شیمیایی ترکیب های یونی که افزون بر نوع عنصرهای سازنده، شمار اتم های هر عنصر را نشان می دهد، فرمول مولکولی می گویند.
(۴) جاذبه یونی، جاذبه ای بسیار قوی است که میان اتم های فلزی و نافلزی در ساختار مواد یونی برقرار می شود.

۹۵- شمار الکترون‌های مبادله‌شده میان عنصرهای سازنده در تشکیل چند میلی‌گرم آلومینیم اکسید نصف شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل ۱ گرم کلسیم برمید است؟ ($O = ۱۶, Al = ۲۷, Ca = ۴۰, Br = ۸۰ : g.mol^{-1}$)

- (۱) ۸۵ (۲) ۶۸ (۳) ۱۰۲ (۴) ۴۲ / ۵

۹۶- کدام مورد عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«در نمودار مقابل، x و y به ترتیب می‌تواند و باشد.»

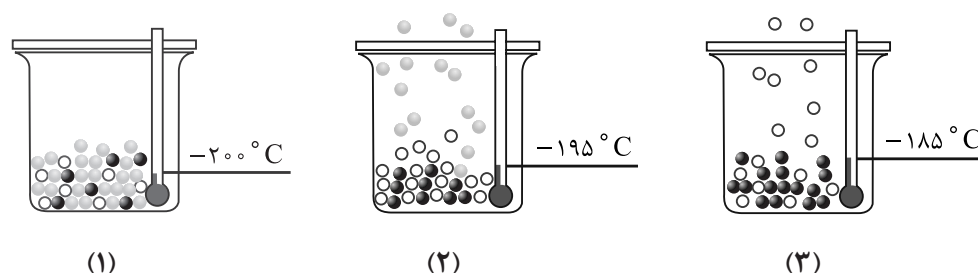


- (۱) میزان CO_2 در هواکره - میانگین جهانی دمای کره زمین
(۲) ارتفاع هواکره - فشار اکسیژن
(۳) میزان CO_2 در هواکره - میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد
(۴) ارتفاع هواکره - دمای هوا در لایه استراتوسفر

۹۷- کدام مورد در ارتباط با گازهای تشکیل‌دهنده هواکره، نادرست است؟

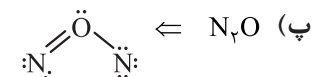
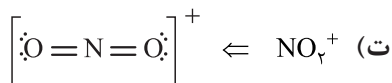
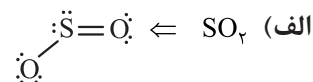
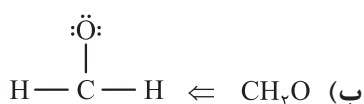
- (۱) گازی که برای پرکردن تایر خودرو استفاده می‌شود، در نگهداری نمونه‌های بیولوژیکی نیز کاربرد دارد.
(۲) فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، در جوشکاری، برش فلزها و همچنین در ساخت لامپ‌های رشته‌ای به کار می‌رود.
(۳) حدود ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را گازی تشکیل می‌دهد که همراه با سایر فراورده‌های سوختن گاز طبیعی، به صورت ترکیب اکسیژن‌دار، وارد هواکره می‌شود.
(۴) در لایه‌های بالایی هواکره، می‌توان گونه‌ای یافت که فقط یک ذره زیراتمی داشته باشد.

۹۸- شکل‌های زیر تقطیر جزءبه‌جزء نیتروژن، اکسیژن و آرگون را نشان می‌دهند. کدام مورد، نادرست است؟



- (۱) مایع‌بودن هر سه ماده در حالت (۱)، نشان می‌دهد که نقطه جوش آن‌ها بالاتر از $۷۳ K$ است.
(۲) گاز جداشده در حالت (۲)، در همه لایه‌های هواکره وجود دارد.
(۳) مایع باقی‌مانده در حالت (۲)، حاوی دو ماده با نقطه جوش نزدیک به هم است که در پتروشیمی شیراز یکی از آن‌ها را با خلوص بالا تهیه می‌کنند.
(۴) گاز جداشده در حالت (۳)، گازی بی‌رنگ، بی‌بو و سمی است.

۹۹- ساختار لوویس چند گونه به درستی رسم نشده است؟



۳ (۴)

۱ (۳)

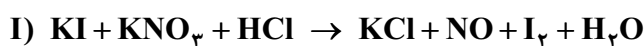
۲ (۲)

۴ (۱)

۱۰۰- در مخلوطی به جرم ۲۰ گرم شامل اکسید منیزیم و یکی از اکسیدهای آهن، درصد جرمی یون‌های منیزیم و آهن به ترتیب برابر ۳۰ و ۳۵ می‌باشد. کدام یون آهن در این اکسید وجود دارد و جرم اکسید آهن در مخلوط چند گرم است؟ ($\text{Fe} = 56, \text{Mg} = 24, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



۱۰۱- ضرایب استوکیومتری H_2O و HCl در واکنش (I) پس از موازنه، به ترتیب چند برابر ضرایب این ترکیب‌ها در واکنش (II) پس از موازنه است؟



۱۰۲- کدام مورد نادرست است؟

(۱) در شیمی سبز دانشمندان با استفاده از منابع طبیعی، به دنبال افزایش کیفیت زندگی انسان و محافظت از طبیعت هستند.

(۲) برای کاهش مقدار کربن دی‌اکسید تولیدشده از نیروگاه‌ها، آن‌ها را با اکسیدهای بازی واکنش داده و به موادی معدنی تبدیل می‌کنند.

(۳) سوخت سبز همانند پلاستیک سبز، در ساختار خود اتم اکسیژن دارد و برخلاف سوخت‌های فسیلی، گازهای گلخانه‌ای تولید نمی‌کند.

(۴) دفن کردن کربن دی‌اکسید نسبت به سایر روش‌های شیمی سبز برای کاهش ردپای CO_2 ، دستکاری کم‌تری در طبیعت دارد.

۱۰۳- در میان منابع مختلف تولید برق، کدام منابع به ترتیب کم‌ترین و بیشترین سهم را در تولید کربن دی‌اکسید دارند؟

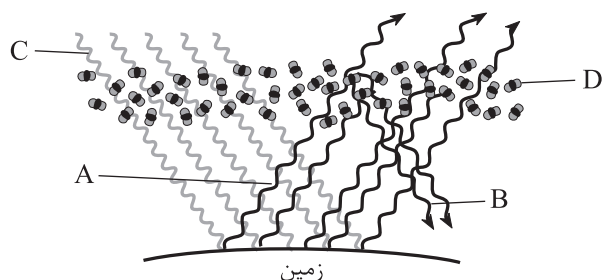
(۲) انرژی خورشید - زغال سنگ

(۱) باد - نفت خام

(۴) انرژی خورشید - نفت خام

(۳) باد - زغال سنگ

۱۰۴- با توجه به شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) با افزایش مقدار مولکول‌های D در هواکره، حجم آب اقیانوس‌ها بالاتر می‌رود.

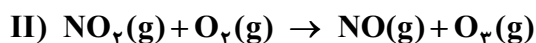
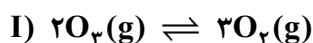
ب) بخش قابل توجهی از پرتوهای A و C به ترتیب به وسیله مولکول‌های D و زمین جذب می‌شود.

پ) اگر هواکره وجود نداشت، دمای کره زمین با توجه به رسیدن مستقیم پرتوهای خورشیدی افزایش می‌یافت.

ت) پرتوهای C می‌توانند گستره‌ای از امواج الکترومغناطیس، مانند نور مرئی و فرابنفش باشند.

(۱) الف - پ (۲) ب - پ (۳) الف - ت (۴) ب - ت

۱۰۵- با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟



(۱) احتمال انجام واکنش (II) در یک روز ابری بیشتر از یک روز آفتابی است.

(۲) واکنش (I) در لایه‌ای از هواکره انجام می‌شود که روند تغییر دما و فشار در آن عکس یکدیگرند.

(۳) قهوه‌ای‌رنگ‌بودن هوای آلوده کلان‌شهرها مربوط به فراورده نیتروژن‌دار واکنش (II) است.

(۴) با انجام واکنش (I) در هواکره، درصد حجمی اوزون در لایه اوزون کاهش می‌یابد، اما از ورود بخش عمده‌ای از تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین ممانعت می‌شود.

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۲:۳۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

خوبی سبز! آزمون‌های تشریحی خیلی سبز

۵ مرحله در طول سال

آزمون

از هر نظر در شبیه‌ترین حالت ممکن به امتحان نهایی

- بارم‌بندی آموزش و پرورش
- فرم و ظاهر (برگه سوال، پاسخ‌برگ، کلید و پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها و ...)
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- تو هر آزمون یکی دو تست، شبیه‌سازی عینی به امتحان نهایی داره
- سخت‌شدن امتحان نهایی رو هم پیش‌بینی می‌کنه



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- راهنمای تصحیح دقیق درست مثل امتحان‌های نهایی
- پاسخنامه یاددهنده شامل درسنامه و نکته داره

تصحیح به صورت کاملا مکانیزه

- دو مصحح در سطح کاملا حرفه‌ای آزمون رو تصحیح میکنن
- اگه بین این دو اختلاف نظر وجود داشت برای بار سوم آزمون توسط یه مصحح دیگه تصحیح میشه
- مصحح کل برگه به دانش‌آموز رو تصحیح نمی‌کنه و هر مصحح یک سوال رو برای همه دانش‌آموزان تصحیح می‌کنه
- مصححین امکان کامنت‌گذاری تو فرایند تصحیح دارن
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

داندود رایگان تمام آزمون های آزمایشی

در کانال تلگرام ما :

آزمونها آزمایشتی

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

سازمان پژوهش و آموزش کشور

سند

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



زبختار

خدیجه
آزمون



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

آکا

آزمونهای سراسری
گاج

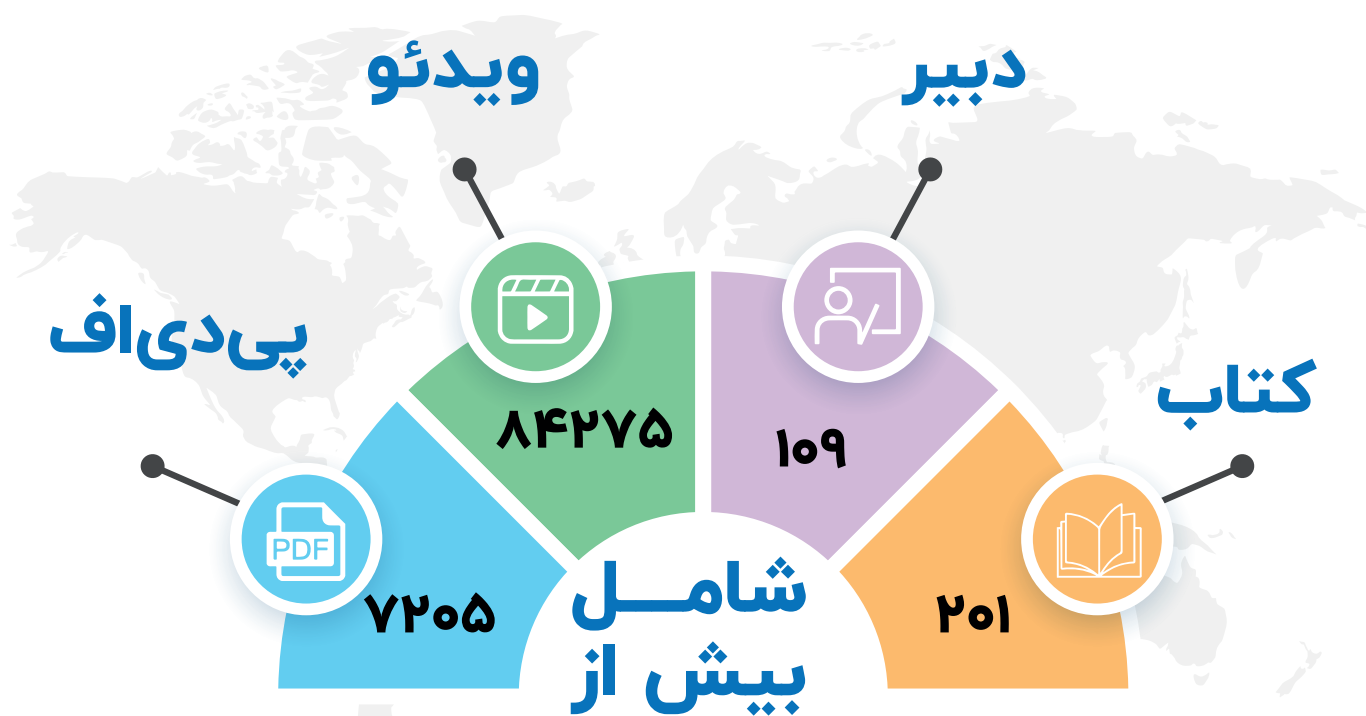


join us ...



مُنیاز اولین نشر آنلاین کنکور کشور

از سال ۹۷ تا کنون



برترین دبیران کنکور کشور در نشر آنلاین مُنیاز

<https://www.moniaz.ir>



پاسخ نامه آزمون آزمایشی خلی سبز



مرحله هفتم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/آبان/۱۶

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه
هندسه	سید محمد رضا حسینی فرد - محمد طاهر شعاعی - حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری - کیوان دارایی - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی
فیزیک	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	سروش عبادی - یاسر عبداللہی - آرمین عظیمی - محمد قهرمانی نژاد - امیر حسین مسلمی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	فرشاد حسن زاده سروش مؤثینی	سهیل تقی زاده سپند محمد کریم نژاد
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیر حسین ابومحبوب	ماهان فنی فر پارسا مرادی ابوالفضل ناصری مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیر حسین ابومحبوب مریم نظری	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	مسعود خندانی	علیرضا جباری سعید محبی	مریم گلی حسنلو مسعود خندانی پوریا علاقه مند امیر محمودی انزلی محمد رضا یاری
شیمی	یاسر عبداللہی	سروش عبادی	سروش عبادی	مرتضی نصیرزاده	امیر بیات رامین رزمجو پارسا طاهری منزہ

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقا جانپور

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

شروع مجدد دوازدهم از مهر



آزمون آزمایشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی الهه صفری - زهرا صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر - مهر آسا قدیری نادره ناز آوری - ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل پور - دریا لطفی



۱ در کدام رابطه y تابعی از x است؟

$$(y-2)^3 = |x + \log_7 4| \quad (2)$$

$$|y-2| = |x-1| \quad (1)$$

$$|y^3| = x - 5 \quad (4)$$

$$|y| = x^2 + 4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

کرتس Box

معادلات و توابع: در روابط بین x و y ، رابطه‌ای تابع (y برحسب x) است که به ازای هر مقدار قابل قبول x ، فقط و فقط یک مقدار برای y به دست آید. به بیان دیگر، اگر گزاره زیر درست باشد، آن رابطه تابع است:

$$\forall x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

اما ما غالباً به دنبال اثبات رابطه تابع نیستیم، بلکه به دنبال نقض آن هستیم؛ یعنی سعی کنیم در گزینه‌ها یا موارد مختلف، مثال‌های نقضی را به درستی پیدا کنیم تا مطمئن شویم رابطه مورد نظر تابع نیست.

در معادلاتی که توان y زوج است یا این که y داخل قدرمطلق است، غالباً (نه همواره) رابطه y برحسب x تابع نیست.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به نکته بالا، گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) که در آن‌ها y درون قدرمطلق است، تابع نیست.

حالا بدون توجه به این نکته، سعی می‌کنیم، مثال‌های نقضی برای x در نظر بگیریم تا تابع بودن آن‌ها را رد کنیم:

$$\text{گزینه (۱): } \xrightarrow{x=0} |y-2|=1 \Rightarrow \begin{cases} y-2=1 \Rightarrow y=3 \\ y-2=-1 \Rightarrow y=1 \end{cases} x$$

$$\text{گزینه (۳): } \xrightarrow{x=0} |y|=4 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ y=-4 \end{cases} x$$

$$\text{گزینه (۴): } \xrightarrow{x=6} |y^3|=1 \Rightarrow \begin{cases} y^3=1 \Rightarrow y=1 \\ y^3=-1 \Rightarrow y=-1 \end{cases} x$$

از یک قطعهٔ مقوایی مربع‌شکل به طول ضلع ۱۶ می‌خواهیم یک جعبهٔ درواز بسازیم. برای این منظور، از هر چهار گوشهٔ این مقوا چهار مربع به طول ضلع x می‌بریم و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام یک از توابع زیر حجم جعبه را برحسب x بیان می‌کند؟

$$V(x) = x(16 - x)^2 \quad (۲)$$

$$V(x) = 2x(16 - x)^2 \quad (۱)$$

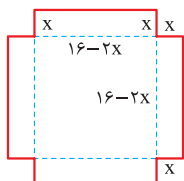
$$V(x) = x(16 - 2x)^2 \quad (۴)$$

$$V(x) = x(16 - x^2)^2 \quad (۳)$$

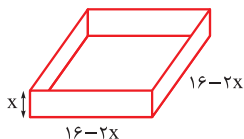
پاسخ: گزینهٔ ۴

گام اول: یک منشور با قاعدهٔ مربعی داریم، که این قاعده به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



یعنی منشور زیر را داریم:



گام دوم: حالا حجم این منشور از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V = S_{\text{قاعده}} \times \frac{h}{x} \Rightarrow V(x) = x(16 - 2x)^2$$

۳ به ازای x های مثبت، اگر $f(x - \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد، $f(\sqrt{2})$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

تعبیر سوال اینه که اگه $x - \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ باشد، مقدار $x^3 + \frac{1}{x^3}$ چقدر می شه! از اتحادهای مربع دوجمله‌ای و چاق و لاغر استفاده کن.

درس Box

اتحادهای جبری

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$= a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

گام اول: طبق hint، $x - \frac{1}{x}$ را مساوی $\sqrt{2}$ قرار می دهیم و سعی می کنیم براساس آن مقدار عبارت $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را حساب کنیم.

ابتدا با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، عبارت $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را تجزیه می کنیم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2})$$

$$= (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1) \quad (*)$$

گام دوم: حالا با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای مقدار عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ و سپس عبارت $x + \frac{1}{x}$ را حساب می کنیم:

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان}^2} x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$$

حالا برای این که مربع عبارت $x + \frac{1}{x}$ را ایجاد کنیم، به طرفین تساوی بالا ۲ واحد اضافه می کنیم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 6 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 6 \xrightarrow{x>0} x + \frac{1}{x} = \sqrt{6}$$

گام سوم: حالا طبق رابطه (*) خواسته سؤال را حساب می کنیم:

$$\xrightarrow{*} x^3 + \frac{1}{x^3} = (\sqrt{6})(4 - 1) = 3\sqrt{6}$$

از تساوی مفروض سؤال، سعی می کنیم ضابطه تابع f را پیدا کنیم:

$$x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2 + 4 \xrightarrow{x>0} x + \frac{1}{x} = \sqrt{t^2 + 4} \end{cases}$$

حالا $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را تجزیه می کنیم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)$$

$$\xrightarrow{f(x - \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3}} f(t) = \sqrt{t^2 + 4}(t^2 + 2 - 1)$$

پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 4}$ است و داریم:

$$f(\sqrt{2}) = \pm 3\sqrt{6}$$

په جور دیگه



۴

در مجموعه اعداد حقیقی، تابع f ثابت و تابع g همانی است. اگر $f(2) = 3g(1)$ باشد، مقدار $\frac{(fog)(x - [x])}{(f - g)(2)}$ کدام است؟
([] ، نماد جزء صحیح است.)

۲ (۴

-۲ (۳

۳ (۲

-۳ (۱

پاسخ: گزینه ۲

کارت Box

• تابع ثابت تابعی است که برد آن تک‌عضوی است. ضابطه جبری این تابع $f(x) = c$ و نمودار آن خطی افقی است.
• تابع همانی تابعی است که مقدار خروجی و مقدار ورودی آن برابر است. ضابطه جبری این تابع $f(x) = x$ و نمودار آن نیمساز ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ضابطه تابع f را $f(x) = c$ و ضابطه تابع g را $g(x) = x$ می‌گیریم، طبق فرض سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f(2)=3g(1)} c = 3(1) \Rightarrow c = 3$$

گام دوم: حالا خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

ورودی هر چه باشد، خروجی مقدار ۳ است.

$$\frac{(fog)(x - [x])}{(f - g)(2)} = \frac{f(g(x - [x]))}{f(2) - g(2)} = \frac{3}{3 - 2} = 3$$





در تابع خطی f ، اگر $f(2) = 3$ و $f(-2) = -5$ باشد، مجموع اعداد طبیعی که در برد تابع $g(x) = \frac{3f(x)-7}{f(x)-3}$ با دامنه $D_g = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ قرار ندارند، کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

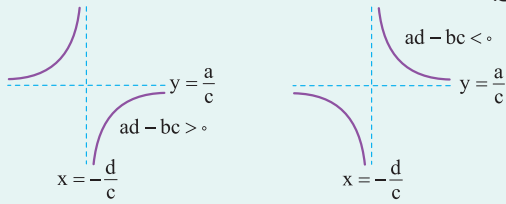
پاسخ: گزینه ۴

درس Box

تابع گویا: تابعی کسری با ضابطه چندجمله‌ای / چندجمله‌ای تابع گویا نامیده می‌شود.

• دامنه تابع گویا {ریشه‌های مخرج} - $\mathbb{R}$ است.

• معروف‌ترین تابع گویای دبیرستان تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c \neq 0$ و $ad \neq bc$) با دامنه $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ و برد $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است. نمودار این تابع به یکی از شکل‌های زیر است:



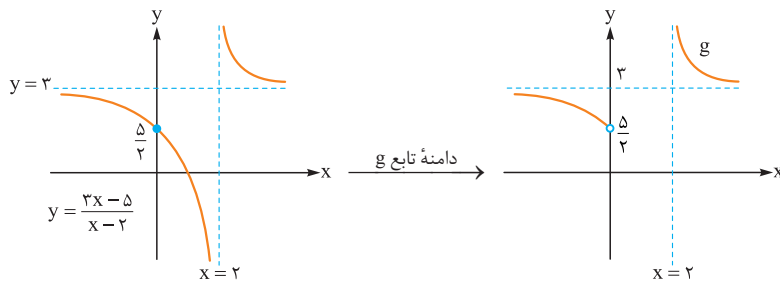
گام اول: ابتدا باید ضابطه تابع f را پیدا کنیم. با توجه به فرض سؤال تابع خطی f از نقاط $(2, 3)$ و $(-2, -5)$ می‌گذرد. پس داریم:

$$\begin{cases} \text{شیب خط: } m = \frac{3 - (-5)}{2 - (-2)} = \frac{8}{4} = 2 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

گام دوم: حالا ضابطه تابع g را می‌سازیم:

$$g(x) = \frac{3f(x)-7}{f(x)-3} \Rightarrow g(x) = \frac{3(2x-1)-7}{(2x-1)-3} = \frac{6x-10}{2x-4} \Rightarrow g(x) = \frac{3x-5}{x-2}$$

گام سوم: با توجه به دستورالعمل درس باکس، نمودار تابع g را در دامنه مفروض رسم می‌کنیم:



مطابق نمودار بالا، برد تابع g مجموعه $\{3\} - (\frac{5}{2}, +\infty)$ است که شامل ۳ عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ نیست. مجموع این ۳ عدد برابر ۶ است.

تعداد اعداد صحیح دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{2[x]-1}}$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱) صفر

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

دامنه تابع رادیکالی $\sqrt{\text{cloud}}$ مجموعه جواب‌های نامعادله $\text{cloud} \geq 0$ است.

• جزء صحیح یک عدد صحیح، برابر خودش و جزء صحیح یک عدد ناصحیح برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح از میان اعداد کوچک‌تر از آن است؛ در واقع:

$$n \leq x < n+1 \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} [x] = n$$

• ویژگی‌های جزء صحیح:

$$۱) [\text{cloud}] = n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} n \leq \text{cloud} < n+1$$

$$۲) [\text{cloud}] \geq n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} \text{cloud} \geq n$$

$$۳) [\text{cloud}] \leq n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} \text{cloud} < n+1$$

$$۴) [\text{cloud}] > k \xrightarrow{k \notin \mathbb{Z}} \text{cloud} \geq [k]+1$$

$$۵) [\text{cloud}] < k \xrightarrow{k \notin \mathbb{Z}} \text{cloud} < [k]+1$$

گام اول: از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم؛ زیرا دامنه تابع f مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1-2x}{2[x]-1} \geq 0$ است.

x	$\frac{1}{2}$
$1-2x$	+
$2[x]-1$	-

و براساس روابط درس باکس، جدول تعیین علامت عبارت $2[x]-1$ را می‌نویسیم:

x	۱
$2[x]-1$	-
	+

گام دوم: حالا جدول هم‌زمان این دو عبارت را داریم:

x	$\frac{1}{2}$	۱
$1-2x$	+	-
$2[x]-1$	-	+
$\frac{1-2x}{2[x]-1}$	-	+

با توجه به جدول بالا، مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1-2x}{2[x]-1} \geq 0$ که همان دامنه تابع f است، بازه $(\frac{1}{2}, 1)$ خواهد شد. این بازه هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود.

اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x] = x$ و ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \sqrt{-1}$ خواهد شد که غیر قابل قبول است؛ پس دامنه تابع f شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

تیزبازی



۷ اگر دامنه و برد تابع f با ضابطه $f(x) = b\sqrt{(a-2)x + a^2 - 2a - 2} + b^2 - b$ به ترتیب بازه‌های $(-\infty, -3]$ و $[2, +\infty)$ باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

(۱) $(4, -1)$ (۲) $(4, 2)$ (۳) $(1, -1)$ (۴) $(1, 2)$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

ویژگی‌های تابع خاص $y = a + b\sqrt{cx + d}$

با توجه به علامت‌ها و مقادیر ۴ پارامتر a, b, c, d نمودار این تابع یکی از ۴ حالت زیر را دارد:

	چپ‌گرا	راست‌گرا
رو به بالا	$c < 0, b > 0$	$c > 0, b > 0$
رو به پایین	$c < 0, b < 0$	$c > 0, b < 0$

نقطهٔ توپر در همهٔ نمودارهای بالا $(-\frac{d}{c}, a)$ است که در آن $-\frac{d}{c}$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است.

پاسخ‌دهی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به دامنه و برد تابع f ، متوجه می‌شویم که نمودار تابع چپ‌گرا رو به بالا است، یعنی $b > 0$ و $a - 2 < 0$ است. پس تا این‌جا داریم:

$$a < 2, b > 0 \quad (*)$$

گام دوم: دامنه و برد برای ما مشخص می‌کند که $x = -3$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است و به ازای $x = -3$ مقدار تابع برابر ۲ شده است:

$$(a-2)x + a^2 - 2a - 2 = 0 \xrightarrow{x=-3} -3a + 6 + a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a + 4 = (a-1)(a-4) = 0 \xrightarrow{(*)} a = 1$$

گام سوم: پس تا این‌جا ضابطهٔ تابع $f(x) = b\sqrt{-(x+3)} + b^2 - b$ است. باید $f(-3)$ برابر ۲ شود.

$$\Rightarrow f(-3) = 0 + b^2 - b = 2 \Rightarrow b^2 - b - 2 = (b-2)(b+1) = 0 \xrightarrow{(*)} b = 2$$

پس زوج مرتب (a, b) به صورت $(1, 2)$ است.

نمودار وارون تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + 3x + a$ خط $2x - y - 1 = a$ را روی محور x قطع می‌کند. مقدار $f(a)$

کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

-۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



اگر نمودار تابع f^{-1} و نمودار تابع g یکدیگر را در نقطه (α, β) قطع کنند، نمودار توابع f و g^{-1} یکدیگر را در نقطه (β, α) قطع می‌کنند. این نکته مهم راهکار حل چند سؤال مهم کنکور سراسری بوده است، به این ترتیب که به دست آوردن ضابطه تابع f^{-1} و حل معادله مذکور بسیار دشوار و خارج از عرف دبیرستان است، اما می‌توانیم تابع f را با وارون یک تابع خطی قطع دهیم. فقط در این راه حل، باید حواسمان به جابه‌جایی طول و عرض نقطه تقاطع باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به جای این که نمودار وارون تابع f را با تابع خطی $g(x) = 2x - a - 1$ قطع دهیم تا نقطه برخورد $P(\alpha, 0)$ را به دست آوریم، بهتر است خود نمودار تابع f را با وارون تابع g یعنی g^{-1} قطع دهیم تا نقطه $P'(0, \alpha)$ به دست آید. پس در این گام باید ضابطه تابع g^{-1} را به دست آوریم:

$$y = 2x - a - 1 \Rightarrow x = \frac{y + a + 1}{2} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود}} g^{-1}(x) = \frac{x + a + 1}{2}$$

گام دوم: حالا طبق فرض سؤال، جواب معادله $f(x) = g^{-1}(x)$ باید طول نقطه P' یعنی $x = 0$ باشد:

$$x^3 + 3x + a = \frac{x + a + 1}{2} \xrightarrow{x=0} a = \frac{a + 1}{2} \Rightarrow a = 1$$

گام سوم: یعنی ضابطه تابع f به صورت $f(x) = x^3 + 3x + 1$ و در نتیجه $f(a) = f(1) = 5$ است.

به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

(سؤال ۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۵ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)



۹ اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & ; x \leq -1 \\ x+2 & ; x > -1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-2 & ; f(x) < 0 \\ 2x-6 & ; f(x) \geq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $(fog)(-1)$ کدام است؟

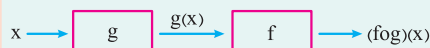
(۱) صفر (۲) -۶ (۳) -۱ (۴) -۱۰

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

ترکیب دو تابع f و g را با نماد fog نمایش می‌دهیم و به معنای آن است که مقدار تابع g به عنوان ورودی به تابع f داده می‌شود:

به بیان دیگر $(fog)(a)$ مقدار تابع f در $g(a)$ است نه در a .



دامنه تابع مرکب fog از راه زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

گام اول: $(fog)(-1)$ یا $f(g(-1))$ مقدار تابع f در $g(-1)$ است، پس ابتدا به $g(-1)$ نیاز داریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای محاسبه $g(-1)$ هم به $f(-1)$ نیاز داریم:

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = 4$$

و چون این مقدار مثبت است، در تابع g ، از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f(-1)=4} g(-1) = 2(-1) - 6 = -8$$

گام دوم: در نهایت داریم:

$$f(g(-1)) = f(-8) = 2(-8) + 6 = -10$$

۹ اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x > 2 \\ -3x+7 & ; x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x+4 & ; f(x) \geq 0 \\ x-4 & ; f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $fog(-4)$ کدام است؟

(سوال ۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

(۱) ۱۹ (۲) ۹ (۳) -۱۵ (۴) -۵

۱۰ اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، به ازای $x \geq 1$ کدام گزینه نادرست است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad (g \circ f)(x) &= \sqrt{x^2 - 1} \\ (2) \quad (f \circ g)(x) &= x - 1 \\ (3) \quad (f \circ f)(x) &= x^4 - 2x^2 \\ (4) \quad (g \circ g)(x) &= \sqrt{x^4} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴

پیدا کردن ضابطه در توابع مرکب:

درس Box

در سؤالات رایج ترکیب توابع، دو ضابطه از سه ضابطه $f(x)$ ، $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$ معلوم است و ضابطه سوم را از ما می‌خواهند. جدول زیر روش‌های به دست آوردن ضابطه سوم را به صورت خلاصه شرح می‌دهد:

ضابطه‌ها	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
روش	معلوم	معلوم	به جای هر x ی که در ضابطهٔ $f(x)$ می‌بینیم، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
	ضابطهٔ $g(x)$ را مساوی متغیر t قرار می‌دهیم و x را برحسب t به دست می‌آوریم (همان ضابطهٔ $g^{-1}(x)$) و سپس در ضابطهٔ $(f \circ g)(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم.	معلوم	معلوم
	معلوم	به جای هر x ضابطهٔ $f(x)$ ، عبارت $g(x)$ را قرار می‌دهیم. عبارت حاصل باید با ضابطهٔ $(f \circ g)(x)$ برابر باشد. در این شرایط، معادله‌ای را باید حل کنیم که متغیر مجهول آن $g(x)$ است.	معلوم

طبق درس باکس عمل می‌کنیم و فقط کافی است ضابطه جای گذاری کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{aligned} (1) \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1} \quad \checkmark \\ (2) \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = g^2(x) - 1 = x - 1 \quad \checkmark \\ (3) \quad (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f^2(x) - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2 \quad \checkmark \\ (4) \quad (g \circ g)(x) &= g(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x} \quad \times \end{aligned}$$

نمودار تابع خطی f با عرض از مبدأ ۲ بر نمودار تابع f^{-1} منطبق است. اگر $g(x) = 2x + 3$ باشد، با کدام انتقال، نمودار $g \circ f$ را می توان به نمودار تابع $f \circ g$ تبدیل کرد؟

(۱) ۸ واحد به راست

(۲) ۴ واحد به راست

(۳) ۸ واحد به چپ

(۴) ۴ واحد به چپ

دو تابع f و f^{-1} مساوی هستند.

پاسخ: گزینه ۴

توابع خطی با شیب -1 ، همواره با تابع وارون شان مساوی هستند، یا نمودار آن ها بر نمودار وارون شان منطبق می شود.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طبق نکته بالا، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -x + 2$ است.

گام دوم: حالا ضابطه های هر دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -g(x) + 2 = -2x - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 3 = -2x + 7$$

گام سوم: حالا فرض می کنیم که $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x - n)$ باشد، داریم:

$$-2(x - n) + 7 = -2x - 1 \Rightarrow -2x + 2n + 7 = -2x - 1 \Rightarrow n = -4$$

پس $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x + 4)$ است و این یعنی باید نمودار تابع $g \circ f$ را ۴ واحد به چپ ببریم تا بر نمودار تابع $f \circ g$ منطبق شود.



نقطه $A(2, a)$ روی نمودار تابع f و نقطه $A'(4, b)$ متناظر با نقطه A روی نمودار تابع وارون تابع g با ضابطه $g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$ قرار دارد. حاصل $a + b$ کدام است؟

$$\frac{24}{5} (4)$$

$$12 (3)$$

$$8 (2)$$

$$\frac{26}{3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی نمودار تابع f و نقطه متناظر آن $A'(\alpha', \beta')$ روی نمودار تابع $g(x) = af(bx + c) + d$ باشد، روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} b\alpha' + c = \alpha \Rightarrow \alpha' = \frac{\alpha - c}{b} \\ \beta' = a\beta + d \end{cases}$$

اگر نقطه (α, β) روی نمودار تابع f باشد، نقطه (β, α) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد.

محاسبه ضابطه وارون: برای محاسبه ضابطه وارون تابع $y = f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۱) x را بر حسب y می‌نویسیم یا اصطلاحاً x را تنها می‌کنیم.

(۲) جای x و y را عوض می‌کنیم و ضابطه تابع $y = f^{-1}(x)$ به دست می‌آید.

گام اول: نقطه A روی نمودار تابع f قرار گرفته است و این یعنی $f(2) = a$.

از طرفی نقطه $A'(4, b)$ روی نمودار تابع g^{-1} است، یعنی نقطه $A''(b, 4)$ روی نمودار تابع g است:

$$\Rightarrow g(b) = 2f\left(\frac{b}{3}\right) = 4 \Rightarrow f\left(\frac{b}{3}\right) = 2$$

گام دوم: از آنجا که نقاط A ، A' و A'' متناظر هم‌اند، باید یک تساوی واحد را نشان دهند. به بیان دیگر تساوی‌های $f(2) = a$ و $f\left(\frac{b}{3}\right) = 2$ باید هم‌ارز و معادل باشند و لازمه آن این است که $\frac{b}{3}$ با ۲ و a نیز با ۲ برابر باشد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b = 8$$

می‌توانستیم ضابطه وارون تابع g را نیز به دست آوریم:

$$y = 2f\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \frac{y}{2} = f\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = 3f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

و با جای‌گذاری مختصات نقطه A' ، به تساوی $f\left(\frac{b}{3}\right) = 2$ می‌رسیدیم.

درس‌Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

یه جور دیگه

۱۳ کدام تابع روی بازه $(\frac{3}{2}, +\infty)$ وارون پذیر نیست؟

$$g(x) = 5x - x^2 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (1)$$

$$k(x) = x^3 - 3x + 1 \quad (4)$$

$$h(x) = \frac{x-2}{|x-1|} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

یک تابع که در دامنه‌اش وارون‌ناپذیر است، می‌تواند در زیرمجموعه‌ای (غالباً بازه) از دامنه‌اش وارون‌پذیر باشد. به عنوان مثال تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید. این تابع مشخصاً روی $\mathbb{R}$ غیر یک‌به‌یک یا وارون‌ناپذیر است، اما روی بازه‌های $(-\infty, x_s]$ یا $[x_s, +\infty)$ که $x_s = -\frac{b}{2a}$ وارون‌پذیر است. در حالت کلی یک تابع درجه دوم در بازه‌ای که طول رأس سهمی جزء نقاط درونی آن بازه نباشد، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است؛ در غیر این صورت وارون‌ناپذیر است.

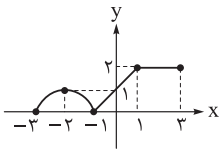
پاسخ خیلی تشریحی ✓

بازه $(\frac{3}{2}, +\infty)$ شامل طول رأس نمودار تابع g خواهد بود؛ زیرا:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} > \frac{3}{2}$$

بنابراین طبق درس باکس، این تابع غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر D_g و R_g به ترتیب دامنه و برد تابع g با ضابطه $g(x) = 3f(\frac{x}{3}) + 1$ باشند، حاصل $D_g \cap R_g$ کدام است؟



(۲) $[1, 6]$

(۱) $[1, \frac{3}{3}]$

(۴) $[0, 6]$

(۳) $[0, \frac{3}{3}]$

پاسخ: گزینه ۲

قرار نیست نمودار رسم کنی، بلکه تبدیلات رو روی دامنه و برد انجام بده.

Hint

گام اول: از نمودار تابع f مشخص است که $D_f = [-3, 3]$ و $R_f = [0, 2]$ است. حالا برای رسم نمودار تابع g از روی نمودار تابع f ، لازم است ترتیب تبدیلات زیر را رعایت کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$y = f(x)$$

۱) $\xrightarrow{\text{طول نقاط } \times 3} y = f(\frac{x}{3})$

۲) $\xrightarrow{\text{عرض نقاط } \times 3} y = 3f(\frac{x}{3})$

۳) $\xrightarrow{+1 \text{ عرض نقاط}} g(x) = 3f(\frac{x}{3}) + 1$

گام دوم: حالا همین کار را روی دامنه و برد انجام می‌دهیم. دقت کنید که تبدیلات در راستای محور افقی روی برد تأثیری ندارد و بالعکس، تبدیلات در راستای محور عمودی روی دامنه تأثیری ندارد:

$$\left. \begin{aligned} D_f = [-3, 3] &\xrightarrow[\text{طول نقاط } \times 3]{(1)} D_g = [-6, 6] \\ R_f = [0, 2] &\xrightarrow[\text{عرض نقاط } \times 3]{(2), (3)} R_g = [3 \times 0 + 1, 3 \times 2 + 1] = [1, 7] \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_g \cap R_g = [1, 6]$$

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در راستای محور x ، دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار تابع g^{-1} از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

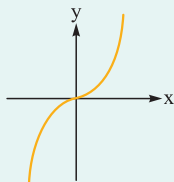
- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۲

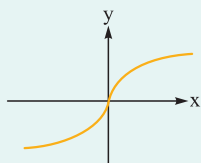
تابع درجه سوم و وارون آن

درس Box

ضابطه ساده‌ترین تابع درجه سوم $y = x^3$ است که در شکل زیر نمودار آن را می‌بینید:



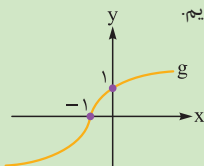
اگر قرینه نمودار این تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم، به نمودار تابع وارون آن یعنی $y = \sqrt[3]{x}$ می‌رسیم:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow[x \rightarrow x+2]{\text{۲ واحد به چپ}} g(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

گام دوم: نمودار تابع g را رسم می‌کنیم. برای این کار نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به چپ می‌بریم.



می‌بینیم که نمودار تابع g از ناحیه چهارم دستگاه مختصات نمی‌گذرد، پس وارون آن یعنی نمودار تابع g^{-1} از ناحیه دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد.

(سوال ۲ (قسمت الف) - امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۳)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

الف) اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در راستای محور x ها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم، آنگاه نمودار تابع $g^{-1}(x)$ از ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد.

ب) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$ برابر است.

امتحان
نهایی

۱۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & ; x \leq -1 \\ x+2 & ; x > -1 \end{cases}$ مفروض است. اگر تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} x+2 & ; f(x) < 0 \\ 2x+a & ; f(x) \geq 0 \end{cases}$

صعودی باشد، کمترین مقدار a کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

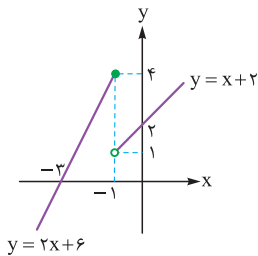
۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

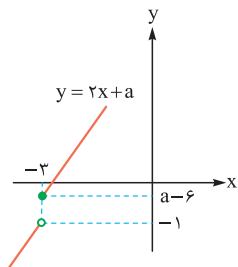
گام اول: ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، تا براساس آن ضابطه تابع g تکمیل شود:



حالا با توجه به این که تابع f در بازه $(-\infty, -3)$ منفی و در بازه $[-3, +\infty)$ نامنفی است، داریم:

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & ; x < -3 \\ 2x+a & ; x \geq -3 \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع g باید مطابق شکل زیر باشد:



پس برای این که تابع g روی دامنه‌اش صعودی باشد، $a-6$ نباید از -1 کمتر باشد:

$$\Rightarrow a-6 \geq -1 \Rightarrow a \geq 5$$

یعنی کمترین مقدار a برابر ۵ است.

تابع f با ضابطه $f(x) = 4^{x+a^2} - 2^{2x+1}$ نزولی است. اختلاف کم‌ترین و بیشترین مقدار قابل قبول برای a کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا ضابطه تابع f را به گونه‌ای دیگر بازنویسی می‌کنیم؛ می‌خواهیم یک عبارت در یک تابع نمایی ضرب شود:

$$f(x) = 4^{a^2} \times 4^x - 2 \times 4^x = (4^{a^2} - 2)4^x$$

گام دوم: تابع نمایی $y = 4^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است، پس برای این‌که تابع f نزولی شود، کافی است $4^{a^2} - 2$ نامثبت شود:

$$\Rightarrow 4^{a^2} - 2 \leq 0 \Rightarrow 4^{a^2} \leq 2 \Rightarrow 2a^2 \leq 1 \Rightarrow |a| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار قابل قبول برای a برابر است با:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$$



۱۸

چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x - 1$ بخش پذیر است. اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر -1 باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۵ / ۸ (۴)

۵ / ۶ (۳)

۵ / ۴ (۲)

۵ / ۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

• باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر عبارت $ax + b$ برابر $P(-\frac{b}{a})$ است.

• اگر باقی مانده تقسیم صفر باشد، به معنای آن است که چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax + b$ بخش پذیر است.

گام اول: با توجه به درس باکس و فرض‌های مسئله، به سادگی برداشت می‌شود که $P(1) = 0$ و $P(-2) = -1$ است، پس داریم:

$$P(1) = 2 + a - b + 2 = 0 \Rightarrow b - a = 4$$

$$P(-2) = -16 + 4a + 2b + 2 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = 13$$

گام دوم: حالا دستگاه معادلات را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} b - a = 4 \xrightarrow{\times 4} 4b - 4a = 16 \\ 4a + 2b = 13 \\ \hline 6b = 29 \Rightarrow b = \frac{29}{6} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a = \frac{5}{6} \end{cases}$$

و خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$\frac{b}{a} = \frac{29}{5} = 5 \frac{4}{5}$$

امتحان
نهایی

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش پذیر و باقی مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۲ باشد.

(سؤال ۶ - امتحان نهایی فرداد ۱۴۰۴)

۱۹ اگر A ماتریسی 3×3 باشد به طوری که $|A| = \frac{1}{4}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $4A$ کدام است؟

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۳۲ (۴)

۴ (۳)

مشاوره این مدل سؤال‌ها، در امتحان‌های نهایی بسیار پرتکرار هستند و از نمونه‌های آسان سؤال‌های امتحان نهایی محسوب می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۴

$$|kA| = k^n |A|$$

اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آن گاه:

بنا به آن چه در درس باکس گفتیم، داریم:

$$|4A_{3 \times 3}| = 4^3 |A| = 4 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{4} = 32$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی



۲۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس $A^{10} + (A - I)^3$ کدام است؟

۱۲ (۱)

۵ (۲)

۱۰ (۳)

۶ (۴)

مشاوره اگر در سؤال‌ها، توان‌های بزرگی از یک ماتریس مربعی مانند A مطرح شده بود، ابتدا ماتریس A^2 را به دست آورید. احتمالاً A^2 برابر است با ماتریس صفر یا ضربی از I یا ضربی از A که در این صورت، محاسبهٔ توان‌های بزرگ، کاری ساده خواهد بود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

ابتدا ماتریس A^2 را به دست آورید.

Hint

درس‌Box

(۱) اگر ماتریس مربعی A به گونه‌ای باشد که $A^2 = A$ ، آن گاه به ازای همهٔ n های طبیعی داریم $A^n = A$. به عنوان مثال، ماتریس همانی (I) نمونه‌ای از این گونه ماتریس‌ها است، زیرا همواره داریم $I^n = I$.

(۲) ماتریس I با تمام ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ خود تعویض‌پذیر است، پس تمام اتحادهای جبری در مورد ماتریس مربعی A و ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن برقرار است، مثلاً:

$$(A - I)^3 = A^3 - 3A^2I + 3AI^2 - I^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I$$

توجه کنید که I عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها است، پس $AI = IA = A$.

گام اول: ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = A$$

گام دوم: از آن جا که $A^2 = A$ ، نتیجه می‌گیریم به ازای تمام n های طبیعی، داریم $A^n = A$.

گام سوم: بنا به قسمت (۲) درس‌باکس، داریم $(A - I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I$ ، بنا به گام دوم داریم $A^n = A$ ، پس:

$$(A - I)^3 = A - 3A + 3A - I = A - I$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$A^{10} + (A - I)^3 = A + (A - I) = 2A - I = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

در نتیجه بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر ۵ است.

پاسخ خیلی تشریحی

۲۱

دستگاه $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ مفروض است. اگر A ماتریس ضرایب این دستگاه و B ماتریس مقادیر معلوم آن باشد، مجموع

درایه‌های ماتریس $B \cdot (A + 7A^{-1})$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۵ امتحان نهایی هندسه (۳) خرداد ۱۴۰۴ طرح شده است.

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) در دستگاه دو معادله - دو مجهولی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و ماتریس $\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم نامیده می‌شود.

(۲) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه با شرط $ad - bc \neq 0$ ، ماتریس A وارون‌پذیر است و داریم $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

گام اول: در دستگاه دو معادله - دو مجهولی $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم است.

گام دوم: ماتریس A^{-1} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 1 - (-2) \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 7A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم: خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$(A + 7A^{-1})B = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$8 + 10 = 18$$

بنابراین پاسخ سؤال، برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(سؤال ۵ - امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

دستگاه $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

امتحان
نهایی

۲۲ اگر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایه سطر اول، ستون دوم ماتریس A کدام است؟

- (۱) $2/3$ (۲) $1/4$
(۳) $-1/4$ (۴) $-2/3$

مشاوره محاسبه ماتریس مجهول در یک معادله ماتریسی از تیپ‌های پرتکرار سؤال در آزمون‌های آزمایشی و کنکورها است که معمولاً روش حل آن‌ها، استفاده از خواص ماتریس وارون است.

پاسخ: گزینه ۴

حاصل ضرب هر ماتریس مربعی وارون‌پذیر در وارونش، برابر با ماتریس همانی است.

اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن گاه $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Hint

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تساوی داده‌شده را از سمت چپ در ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$ و از سمت راست در ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$ ضرب می‌کنیم تا در سمت چپ تساوی فقط A باقی بماند:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_I A \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1}}_I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

گام دوم: ماتریس‌های $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$ و $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \times 4 - 1 \times 3} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \times -2 - (-1) \times 4} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

گام سوم: خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} -32 & 23 \\ 14 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{10}]{\text{سطر ۱ ستون ۲}} \frac{-1}{10} \times 23 = -2/3$$

پس خواسته سؤال برابر است با $-2/3$.

۲۳ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} ij - a_{ij} & ; i > j \\ 1 & ; i \leq j \end{cases}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $I + A$ کدام است؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان 3×3 :

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس 3×3 ، $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ابتدا ستون‌های اول و دوم ماتریس را به ترتیب در سمت راست دترمینان بنویسید و از دستور زیر استفاده کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{(aei + bfg + cdh)}_{\text{مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر خط‌های قرمز}} - \underbrace{(ceg + afh + bdi)}_{\text{مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر خط‌های آبی}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به شرط داده‌شده، درایه‌های ماتریس A را محاسبه می‌کنیم، درایه‌های a_{11} ، a_{21} و a_{31} از رابطه بالایی به دست می‌آیند و سایر درایه‌ها ۱ هستند.

$$a_{11} = 1 \times 1 - a_{11} \Rightarrow 2a_{11} = 1 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = 2 \times 1 - a_{21} \Rightarrow 2a_{21} = 2 \Rightarrow a_{21} = 1$$

$$a_{31} = 3 \times 1 - a_{31} \Rightarrow 2a_{31} = 3 \Rightarrow a_{31} = \frac{3}{2} = 1.5$$

گام دوم: با توجه به گام قبل $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و در نتیجه داریم:

$$I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2.5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

گام سوم: بنا به دستور ساروس، برای محاسبه دترمینان ماتریس B داریم:

$$\begin{vmatrix} 3/2 & 1 & 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2.5 & 4 & 2 & 2.5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|B| = (3 + 1/2 + 4) - (3 + 6 + 2) = 1/2$$

درس Box

۲۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 0/5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0/2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 0/9 & 10 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $A^T B$ کدام است؟

۲) $-2/4$

۱) $2/4$

۴) $-1/2$

۳) $1/2$

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال ۳۴ کنکور ریاضی تیرماه ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۲

۱) اگر تمام درایه‌های بالا یا پایین قطر اصلی یک ماتریس مربعی صفر باشند، دترمینان آن ماتریس، برابر است با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی آن.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = adf$$

۲) اگر A و B دو ماتریسی مربعی هم‌مرتبه باشند، آن گاه $|AB| = |A| |B|$. از این مطلب نتیجه می‌شود که اگر n عددی طبیعی باشد آن گاه $|A^n| = |A|^n$.

گام اول: محاسبه دترمینان‌های دو ماتریس A و B را به کمک قسمت (۱) درس باکس، انجام می‌دهیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0/5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0/2 \end{vmatrix} = 0/5 \times \sqrt{2} \times 0/2 = \frac{1}{4} \times \sqrt{2} \times \frac{2}{10} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0/9 & 10 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 5 \times 6 \times -4 = -120$$

گام دوم: خواسته سؤال را به کمک قسمت (۲) درس باکس به دست می‌آوریم:

$$|A^T B| = |A^T| |B| = |A|^2 |B| = \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 \times (-120) = -\frac{2}{10 \times 10} \times 12 \times 10 = -\frac{24}{10} = -2/4$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $D = BA^T B$ کدام است؟

(سؤال ۳۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

۲) $\frac{8}{3}$

۱) ۸

۴) $-\frac{8}{3}$

۳) -۸

۲۵

در مثلث ABC با اضلاع $a = 3$ و $b = 6$ ، اگر $2h_a + h_b = 3h_c$ باشد، آن گاه محیط مثلث کدام است؟ (h_a) ارتفاع وارد بر ضلع $BC = a$ است.

۱۲/۶ (۲)

۱۱/۸ (۱)

۱۳/۲ (۴)

۱۲/۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

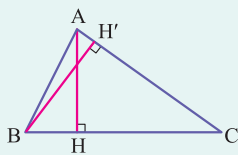
اندازه ارتفاعها را بر حسب اندازه اضلاع بنویسید.

Hint

درسی Box

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آنها برابر است.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} BH' \times AC \Rightarrow AH \times BC = BH' \times AC \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$$



گام اول: رابطه داده شده در صورت سؤال را نوشته و طرفین رابطه را بر h_c تقسیم می‌کنیم.

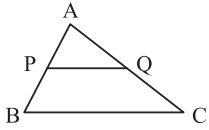
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$2h_a + h_b = 3h_c \Rightarrow \frac{2h_a}{h_c} + \frac{h_b}{h_c} = \frac{3h_c}{h_c} \Rightarrow \frac{2c}{a} + \frac{c}{b} = 3 \Rightarrow \frac{2c}{3} + \frac{c}{6} = 3 \xrightarrow{\times 6} 4c + c = 18 \Rightarrow 5c = 18 \Rightarrow c = 3.6$$

گام دوم: محیط مثلث ABC برابر است با:

$$a + b + c = 3 + 6 + 3.6 = 12.6$$

در شکل روبه‌رو PQ با BC موازی است. حاصل $\frac{2BP - 2CQ}{3AP - 2AQ}$ کدام است؟



$$\frac{PQ}{BC} \quad (۲)$$

$$\frac{BC}{PQ} - ۱ \quad (۴)$$

$$\frac{BC}{PQ} \quad (۱)$$

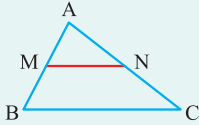
$$\frac{3PQ}{2BC} \quad (۳)$$

مشاوره با یک سؤال ترکیبی از «قضیه تالس» و «خواص تناسب» مواجهیم.

پاسخ: گزینه ۴

(۱) قضیه تالس و تعمیم آن

مطابق شکل، در مثلث ABC، پاره خط MN موازی با BC رسم شده است، داریم:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad (\text{قضیه تالس})$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (\text{تعمیم قضیه تالس})$$

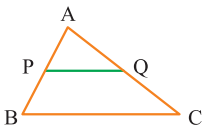
(۲) برخی از خواص تناسب

الف) اگر $\frac{a}{b} = k$ ، آن‌گاه $\frac{ma}{mb} = k$.

ب) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$.

پ) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ، آن‌گاه $\frac{ma+nc}{mb+nd} = k$.

گام اول: بنا به تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC، داریم $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ (*)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: بنا به خواص تناسب از تساوی (*)، داریم:

$$\frac{AP}{AB-AP} = \frac{AQ}{AC-AQ} = \frac{PQ}{BC-PQ} \Rightarrow \underbrace{\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{PQ}{BC-PQ}}_{(**)}$$

گام سوم: در (**)، کسرهای را معکوس می‌کنیم، داریم:

$$\frac{BP}{AP} = \frac{CQ}{AQ} = \frac{BC-PQ}{PQ}$$

در نتیجه:

$$\frac{2BP - 2CQ}{3AP - 2AQ} = \frac{BC-PQ}{PQ} = \frac{BC}{PQ} - \frac{PQ}{PQ} = \frac{BC}{PQ} - ۱$$

۲۷ در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $AB < A'B'$ و نسبت مساحت آن‌ها $\frac{۲۵}{۶۴}$ است. اگر M و M' به ترتیب وسط‌های BC و $B'C'$ باشند، نسبت $\frac{A'M'}{AM}$ کدام است؟

$\frac{۵}{۴}$ (۴)

$۳/۲$ (۳)

$\frac{۵}{۸}$ (۲)

$۱/۶$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

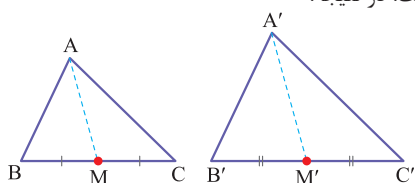
(۱) در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌های نظیر و همچنین نسبت محیط‌ها برابر با نسبت تشابه است.

(۲) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها، برابر با مجذور نسبت تشابه است.

گام اول: چون دو مثلث، دو زاویه برابر دارند، پس متشابه‌اند و $AB < A'B'$ ، نتیجه می‌گیریم مثلث ABC کوچک‌تر از مثلث $A'B'C'$ است. در نتیجه داریم:

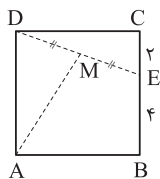
$$k^۲ = \frac{S}{S'} = \frac{۲۵}{۶۴} \Rightarrow k = \frac{۵}{۸}$$

گام دوم: در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های نظیر، برابر با نسبت تشابه است؛ در نتیجه:



$$\frac{AM}{A'M'} = k = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{A'M'}{AM} = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$$

پاسخ خیلی تشریحی



در شکل مقابل چهارضلعی ABCD مربع و M وسط DE است. طول AM کدام است؟

(۲) $\sqrt{30}$

(۱) $\sqrt{34}$

(۴) $2\sqrt{5}$

(۳) $3\sqrt{2}$

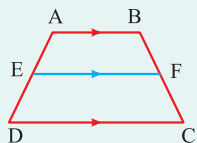
پاسخ: گزینه ۱

از M به اضلاع مربع عمود کنید.

Hint

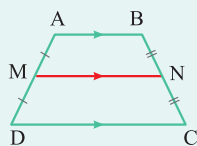
درس Box

۱) قضیه تالس در دوزنقه: در شکل زیر EF با قاعده‌های دوزنقه ABCD موازی است، داریم:



$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

۲) اگر وسط‌های دو ساق دوزنقه‌ای را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل با ساق‌های دوزنقه موازی و طول آن برابر است با میانگین طول‌های قاعده‌ها:

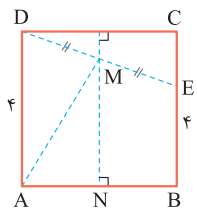


$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

گام اول: از نقطه M عمود MN را بر ضلع AB رسم می‌کنیم. واضح است که $MN \parallel AD \parallel BE$ ، پس طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{DM}{ME} = 1 \Rightarrow AN = NB = 3$$

گام دوم: MN پاره‌خطی است که وسط‌های ساق‌های دوزنقه ABED را به هم وصل کرده است، پس:



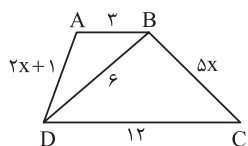
$$MN = \frac{BE + AD}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

گام سوم: با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث AMN، داریم:

$$AM = \sqrt{AN^2 + MN^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

پاسخ خیلی تشریحی

محیط دوزنقه در شکل مقابل کدام است؟



۲۵ (۲)

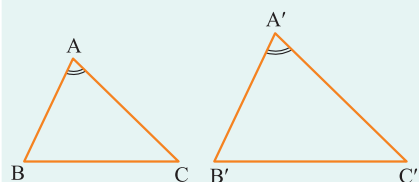
۲۰ (۴)

۱۸ (۱)

۳۰ (۳)

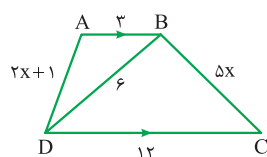
پاسخ: گزینه ۲

اگر دو مثلث، یک زاویه برابر داشته باشند و دو ضلع این زاویه برابر در این دو مثلث با هم متناسب باشند، آن گاه این دو مثلث متشابه هستند.



$$\hat{A} = \hat{A}', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

گام اول: دو مثلث ABD و BCD، بنا به حالت تساوی یک زاویه و تناسب اضلاع آن متشابه‌اند، زیرا بنا به قضیه موازی - مورب $\hat{ABD} = \hat{BDC}$ ، ضمن آن که:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{BD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \frac{BD}{DC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BDC$$

گام دوم: بنا به گام قبل، نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ است، پس داریم:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x+1}{5x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$$

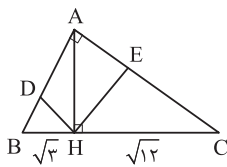
گام سوم: با معلوم بودن x ، می‌توانیم خواسته سؤال را به دست آوریم:

$$\text{محیط دوزنقه} = AB + BC + CD + AD = 3 + 10 + 12 + 5 = 30$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل، AH ارتفاع وارد بر وتر، DH نیمساز زاویه $\widehat{AHB}$ و EH نیمساز زاویه $\widehat{AHC}$ است. نسبت $\frac{EH}{DH}$ برابر با کدام است؟

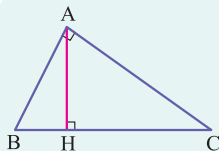


$$\begin{array}{l} \sqrt{3} \quad (2) \\ \frac{4}{3} \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \quad (1) \\ \sqrt{2} \quad (3) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box



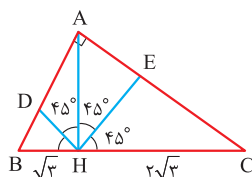
$$AH^2 = BH \times CH$$

(۱) اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

(۲) مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، AH ارتفاع وارد بر وتر است، داریم:

گام اول: بنا به رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AH^2 = BH \times CH = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6 \Rightarrow AH = \sqrt{6}$$



گام دوم: با توجه به شکل، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \\ \widehat{CAH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = \widehat{CAH} + \widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CAH}$$

گام سوم: می‌دانیم نسبت نیمسازهای متناظر در دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه دو مثلث است، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ \\ \widehat{ABH} = \widehat{CAH} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA \Rightarrow \frac{EH}{DH} = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای اثبات درستی گزاره «حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ است.» از کدام هم‌ارزی استفاده می‌کنیم؟

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge (p_3 \Rightarrow r) \quad (۱)$$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \vee (p_2 \Rightarrow r) \vee (p_3 \Rightarrow r) \quad (۲)$$

$$p_1 \wedge p_2 \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \vee (p_2 \Rightarrow r) \quad (۳)$$

$$p_1 \vee p_2 \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \quad (۴)$$

مشاوره تفاوت این سؤال با سؤال مشابه دیگر کنکورهای آزمایشی این است که باید دقت کنید که برای اثبات، فرض باید به ۳ جزء تقسیم گردد.

پاسخ: گزینه ۱

فرض باید به ۳ جزء تقسیم گردد.

Hint

درسی Box

روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: مسئله را به چند حالت که در ضمن همه حالت‌ها را پوشش دهند، تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

گام اول: در اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها، اگر فرض را به n جزء $p_1, p_2, \dots, p_n$ افراز کنیم، از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کنیم:

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

گام دوم: برای اثبات حکم داده‌شده، باید فرض را به ۳ جزء زیر افراز کنیم:

$$n = 3k + 2, n = 3k + 1, n = 3k$$

و در هر جزء ثابت کنیم که $n(n+1)(n+2)$ عددی مضرب ۳ است.

پس گزینه (۱) درست است.

حواست باشه: اثبات این قضیه با در نظر گرفتن همه حالت‌ها، به صورت زیر است:

$$n = 3k \Rightarrow n(n+1)(n+2) = \overbrace{3k(3k+1)(3k+2)}^q = 3q$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)} = 3q$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+2)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)}(3k+4) = 3q$$

پاسخ خیلی تشریحی

دو عدد $6k+1$ و $13k+3$ هر دو بر عدد طبیعی $a > 1$ بخش پذیرند. اگر $p > 3$ عددی اول باشد، p به کدام صورت ممکن است باشد؟

- (۱) $(a+1)n+2a$ (۲) $(a+1)n+a$
(۳) $(a+1)n+a-2$ (۴) $(a+1)n+a-1$

مشاوره سؤال بسیار خوبی است
مشابه کنکور ۱۴۰۴، حتماً آن را
تحلیل کنید.

پاسخ: گزینه ۲

از ویژگی‌های عادکردن، a را پیدا کنید.

Hint

درس Box

شکل اعداد اول

در تقسیم بر ۴	هر عدد اول $p > 2$ به یکی از صورت‌های $4k+1$ یا $4k+3$ است.
در تقسیم بر ۶	هر عدد اول $p > 3$ به یکی از صورت‌های $6k+1$ یا $6k+5$ است. (تمرین کتاب درسی)
مربع اعداد اول	مربع هر عدد اول $p > 3$ به صورت $24k+1$ است، پس در تقسیم بر ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۲ و ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

بررسی یک تیپ مهم عادکردن

اگر دو عبارت $f(k)$ و $g(k)$ ، هر دو بر a بخش پذیر باشند، a هر دو عبارت را عاد می‌کند. سمت راست دو طرف رابطه عادکردن را در اعداد مناسب ضرب کرده و بعد با جمع یا تفریق عبارت‌های سمت راست، کاری می‌کنیم که در سمت راست k حذف شده و یک عدد باقی بماند، تا بتوانیم a را به دست آوریم.

گام اول: اول سعی می‌کنیم a را پیدا کنیم. هر دو عدد $6k+1$ و $13k+3$ بر a بخش پذیرند، پس a هر دو عدد را عاد می‌کند.
گام دوم:

$$a \mid 6k+1 \xrightarrow{\times 13} a \mid 78k+13$$

$$a \mid 13k+3 \xrightarrow{\times (-6)} a \mid -78k-18$$

سمت راست دو رابطه را جمع می‌کنیم، پس $a \mid -5$ ، در نتیجه $a \mid 5$ و چون $a > 1$ ، پس $a = 5$.

گام سوم: a را در گزینه‌ها قرار می‌دهیم:

غیر اول $\rightarrow$ زوج و بزرگ‌تر از ۲ $(6n+10 = 2(3n+5))$:گزینه (۱)

$6n+5$:گزینه (۲)

غیر اول $\rightarrow$ مضرب ۳ و بزرگ‌تر از ۳ $(6n+3 = 3(2n+1))$:گزینه (۳)

غیر اول $\rightarrow$ زوج و بزرگ‌تر از ۳ $(6n+4 = 2(3n+2))$:گزینه (۴)

پس عدد اول $p > 3$ در بین گزینه‌ها فقط به صورت $6n+5$ ممکن است نوشته شود.

اگر عدد طبیعی $a > 3$ اعداد $7m+2$ و $11m+4$ را عاد کند، کدام مورد نمی‌تواند عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

(سؤال ۳۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

- (۱) $ak+1$ (۲) $ak+3$
(۳) $ak+5$ (۴) $ak+7$

باقی مانده تقسیم عدد m بر دو عدد ۵ و ۷ به ترتیب برابر ۱ و ۳ است. کدام گزینه در مورد باقی مانده تقسیم عدد m بر ۳۵

درست است؟

(۲) مضرب ۳ است.

(۱) اول است

(۴) یک رقمی است.

(۳) مربع کامل است.

مشاوره آماده باشید که امسال ممکن است از قضیه تقسیم سؤال در کنکور بیاید.

پاسخ: گزینه ۱

دو بار قضیه تقسیم را بنویسید و آن‌ها را در اعداد مناسب ضرب کنید.

Hint

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، با تقسیم a بر b ، اعداد صحیح q و r وجود دارند که: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی گام اول: دو رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m = 5q + 1 \\ m = 7q' + 3 \end{cases}$$

گام دوم: برای این که مقسوم علیه تبدیل به ۳۵ شود، رابطه اول را در ۷ و دومی را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 7m = 35q + 7 \\ 5m = 35q' + 15 \end{cases} \rightarrow 2m = 35(q - q') - 8$$

گام سوم: دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$m = 35\left(\frac{q - q'}{2}\right) - 4 = 35k - 4$$

گام چهارم: باقی مانده نباید منفی باشد، پس یکی از خارج قسمت کم کرده و یک ۳۵ تا به ۴- اضافه می‌کنیم.

$$m = 35(k - 1) + 35 - 4 \Rightarrow m = 35(k - 1) + 31$$

پس باقی مانده m بر ۳۵ برابر ۳۱ است که عددی اول است.

نکته

حواستان به شرط باقی مانده باشد. باقی مانده هیچ گاه منفی نبوده و از مقسوم علیه کوچک تر است. در بسیاری از مسئله‌ها کلید حل مسئله در دستان همین نکته قرار گرفته است!

در تقسیم عدد a بر b اگر باقی مانده به صورت ظاهری منفی باشد، آن قدر از مقسوم علیه (b) به آن اضافه می‌کنیم تا در محدوده خودش قرار گیرد. مثلاً داریم:

$$a = 8k - 10 \xrightarrow{+8} 8k' - 2 = 8k'' + 6 \Rightarrow \text{باقی مانده } a \text{ بر } 8$$

$$a = 15k - 23 \xrightarrow{+2 \times 15} 15k' + 7 \Rightarrow \text{باقی مانده } a \text{ بر } 15$$

باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد. باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)

(سؤال ۵ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۲)

امتحان
نهایی

۳۴ اگر $b \mid c^2$ ، $2a \mid b$ حاصل (a^2, a^5) ، $(b, (c^3, a))$ کدام است؟

$$|c|^2$$

$$|b|^2$$

$$|a|^4$$

$$|a|^3$$

پاسخ: گزینه ۲

اگر $a \mid b$ آن گاه $(a, b) = |a|$ و $[a, b] = |b|$.

Hint

درس Box

ب.م.م و ک.م.م

a, b عدد ب.م.م دو عدد $(a, b) = d$	$d \mid a$ $d \mid b$	ضرب عامل‌های مشترک با توان کم‌تر $(a, b) =$
a, b عدد ک.م.م دو عدد $[a, b] = c$	$a \mid c$ $b \mid c$	ضرب عامل‌های مشترک با توان بیشتر در غیرمشترک‌ها $[a, b] =$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$a \mid 2a, 2a \mid b \xrightarrow[\text{تعدی}]{\text{قانون}} a \mid b$$

گام دوم:

$$a \mid b \xrightarrow{\times b} a \mid b^2, b^2 \mid c^2 \rightarrow a \mid c^2$$

گام سوم: $a \mid c^2$ را عاد می‌کند، پس ب.م.م آن‌ها همان قدرمطلق a می‌شود، یعنی $(c^2, a) = |a|$.

گام چهارم: $a \mid b$ پس $(a, b) = |a|$. از طرفی $a^2 \mid a^5$ پس $(a^2, a^5) = |a^2|$.

گام پنجم: چون $|a| \mid |a^2|$ پس داریم: $[|a|, |a^2|] = |a^2| = |a|^2$ عبارت داده شده

$$a \mid b \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$

نکته

۳۵

اگر $x + y = 13$ باشد، باقی مانده تقسیم عدد $x^3 + y^3$ بر ۱۲ چه مقداری ممکن است داشته باشد؟

- (۲) ۱ یا ۷
(۴) ۱ یا ۳ یا ۷

- (۱) فقط ۱
(۳) ۲ یا ۷

پاسخ: گزینه ۲

$x^3 - x$ مضرب ۶ است.

Hint

گام اول: $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$ ، پس $x^3 - x$ ضرب سه عدد متوالی بوده و بر ۶ بخش پذیر است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم:

$$x^3 - x + y^3 - y = 6k \Rightarrow x^3 + y^3 - \overbrace{(x + y)}^{13} = 6k$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 6k + 13 + 1 = 6(k + 2) + 1$$

پس باقی مانده $x^3 + y^3$ بر ۶ برابر ۱ است، در نتیجه $x^3 + y^3 = 6q + 1$.

گام سوم: باید کاری کنیم که مقسوم علیه برابر ۱۲ بشود. برای q دو حالت در نظر می گیریم:

$$q = 2t \text{ (زوج)} \Rightarrow x^3 + y^3 = 6(2t) + 1 = 12t + 1$$

$$q = 2t + 1 \text{ (فرد)} \Rightarrow x^3 + y^3 = 6(2t + 1) + 1 = 12t + 7$$

پس باقی مانده تقسیم $x^3 + y^3$ بر ۱۲ برابر ۱ یا ۷ می تواند باشد.

اگر $(a+b)(a+c)(a+b+c)$ عددی فرد باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + c^2 + 2b + 2c$ بر ۸ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۳

(۳) ۱

(۴) ممکن است هر کدام از اعداد ۰، ۱، ۳ باشد.

مشاوره سؤال بسیار مهم و دشوار شده تمرین کتاب درسی! در سؤال باقی‌مانده بر ۸ یاد نکته مهم مربع اعداد فرد باشید!

پاسخ: گزینه ۲

Hint

زوج یا فرد بودن a, b, c را پیدا کنید. حواستان باشد مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است.

گام اول: ضرب سه عدد $a+b$ و $a+c$ و $a+b+c$ فرد است، پس هر سه عدد فرد هستند.

گام دوم:

$$\underbrace{a+b+c}_{\text{فرد}} = \text{فرد} \Rightarrow c = \text{زوج} \xrightarrow{a+c=\text{فرد}} a \text{ فرد}$$

حالا a فرد و $a+b$ نیز فرد است، پس b زوج است. پس شد:

زوج: c ، زوج: b ، فرد: a

گام سوم: عبارت داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a^2 + \underline{b^2} + \underline{c^2} + \underline{2b} + \underline{2c} = a^2 + (b+1)^2 - 1 + (c+1)^2 - 1$$

گام چهارم: $b+1$ و $c+1$ فرد هستند، از طرفی مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است، پس داریم:

$$a^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 - 2 = 8k+1 + 8k'+1 + 8k''+1 - 2 = 8(k+k'+k'')+1$$

پس باقی‌مانده تقسیم عبارت داده‌شده بر ۸ برابر ۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی

تعداد زیرمجموعه‌های A ، ۲۸ تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ بوده و تعداد زیرمجموعه‌های B نیز ۱۲ تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ است. تعداد زیرمجموعه‌های $A - B$ چند تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $B - A$ است؟

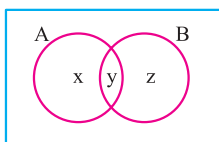
۱۴ (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۴ (۴)

مشاوره با این که مجموعه‌ها حجم نسبتاً کمی دارد، اما طراحان کنکور همیشه یک سؤال از آن می‌دهند، پس از آن غافل نباشید.

پاسخ: گزینه ۴

یک نمودار ون بکشید. اگر A دارای n عضو باشد، 2^n زیرمجموعه دارد.

گام اول: یک نمودار ون به صورت زیر می‌کشیم و تعداد عضوهای هر قسمت را در آن می‌نویسیم:



گام دوم: A دارای $x + y$ عضو و B دارای $y + z$ عضو است، پس داریم:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A \\ 2^{y+z} = \text{تعداد زیرمجموعه‌های } B \\ 2^y = \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A \cap B \end{cases}$$

گام سوم: معادله‌های گفته‌شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 28 + 2^y \Rightarrow 2^{x+y} - 2^y = 28 \Rightarrow 2^y(2^x - 1) = 28 \\ 2^{y+z} = 12 + 2^y \Rightarrow 2^{y+z} - 2^y = 12 \Rightarrow 2^y(2^z - 1) = 12 \end{cases}$$

گام چهارم: x, y, z اعداد صحیح و نامنفی هستند. با کمی جست‌وجو داریم:

$$2^y(2^x - 1) = 4 \times 7 \Rightarrow x = 3, y = 2$$

$$2^y(2^z - 1) = 4 \times 3 \Rightarrow z = 2, y = 2$$

گام پنجم:

$$\begin{aligned} A - B \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } &= 2^x = 2^3 = 8 \\ B - A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } &= 2^z = 2^2 = 4 \end{aligned} \Rightarrow 8 - 4 = 4$$

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

A و B دو مجموعه ناتهی هستند که $A \times B = B \times A$. اگر مجموعه‌های X و Y به گونه‌ای باشند که $Y - X \subseteq A$ و $Y - X \subseteq B'$ ، کدام گزاره درست است؟ (U مجموعه مرجع است).

$$(1) \forall x; (x \in Y \Rightarrow x \in X)$$

$$(2) \forall x; (x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

$$(3) \exists x \in U; x \in A - B$$

(4) گزینه‌های (1)، (2) و (3) هر سه درست هستند.

پاسخ: گزینه ۱

از فرض داده شده نتیجه می‌شود: $A = B$.

گام اول: چون A و B دو مجموعه ناتهی بوده و $A \times B = B \times A$ ، طبق نکته $A = B$.

گام دوم: به جای B' می‌توانیم A' قرار دهیم، پس داریم:

$$\begin{cases} Y - X \subseteq A \\ Y - X \subseteq A' \end{cases} \xrightarrow{\cap} (Y - X) \subseteq \underbrace{A \cap A'}_{\emptyset} \Rightarrow Y - X = \emptyset$$

گام سوم: مجموعه $Y - X$ برابر $\emptyset$ شده است، پس هر عضوی که در Y بوده، در X هم بوده است. به زبان دیگر $Y \subseteq X$ و داریم:

$$\forall x; (x \in Y \Rightarrow x \in X)$$

$$A \times B = B \times A \xrightarrow{A, B \neq \emptyset} A = B$$

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

نکته

۳۹ بین ۳ مجموعه A، B و C رابطه $A - B \subseteq C$ برقرار است. کدام نتیجه گیری الزاماً درست است؟

(۱) $A - C \subseteq B$

(۲) $A \cap C \subseteq B$

(۳) $A \cap B \subseteq C$

(۴) $C - A \subseteq B$

مشاوره در سالهای اخیر چندین بار مشابه این سؤال در کنکور آمده است. حواستان باشد روش شماره گذاری معمولاً سریع تر از جبر مجموعه ها جواب می دهد.

پاسخ: گزینه ۱

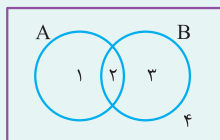
یک نمودار ون برای سه مجموعه رسم کرده و نواحی را شماره گذاری کنید. ببینید چه جوری می شود که شرط $A - B \subseteq C$ درست باشد.

Hint

روش شماره گذاری برای ساده سازی عبارت های مجموعه:

درس Box

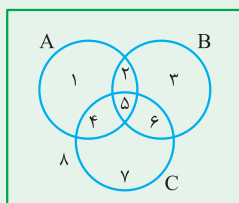
اگر یک عبارت مجموعه ای شامل A، B داشته باشیم، یک نمودار ون به صورت زیر رسم می کنیم و نواحی را شماره گذاری می کنیم.



حالا فرض می کنیم: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ و عبارت داده شده را ساده می کنیم. در پایان می بینیم ساده شده کدام گزینه با عبارت به دست آمده برابر است.

اگر عبارت داده شده شامل ۳ مجموعه A، B و C باشد، نمودار ون را به صورت زیر رسم می کنیم:

نکته



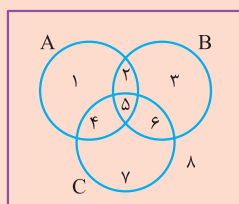
اگر یک تساوی مجموعه ای داشته باشیم، بررسی می کنیم که دو طرف تساوی شامل چه نواحی ای هستند.

نواحی یکسان را خط می زنیم و نتیجه می گیریم که عضوی در نواحی باقی مانده نباید وجود داشته باشد، یعنی آن ها برابر $\emptyset$ هستند.

اگر یک رابطه زیرمجموعه ای به صورت $\square \subseteq \bigcirc$ (مثل این سؤال) داشته باشیم، بررسی می کنیم که $\square$ و $\bigcirc$ هر کدام شامل چه نواحی ای هستند. اگر ناحیه ای در $\square$ باشد، ولی در $\bigcirc$ نباشد، نتیجه می گیریم که نباید عضوی در آن ناحیه وجود داشته باشد و آن را $\emptyset$ در نظر می گیریم.

گام اول: بهتر است از روش شماره گذاری استفاده کنیم. یک نمودار ون به صورت زیر رسم کرده و نواحی را شماره گذاری می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: $A - B = \{1, 4\}$ و $C = \{4, 5, 6, 7\}$ است. اگر $A - B \subseteq C$ باشد، $1 \in A - B$ ولی $1 \notin C$ پس هیچ عضوی در ناحیه ۱ نباید وجود داشته باشد، پس $A = \{2, 5, 4\}$ باید باشد. (ناحیه ۱ باید $\emptyset$ باشد).

گام سوم: حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) گزینه: $A - C \subseteq B \Rightarrow \{2, 5, 4\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{2\} \subseteq B$ (همین گزینه درست است)

(۲) گزینه: $A \cap C \subseteq B \Rightarrow \{4, 5\} \subseteq B$ ✗ (ناحیه ۴ در B نیست)

(۳) گزینه: $A \cap B \subseteq C \Rightarrow \{2, 5\} \subseteq C$ ✗ (ناحیه ۲ در C نیست)

(۴) گزینه: $C - A \subseteq B \Rightarrow \{6, 7\} \subseteq B$ ✗ (ناحیه ۷ در B نیست)

A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟

(سؤال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

$$A = U \quad (۲)$$

$$B = U \quad (۱)$$

$$A = \emptyset \quad (۴)$$

$$B = A \quad (۳)$$

کنکور

$A \times B$ مجموعه‌ای ۶ عضوی بوده و $(۱, ۳)$ و $(۳, ۴)$ دو عضو آن هستند. زوج مرتب حتماً عضو $A \times B$ بوده و زوج مرتب قطعاً عضو $A \times B$ نیست.

$$(۲, ۳) - (۱, ۴) \quad (۲)$$

$$(۱, ۲) - (۱, ۴) \quad (۱)$$

$$(۲, ۱) - (۳, ۳) \quad (۴)$$

$$(۳, ۲) - (۳, ۳) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

اگر $(x, y) \in A \times B$ ، آن‌گاه $x \in A$ و $y \in B$.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق تعریف، $A \times B$ شامل زوج مرتب‌هایی مثل (x, y) است که $x \in A$ و $y \in B$.

پس داریم:

$$\begin{cases} (۱, ۳) \in A \times B \Rightarrow ۱ \in A, ۳ \in B \\ (۳, ۴) \in A \times B \Rightarrow ۳ \in A, ۴ \in B \end{cases}$$

گام دوم:

$$\begin{cases} ۱ \in A, ۴ \in B \Rightarrow (۱, ۴) \in A \times B \\ ۳ \in A, ۳ \in B \Rightarrow (۳, ۳) \in A \times B \end{cases}$$

پس زوج مرتب‌های $(۱, ۴)$ و $(۳, ۳)$ قطعاً عضو $A \times B$ هستند.

گام سوم: مجموعه $A \times B$ دارای ۶ عضو است، پس دو حالت داریم:

(۱) A دارای ۲ عضو و B دارای ۳ عضو بوده است: در این صورت $A = \{۱, ۳\}$ و $B = \{۳, ۴, x\}$ بوده است. اگر $x = ۲$ باشد،

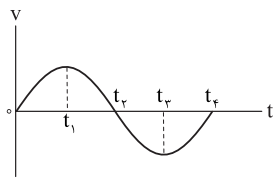
زوج مرتب‌های $(۱, ۲)$ و $(۳, ۲)$ عضو $A \times B$ هستند.

(۲) A دارای ۳ عضو و B دارای ۲ عضو بوده است: در این صورت $A = \{۱, ۳, x\}$ و $B = \{۳, ۴\}$ بوده است. اگر $x = ۲$ باشد،

زوج مرتب $(۲, ۳)$ عضو $A \times B$ است.

گام چهارم: در هیچ کدام از حالت‌های بالا، زوج مرتب $(۲, ۱)$ عضو $A \times B$ نیست.

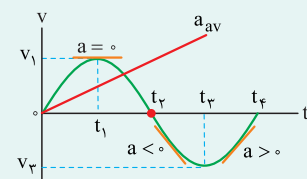
نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدامیک از موارد زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟



- (۱) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 ، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است.
- (۲) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 ، اندازهٔ شتاب متحرک کاهش یافته است.
- (۳) در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 ، شتاب متحرک پیوسته در خلاف جهت محور x است.
- (۴) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 ، حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box



برخی نکات مهم در نمودار سرعت - زمان:

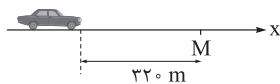
- محور قائم بیانگر سرعت متحرک است و با رسم خطی افقی از هر نقطهٔ نمودار و برخورد با محور قائم، سرعت متحرک به دست می‌آید.
- شیب خط مماس بر نمودار در هر نقطه، بیانگر شتاب لحظه‌ای است.
- شیب خط قاطع بین هر دو نقطه، بیانگر شتاب متوسط است.
- در بازه‌ای که نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود، حرکت کندشونده و در بازه‌ای که نمودار از محور زمان فاصله می‌گیرد، حرکت تندشونده است.
- سطح زیر نمودار بیانگر جابه‌جایی متحرک است. اگر سطح بالای محور t باشد، جابه‌جایی مثبت و اگر زیر محور t باشد، جابه‌جایی منفی است.

با توجه به توضیحات درس باکس:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینهٔ (۱): در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 ، جابه‌جایی (سطح زیر نمودار) مخالف صفر است. ✗
- گزینهٔ (۲): در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 ، اندازهٔ شیب خط مماس در حال افزایش است و بنابراین اندازهٔ شتاب افزایش یافته است. ✗
- گزینهٔ (۳): در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 ، شیب خط مماس، مثبت و بنابراین شتاب در جهت محور x است. ✗
- گزینهٔ (۴): در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 ، نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود (کندشونده) و سپس در بازهٔ t_3 تا t_4 از محور زمان فاصله می‌گیرد (تندشونده). ✓

در شکل زیر، خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت ثابت 30 km/h در حال حرکت است. مدت چند دقیقه فاصله خودرو از نقطه M کمتر یا مساوی 150 m است؟



۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از روابط حرکت سرعت ثابت و مفهوم ریاضی فاصله از یک نقطه، خواسته مسئله را به دست آورید.

Hint

در حرکت با سرعت ثابت، اگر بخواهیم فاصله متحرک از یک نقطه، کمتر یا مساوی d باشد:

درس Box

$$\Delta x \leq vd \Rightarrow v(\Delta t) \leq vd$$

گام اول: نقطه M را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

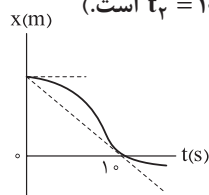


$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow{\Delta x = 150 \text{ m} = 0.15 \text{ km}} v(\Delta t) \leq 0.15 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{0.15}{30} = 0.005 \text{ h} = 0.3 \text{ min}$$

گام دوم: منظور از فاصله، در دو طرف نقطه M است؛ بنابراین در ۲ بازه زمانی 0.3 دقیقه‌ای، فاصله کمتر یا مساوی 150 m است:

$$\Delta t_{\text{کل}} = 2(0.3) = 0.6 \text{ min}$$

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در 10 ثانیه اول اندازه سرعت متوسط متحرک برابر 4 m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در همین مدت در SI کدام است؟ (در شکل خط چین افقی مماس بر نمودار در لحظه $t_1 = 0$ و خط چین مایل، مماس بر نمودار در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ است.)



(۲) $0 / 2 \vec{i}$

(۱) $0 / 2 \vec{i}$

(۴) $0 / 4 \vec{i}$

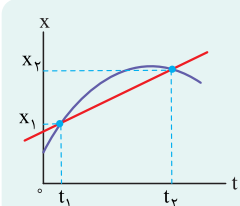
(۳) $0 / 4 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با توجه به داشتن اندازه سرعت متوسط، مکان اولیه را به دست آورید و سپس با توجه به داشتن شیب خط قاطع، شتاب متوسط را در بازه خواسته شده محاسبه کنید.

Hint

درس Box



$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

در نمودار مکان - زمان، شیب خط قاطع بیانگر سرعت متوسط است:

گام اول: با استفاده از تعریف سرعت متوسط، مکان اولیه را به دست می‌آوریم:

$$|v_{av}| = 4 \text{ m/s} \xrightarrow{v_{av} < 0} \frac{x_{10s} - x_0}{10 - 0} = -4 \Rightarrow \frac{0 - x_0}{10} = -4 \Rightarrow x_0 = 40 \text{ m} \Rightarrow \vec{x}_0 = (40 \text{ m}) \vec{i}$$

گام دوم: شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ، افقی و بنابراین $v_0 = 0$ است.

گام سوم: شیب خط مماس بر نمودار در $t = 10 \text{ s}$ همان v_{10s} است:

$$\vec{v}_{10s} = \frac{(0 - 40) \vec{i}}{10} = (-4 \text{ m/s}) \vec{i}$$

گام چهارم: با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_{10s} - \vec{v}_0}{10} = \frac{(-4 - 0) \vec{i}}{10} = (-0.4 \text{ m/s}^2) \vec{i}$$

به جای گام‌های اول تا سوم می‌توانستیم بگوییم که مطابق شکل، خط مماس بر نمودار در لحظه $t = 10 \text{ s}$ همان خط قاطع بین دو لحظه $t = 0$ و $t = 10 \text{ s}$ است و در نتیجه:

$$\vec{v}_{10s} = \vec{v}_{av} = (-4 \text{ m/s}) \vec{i}$$

نکته

متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند. اگر تندی متحرک در مکان‌های $x_1 = 3 \text{ m}$ و $x_2 = -9 \text{ m}$ به ترتیب برابر 16 m/s و 20 m/s باشد، شتاب متحرک در SI کدام است؟

- (۱) $6 \vec{i}$ (۲) $-6 \vec{i}$
(۳) $12 \vec{i}$ (۴) $-12 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

از رابطه مستقل از زمان در حرکت شتاب ثابت، خواسته مسئله را به دست آورید.

Hint

درس Box

در حرکت شتاب ثابت، اغلب می‌توان مسائل را از چند روش حل کرد. با تسلط بر روابط زیر، می‌توانیم کوتاه‌ترین راه‌حل‌ها را استفاده کنیم:

معادله مکان - زمان:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

معادله سرعت - زمان:

$$v = at + v_0$$

معادله مستقل از زمان:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

معادله سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{v + v_0}{2}$$

معادله مستقل از شتاب:

$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\Delta t$$

معادله مستقل از سرعت اولیه:

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + vt + x_0$$

x = مکان متحرک در لحظه t (m)

x_0 = مکان اولیه یا مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (m)

a = شتاب (m/s^2)

v_0 = سرعت اولیه یا سرعت متحرک در لحظه $t = 0$ (m/s)

v = سرعت متحرک در لحظه t (m/s)

t = زمان (s)

$\Delta x = x - x_0$ = جابه‌جایی (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓



با استفاده از معادله مستقل از زمان، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow (-20)^2 - (16)^2 = 2a(-9 - 3) \Rightarrow a = \frac{(20^2 - 16^2)}{2(-12)} = \frac{144}{-24} = -6 \text{ m/s}^2$$

شکل برداری شتاب حرکت، برحسب بردار یکه به صورت $(-6 \text{ m/s}^2)\vec{i}$ است.

معادله سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t - 6$ است. سرعت متوسط متحرک در $5/0$ ثانیه پنجم چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $3\vec{i}$ (۲) $-3\vec{i}$
(۳) $4\vec{i}$ (۴) $-4\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از روابط سرعت متوسط در حرکت شتاب ثابت، مسئله را حل کنید.

Hint

درس Box

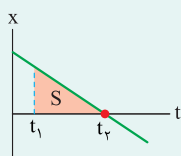
در حرکت شتاب ثابت، سرعت متوسط، از روش‌های مختلفی به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

بالای محور زمان
پایین محور زمان

$$v_{av} = \frac{\pm S}{\Delta t}$$



با استفاده از روابط حرکت شتاب ثابت تندی متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow \vec{v}_1 = (4(2) - 6)\vec{i} = (2 \text{ m/s})\vec{i} \\ t_2 = 2/5 \text{ s} \Rightarrow \vec{v}_2 = (4(2/5) - 6)\vec{i} = (-4 \text{ m/s})\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} = \frac{(2 + (-4))\vec{i}}{2} = (-1 \text{ m/s})\vec{i}$$

تندی خودرویی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در هر دو لحظه $t_1 = 4 \text{ s}$ و $t_2 = 8 \text{ s}$ برابر 6 m/s است. اگر شتاب متحرک در جهت محور x باشد، سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $36 \vec{i}$ (۲) $-36 \vec{i}$
(۳) $18 \vec{i}$ (۴) $-18 \vec{i}$

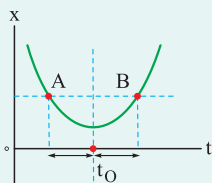
پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از تقارن سهمی در حرکت شتاب ثابت، مسئله را حل کنید.

Hint

درس Box

نمودار $x - t$ حرکت شتاب ثابت به صورت سهمی است و همه ویژگی‌های تقارن در سهمی برای آن برقرار است:

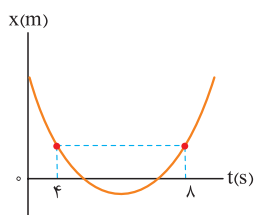


در نمودار بالا، دو نقطه A و B که در فاصله زمانی برابری از مرکز تقارن قرار دارند، دارای مکان برابر و سرعت‌های هم‌اندازه و قرینه هستند:

$$\begin{cases} t_O = \frac{t_A + t_B}{2} \\ x_A = x_B \\ \vec{v}_A = -\vec{v}_B \end{cases}$$

گام اول: با استفاده از داده‌های مسئله، نمودار مکان - زمان متحرک را به طور کیفی رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\Rightarrow \begin{cases} v_{4s} = -6 \text{ m/s} \\ v_{8s} = 6 \text{ m/s} \end{cases}$$

گام دوم: در حرکت شتاب ثابت، شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی ثابت است:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6 - (-6)}{8 - 4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}^2$$

گام سوم: از معادله سرعت - زمان در حرکت شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a=3 \text{ m/s}^2]{v_{4s}=6 \text{ m/s}} 6 = 3(4) + v_0 \Rightarrow v_0 = -18 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_0 = (-18 \text{ m/s})\vec{i}$$

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 6t + 11$ است.

در بازه های که سرعت متحرک از $(2 \text{ m/s})\vec{i}$ به $(-6 \text{ m/s})\vec{i}$ می رسد، جابه جایی متحرک بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $-4\vec{i}$ (۲) $-8\vec{i}$ (۳) $4\vec{i}$ (۴) $8\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۱

Hint

با توجه به معادله مکان - زمان، شتاب حرکت را حساب کنید. سپس با توجه به این که شتاب متوسط در تمام بازه ها همان شتاب ثابت متحرک است، بازه زمانی جابه جایی را به دست بیاورید و در انتها خواسته مسئله را محاسبه کنید.

درس Box

در حرکت با شتاب ثابت، مقدار شتاب متوسط در تمام بازه های زمانی ثابت و برابر همان شتاب جسم است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$a_{av} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

گام اول: با توجه به این که معادله مکان - زمان، درجه دوم است، شتاب ثابت جسم را به دست می آوریم:

$$x = -2t^2 + 6t + 11 \xrightarrow{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0} a = -4 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: با توجه به درس باکس، شتاب متوسط در همه بازه های زمانی -4 m/s^2 است:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -4 = \frac{-6 - 2}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ s}$$

گام سوم: از رابطه مستقل از شتاب، جابه جایی را به دست می آوریم:

$$\Delta x = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}(\Delta t) = \frac{(-6 + 2)\vec{i}}{2}(2) = (-4 \text{ m})\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی

خودرویی در مسیر مستقیم با تندی 90 km/h در حال حرکت است. در لحظه‌ای، راننده خودرو ترمز می‌گیرد و تندی خودرو با شتاب ثابت کاهش می‌یابد و خودرو پس از طی مسافت 75 m متوقف می‌شود. اندازه جابه‌جایی خودرو در ۲ ثانیه آخر حرکت آن چند متر است؟

- ۲۵ (۱) $12/5$ (۲) $50/3$ (۳) $25/3$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا شتاب توقف را به دست آورید و سپس از معادله سرعت، پاسخ را به دست آورید.

Hint

درس Box

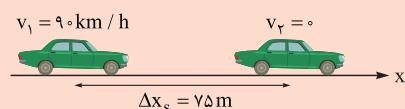
هنگامی که خودرویی با تندی ثابت v ، با شتاب ثابت a ترمز می‌گیرد؛ مسافت طی شده از لحظه شروع ترمز تا لحظه توقف (Δx_s) و زمان توقف (t_s) از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_s = \left| \frac{-v^2}{2a} \right|$$

$$t_s = \left| \frac{-v}{a} \right|$$

گام اول: ابتدا یک شکل از وضعیت مسئله رسم می‌کنیم:

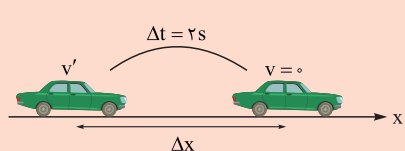
پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: از رابطه مستقل از زمان، شتاب توقف را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \quad \xrightarrow{v_1 = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}} \quad a = \frac{0 - (25)^2}{2(75)} = -\frac{25}{6} \text{ m/s}^2$$

گام سوم: سرعت متحرک در ۲ ثانیه قبل از توقف را محاسبه و سپس اندازه جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:



$$v = at + v' \Rightarrow 0 = -\frac{25}{6}(2) + v' \Rightarrow v' = \frac{25}{3} \text{ m/s}$$

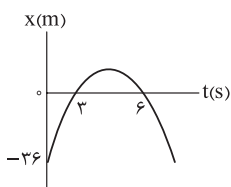
$$\Delta x = \frac{v + v'}{2}(\Delta t) = \frac{0 + \frac{25}{3}}{2}(2) = \frac{25}{3} \text{ m}$$

متحرکی روی محور x با شتاب ثابت 3 m/s^2 ترمز می‌کند و پس از طی مسافت 200 متر می‌ایستد. در ۳ ثانیه آخر حرکتش، چند متر جابه‌جا می‌شود؟

(سؤال ۵۱ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت اول)

- ۹ (۱) $13/5$ (۲) 18 (۳) 27 (۴)

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این متحرک در ۴ ثانیه دوم چند متر بر ثانیه است؟



۳ (۱)

۳/۱۲۵ (۲)

۶ (۳)

۶/۲۵ (۴)

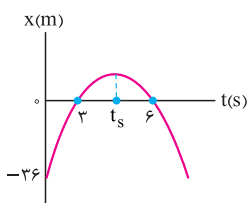
پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا با استفاده از تقارن سهمی، زمان توقف متحرک را به دست آورید. سپس با نوشتن معادله جابه‌جایی، شتاب و سرعت اولیه را محاسبه و با رسم نمودار $v-t$ خواسته مسئله را حساب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با استفاده از تقارن نمودار داریم:

$$t_s = \frac{3+6}{2} = 4.5 \text{ s}$$



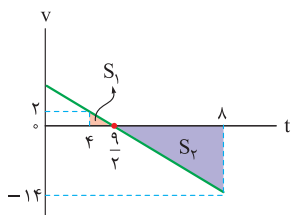
$$v_s = 0 \Rightarrow a(4.5) + v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = -\frac{9}{2}a \quad (1)$$

گام دوم: با داشتن معادله (۱) و جابه‌جایی در بازه ۰ تا ۳ ثانیه، داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \xrightarrow[v_0 = -\frac{9}{2}a]{\Delta x = 36 \text{ m}, t = 3 \text{ s}} 36 = \frac{1}{2}a(3)^2 + (-\frac{9}{2}a)(3) \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 18 \text{ m/s} \end{cases}$$

گام سوم: با به دست آوردن معادله سرعت - زمان و رسم نمودار آن خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 18$$



$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{4} = \frac{0.5 + 24.5}{4} = 6.25 \text{ m/s}$$

۵۰

جهت حرکت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کند، در لحظه $t = 4$ s تغییر می کند. اندازه جابه جایی متحرک در ۵ ثانیه اول، چند برابر مسافت طی شده توسط آن در ۳ ثانیه دوم است؟

- ۱) ۳ ۲) ۵ ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $\frac{17}{5}$

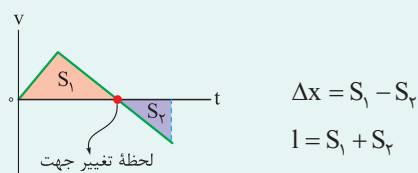
پاسخ: گزینه ۱

Hint

کریس Box

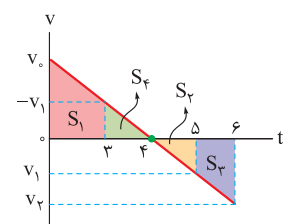
نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم و سپس با استفاده از سطح زیر نمودار، نسبت خواسته شده را به دست آورید.

رسم نمودار سرعت - زمان در اغلب مسائل به ساده تر شدن حل سؤال منجر می شود (به ویژه در مسائلی که جابه جایی و مسافت متحرک خواسته می شود).



گام اول: با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: اگر سرعت اولیه را v_0 فرض کنیم، با توجه به شتاب متحرک، سرعت در لحظات خواسته شده سؤال را به دست می آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=0} 0 = 4a + v_0 \Rightarrow a = -\frac{v_0}{4} \Rightarrow v = -\frac{v_0}{4}t + v_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5 \text{ s} \Rightarrow v_1 = -\frac{v_0}{4} \\ t_2 = 6 \text{ s} \Rightarrow v_2 = -\frac{v_0}{2} \end{cases}$$

گام سوم: با استفاده از سطح زیر نمودار، جابه جایی و مسافت در بازه زمانی خواسته شده را به دست می آوریم:

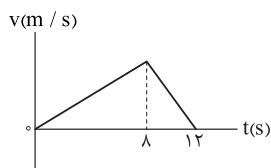
$$|\Delta x_{(0-5 \text{ s})}| = |S_1 + S_2 - S_3| = \left| \left(\frac{1}{2} v_0 (4) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{4} \right) (1) \right) \right| = \frac{15 v_0}{8}$$

$$l_{(3-6 \text{ s})} = S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{4} \right) (1) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{2} \right) (2) = \frac{5 v_0}{8}$$

گام چهارم: نسبت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$\frac{|\Delta x_{(0-5 \text{ s})}|}{l_{(3-6 \text{ s})}} = \frac{\frac{15 v_0}{8}}{\frac{5 v_0}{8}} = 3$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 9 \text{ s}$ برابر 25 m/s^2 باشد، بیشینه تندی متحرک چند متر بر ثانیه است؟



۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۱۲ (۴)

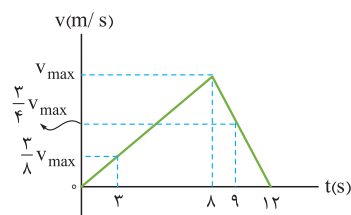
پاسخ: گزینه ۲

سرعت در لحظات داده شده را بر حسب تندی بیشینه به دست آورید و با داشتن اندازه شتاب متوسط، تندی بیشینه را به دست آورید.

Hint

گام اول: سرعت در لحظات $t_1 = 3 \text{ s}$ و $t_2 = 9 \text{ s}$ را بر حسب تندی بیشینه (با استفاده از تناسب) می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\begin{cases} \frac{v_{3s}}{3} = \frac{v_{\max}}{8} \Rightarrow v_{3s} = \frac{3}{8} v_{\max} \\ \frac{v_{\max}}{4} = \frac{v_{9s}}{3} \Rightarrow v_{9s} = \frac{3}{4} v_{\max} \end{cases}$$

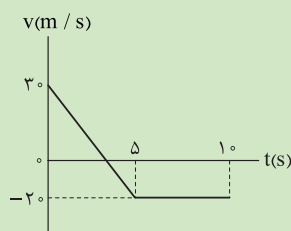
گام دوم: با توجه به داشتن اندازه شتاب متوسط در بازه زمانی ۳ تا ۹ ثانیه، $v_{\max}$ را حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\frac{3}{4} v_{\max} - \frac{3}{8} v_{\max}}{9 - 3} \Rightarrow 25 = \frac{\frac{3}{8} v_{\max}}{6} \Rightarrow v_{\max} = 4 \text{ m/s}$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک

۵۲

در ۱۰ ثانیه اول چند متر بر ثانیه است؟



۷ / ۵ (۱)

۱۶ (۲)

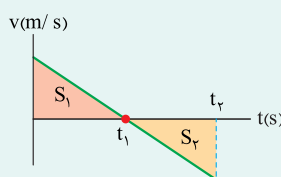
۱۶ / ۵ (۳)

۲۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

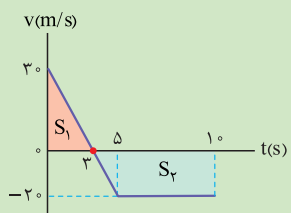
سطح زیر نمودار $v - t$ برابر با جابه جایی است. در سؤالاتی که تندی از ما خواسته می شود:

درس Box



$$s_{av} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: سطح زیر نمودار را در ۱۰ ثانیه اول به دست می آوریم:



$$S_1 = \frac{1}{2} (3)(3) = 4.5$$

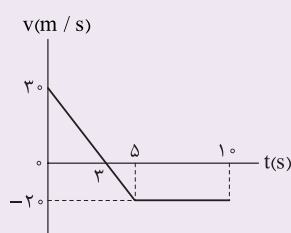
$$S_2 = \frac{v + v_2}{2} (t_2 - t_1) = \frac{0 + (-3)}{2} (10 - 5) = -7.5$$

گام دوم: با داشتن مسافت طی شده $(S_1 + S_2)$ تندی متوسط را به دست می آوریم:

$$s_{av} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t} = \frac{4.5 - 7.5}{10} = \frac{-3}{10} = -0.3 \text{ m/s}$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است.

(سؤال ۳ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۴ رشته ریاضی)



الف) تندی متوسط متحرک در کل زمان حرکت چند متر بر ثانیه است؟

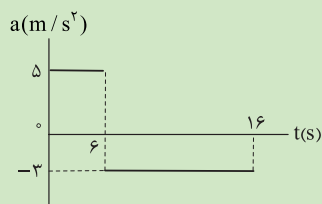
ب) اگر متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ در ۲۰ متری مبدأ محور باشد، معادله

مکان - زمان متحرک را در بازه زمانی ۵ s تا ۱۰ s بنویسید.

امتحان
نهایی

۵۳

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در امتداد محور x و از حال سکون شروع به حرکت می کند، به شکل زیر است. مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 6\text{ s}$ تا $t_2 = 16\text{ s}$ برابر چند متر است؟



۱) ۱۵۰

۲) ۲۴۰

۳) ۳۰۰

۴) ۴۸۰

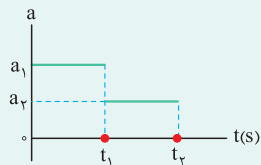
پاسخ: گزینه ۱

نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید و با توجه به سطح زیر نمودار، خواسته مسئله را به دست آورید.

Hint

درس Box

در نمودارهای شتاب - زمان چند مرحله ای:

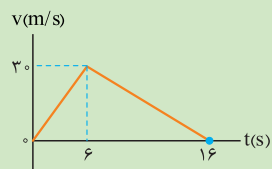


• سطح زیر نمودار، برابر تغییرات سرعت (Δv) است.

• سرعت در انتهای هر مرحله برابر سرعت در ابتدای مرحله بعدی است.

• به ویژه در مسائلی که جابه جایی و مسافت خواسته می شود، رسم نمودار سرعت - زمان را در نظر داشته باشید.

گام اول: با استفاده از معادله سرعت - زمان در حرکت شتاب ثابت و به دست آوردن سرعت نقاط ابتدا و انتهای بازه، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می کنیم:



$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} \Rightarrow 5 = \frac{\Delta v_1}{6} \Rightarrow \Delta v_1 = 30 \text{ m/s}$$

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow -3 = \frac{\Delta v_2}{10} \Rightarrow \Delta v_2 = -30 \text{ m/s}$$

گام دوم: با محاسبه سطح زیر نمودار در بازه ۶ تا ۱۶ ثانیه، مسافت طی شده را به دست می آوریم:

$$\ell = \frac{1}{2} (30)(10) = 150 \text{ m}$$

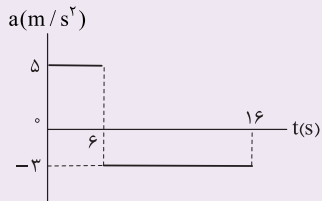
پاسخ خیلی تشریحی ✓

شکل زیر، نمودار شتاب - زمان یک متحرک را که در امتداد محور x از حال سکون شروع به حرکت می کند، نشان می دهد.

(سؤال ۴ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۳، رشته تهری)

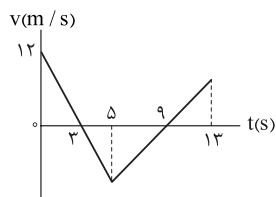
الف) با انجام محاسبات لازم، نمودار سرعت - زمان آن را در بازه زمانی صفر تا ۱۶ s رسم کنید.

ب) مسافت پیموده شده در بازه زمانی ۶ s تا ۱۶ s چند متر است؟



امتحان
نهایی

۵۴ نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 12$ s مسافت طی شده توسط متحرک، چند برابر اندازه جابه‌جایی آن است؟



۵ / ۸ (۱)

۶ / ۸ (۲)

۱۶ (۳)

۱۷ (۴)

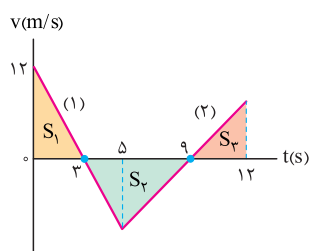
پاسخ: گزینه ۴

Hint

با استفاده از سطح زیر نمودار سرعت - زمان، مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک در بازه مورد نظر را محاسبه و خواسته سؤال را به دست آورید.

گام اول: جهت محاسبه مساحت زیر نمودار، ابتدا سرعت در لحظات ۵s و ۱۲s را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$a_1 = -\frac{12}{3} = -4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v = -4t + 12 \xrightarrow{t=5s} v_{5s} = -8 \text{ m/s}$$

$$a_2 = \frac{12}{3} = 4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v = 4t - 12 \xrightarrow{t=12s} v_{12s} = 36 \text{ m/s}$$

گام دوم: جابه‌جایی و مسافت طی شده را محاسبه می‌کنیم:

$$|\Delta x| = S_1 + S_2 - S_3 = (18 + 9 - 36) = -9 \text{ m}$$

$$\ell = S_1 + S_2 + S_3 = (18 + 36 + 9) = 63 \text{ m}$$

گام سوم: نسبت خواسته شده در سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{63}{9} = 7$$

۵۵

متحرکی روی محور x در مبدأ زمان در خلاف جهت محور x از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و به مدت 20 s با شتاب ثابت a_1 به حرکت خود ادامه می‌دهد. در 10 ثانیه بعدی با شتاب ثابت a_2 تندی خود را کاهش می‌دهد تا متوقف شود. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در این 30 s برابر 360 m باشد، شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 5\text{ s}$ تا $t_2 = 25\text{ s}$ در SI کدام است؟

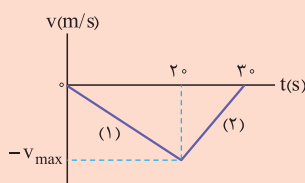
- (۱) $0/3\text{ i}$ (۲) $0/6\text{ i}$
(۳) $-0/3\text{ i}$ (۴) $-0/6\text{ i}$

پاسخ: گزینه ۳

Hint

با رسم نمودار سرعت - زمان متحرک و محاسبه سطح زیر نمودار که مسافت طی شده است، شتاب‌های دو مرحله حرکت و سپس سرعت در لحظات خواسته شده را محاسبه و در نهایت شتاب متوسط را به دست آورید.

گام اول: ابتدا یک نمودار $v - t$ از حرکت متحرک به طور کلی رسم می‌کنیم:



گام دوم: سطح زیر نمودار همان مسافت طی شده است؛ بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} v_{\max} (30) = 360 \Rightarrow v_{\max} = 24\text{ m/s}$$

گام سوم: شتاب دو مرحله حرکت و سرعت در لحظات خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 20 a_1 = -v_{\max} \Rightarrow 20 a_1 = -24 \Rightarrow a_1 = -1/2\text{ m/s}^2 \\ a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-24)}{10} = 2/5\text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{5s} = -1/2(5) = -5\text{ m/s}, \quad v_{25s} = 2/5(5) - 24 = -23\text{ m/s}$$

گام چهارم: شتاب متوسط در بازه زمانی مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(-23 - (-5))\vec{i}}{25 - 5} = \frac{-18\vec{i}}{20} = (-9/10\text{ m/s}^2)\vec{i}$$

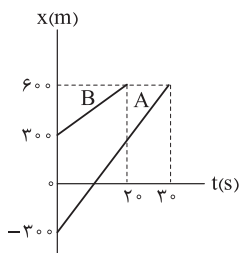
متحرکی روی محور x در لحظه $t = 0\text{ s}$ از حال سکون در جهت محور شروع به حرکت می‌کند. اگر در مدت 10 ثانیه با شتاب a و در 10 ثانیه بعدی با شتاب $-2a$ حرکت کند و در این 20 ثانیه، مسافت 200 متر را طی کند، شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 5\text{ s}$ تا $t_2 = 17\text{ s}$ در SI کدام است؟

(سؤال ۵۵ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

- (۱) -9 i (۲) $-1/5\text{ i}$
(۳) 9 i (۴) $1/5\text{ i}$

کنکور

شکل زیر بخشی از نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کنند. فاصله دو متحرک در لحظه $t = 15$ s چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t = 10$ s است؟



- (۱) $\frac{5}{6}$
(۲) $\frac{6}{5}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $\frac{2}{3}$

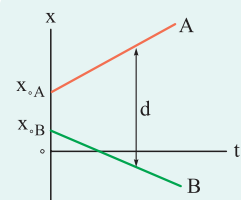
پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از داده‌های نمودار، معادله حرکت دو متحرک را بنویسید و سپس فاصله آن‌ها را در زمان‌های خواسته شده به دست آورید.

Hint

درس Box

در نمودارهای مکان - زمان دو متحرک:



● فاصله دو متحرک، همان طول خط قائم بین نمودارها است (طول d).

● فاصله دو متحرک را به صورت $|x_A - x_B|$ هم می‌توان نوشت که معادله مکان - زمان حرکت ثابت را باید جایگزین کنیم:

$$x = vt + x_0$$

● فاصله اولیه دو متحرک $|x_{0A} - x_{0B}|$ است.

گام اول: معادله حرکت A و B را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{900}{30} = 30 \text{ m/s}, & x_{0A} = -300 \text{ m} \Rightarrow x_A = 30t - 300 \\ v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{300}{20} = 15 \text{ m/s}, & x_{0B} = 300 \text{ m} \Rightarrow x_B = 15t + 300 \end{cases}$$

گام دوم: مکان و فاصله دو متحرک در لحظات ۱۵s و ۱۰s را به دست می‌آوریم:

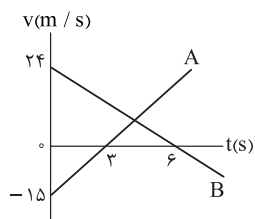
$$t_1 = 15 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 30(15) - 300 = 150 \text{ m} \\ x_B = 15(15) + 300 = 525 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow d_1 = 525 - 150 = 375 \text{ m}$$

$$t_2 = 10 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 30(10) - 300 = 0 \\ x_B = 15(10) + 300 = 450 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow d_2 = 450 \text{ m}$$

گام سوم: نسبت خواسته شده سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{375}{450} = \frac{5}{6}$$

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند به شکل زیر است. اگر جهت حرکت دو متحرک A و B به ترتیب در مکان های $x_1 = -20 \text{ m}$ و $x_2 = 20 \text{ m}$ تغییر کند، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ چند متر است؟



(۱) ۲۸

(۲) ۳۲

(۳) ۴۸

(۴) ۵۲

پاسخ: گزینه ۱

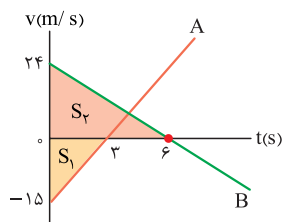
Hint

با داشتن جابه جایی (سطح زیر نمودار) و مکان نهایی متحرک، مکان اولیه آن ها و سپس معادله حرکت متحرک را به دست آورید و در نهایت فاصله دو متحرک در لحظه مورد نظر را حساب کنید.

گام اول: در لحظه ای که نمودار، محور زمان را قطع می کند، جهت حرکت تغییر می کند:

$$x_{rsA} = -20 \text{ m}, \quad x_{fsB} = 20 \text{ m}$$

گام دوم: با استفاده از سطح زیر نمودار، جابه جایی و سپس مکان اولیه A و B را به دست می آوریم:



$$\Delta x_A = -S_1 = -22/5 \text{ m} \Rightarrow x_{rs} - x_{oA} = -22/5 \text{ m} \Rightarrow x_{oA} = 2/5 \text{ m}$$

$$\Delta x_B = S_2 = 72 \text{ m} \Rightarrow x_{fsB} - x_{oB} = 72 \text{ m} \Rightarrow x_{oB} = -52 \text{ m}$$

گام سوم: شتاب، سرعت اولیه و معادله حرکت دو متحرک را با استفاده از نمودار به دست می آوریم:

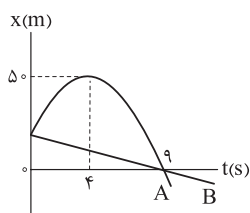
$$\begin{cases} v_{oA} = -15 \text{ m/s} \\ a_A = \frac{15}{3} = 5 \text{ m/s}^2 \Rightarrow x_A = \frac{5}{2} t^2 - 15t + \frac{2}{5} \Rightarrow x_{\Delta sA} = -10 \text{ m} \\ x_{oA} = 2/5 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{oB} = 24 \text{ m/s} \\ a_B = -\frac{24}{6} = -4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow x_B = -2t^2 + 24t - 52 \Rightarrow x_{\Delta sB} = 18 \text{ m} \\ x_{oB} = -52 \text{ m} \end{cases}$$

گام چهارم: خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$|x_B - x_A| = 18 - (-10) = 28 \text{ m}$$

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. اگر شتاب متحرک A، ثابت باشد، در لحظه ای که سرعت دو متحرک برابر است، فاصله متحرک A از مبدأ مکان چند برابر فاصله متحرک B از مبدأ مکان است؟



از مبدأ مکان است؟

۵ (۱)

۵ / ۵ (۲)

۱۰ (۳)

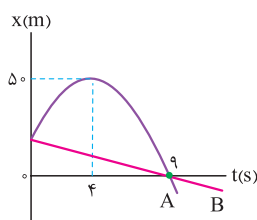
۱۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

با توجه به نوع حرکت دو متحرک A و B، معادلات مکان - زمان و سرعت - زمان آن ها را با توجه به نمودار به دست آورید و لحظه برابری سرعت را به دست آورید و در نهایت مکان دو متحرک را با قراردادن لحظه برابری سرعت در معادلات حرکت محاسبه و فاصله آن ها از مبدأ مکان را به دست آورید.

گام اول: با توجه به رابطه لحظه توقف $(-\frac{v_0}{a})$ و نوشتن معادله جابه جایی بین لحظات ۴ تا ۹ ثانیه و سپس ۰ تا ۴ ثانیه، معادلات سرعت و حرکت A و B را به دست می آوریم:



$$\begin{cases} -\frac{v_{0A}}{a_A} = 4 \Rightarrow v_{0A} = -4a_A \quad (1) \\ \Delta x_{(4-9)s} = -5 = \frac{1}{2}a_A(5)^2 \Rightarrow \begin{cases} a_A = -4 \text{ m/s}^2 \\ v_0 = 16 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -2t^2 + 16t + 18 \\ v_A = -4t + 16 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Delta x_{(0-4)s} = \frac{v_0 + 0}{2}(4) = 32 \text{ m} \Rightarrow x_{0A} = 18 \text{ m}$$

$$\begin{cases} v_B = \frac{0 - 18}{9 - 0} = -2 \text{ m/s} \\ x_B = -2t + 18 \end{cases}$$

گام دوم: با برابر قراردادن معادلات سرعت، لحظه مورد نظر را به دست می آوریم:

$$\xrightarrow{v_A = v_B} -4t + 16 = -2 \Rightarrow t = 4/5 \text{ s}$$

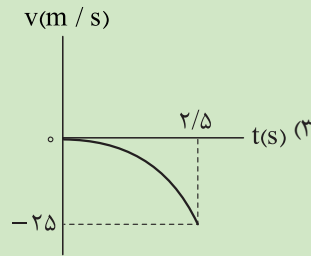
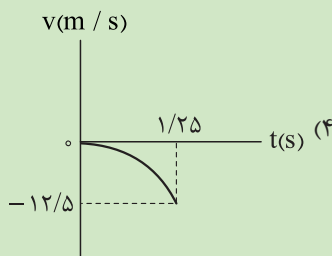
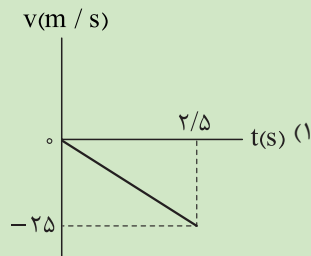
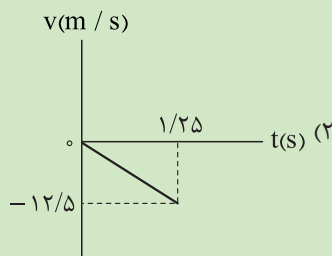
اکنون مکان دو متحرک را در لحظه $t = 4/5 \text{ s}$ حساب کرده و فاصله دو متحرک از مبدأ مکان را نسبت به یکدیگر پیدا می کنیم:

$$x_A = -2(4/5)^2 + 16(4/5) + 18 = 49/5 \text{ m}$$

$$x_B = -2(4/5) + 18 = 9 \text{ m}$$

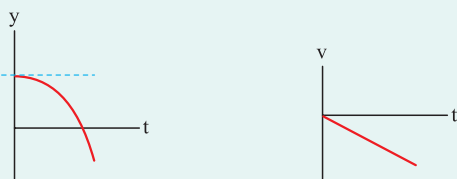
$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{49/5}{9} = 5/5$$

۵۹ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع ۳۱/۲۵ متری سطح زمین رها می‌شود. نمودار سرعت - زمان گلوله از لحظه رها شدن آن تا لحظه برخورد به سطح زمین، کدام است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



پاسخ: گزینه ۱

حرکت سقوط آزاد، نوعی حرکت با شتاب ثابت ($a = g$) است؛ بنابراین نمودارها و معادلات حرکت آن مشابه حرکت شتاب ثابت است:



درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به درس باکس، نمودار سرعت - زمان به صورت خطی خواهد بود.

گام دوم: با استفاده از روابط سقوط آزاد، زمان سقوط و سرعت برخورد را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - (0)^2 = -2(10)(31/25) \Rightarrow v = -25 \text{ m/s} \xrightarrow{v = -gt + v_0} -25 = -10t + 0 \Rightarrow t = 2/5 \text{ s}$$

گلوله‌ای را در شرایط خلأ از ارتفاع ۳۱/۲۵ متری سطح زمین رها می‌کنیم. (سؤال ۴ - امتحان نهایی ریاضی فرداد ۱۴۰۳)

الف) گلوله پس از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

ب) نمودار سرعت - زمان آن را به طور کیفی رسم کنید.

امتحان
نهایی

۶۰. در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها شده و ۴ s بعد به زمین برخورد می‌کند. تندی گلوله در نیمه راه چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) $10\sqrt{2}$ (۲) ۲۰ (۳) $20\sqrt{2}$ (۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

Hint

از روابط حرکت سقوط آزاد، ابتدا ارتفاع سقوط را به دست بیاورید و سپس از رابطه مستقل از زمان، تندی گلوله را در نیمه مسیر، محاسبه کنید.

درس Box

جهت به دست آوردن روابط سقوط آزاد، کافی است در روابط شتاب ثابت به جای شتاب، g و به جای y ، x را قرار دهیم. (جهت رو به پایین را مثبت فرض می‌کنیم.)

معادله مکان - زمان:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

معادله سرعت - زمان:

$$v = gt + v_0$$

معادله مستقل از زمان:

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y$$

معادله سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{v + v_0}{2}$$

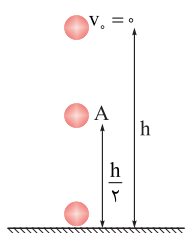
معادله مستقل از شتاب:

$$\Delta y = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\Delta t$$

معادله مستقل از سرعت اولیه:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + y_0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با رسم یک شکل مناسب و استفاده از معادله مکان - زمان سقوط آزاد، ارتفاع سقوط را به دست می‌آوریم:



$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = \frac{1}{2}(10)(4)^2 + 0 = 80 \text{ m} \Rightarrow \frac{h}{2} = 40 \text{ m}$$

گام دوم: با نوشتن رابطه مستقل از زمان، از لحظه سقوط تا نیمه مسیر داریم:

$$v_A^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v_A^2 - 0 = 2(10)(40) \Rightarrow v_A^2 = 800 \Rightarrow v_A = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \text{ m/s}$$

گلوله‌ای از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ۲ ثانیه آخر حرکت خود قبل از رسیدن به سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$ و مقاومت هوا ناچیز است).

- ۲۰ (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

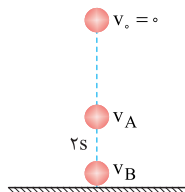
پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدای تندی گلوله هنگام برخورد و ۲ ثانیه قبل از آن را، از روابط سقوط آزاد به دست می‌آوریم و سپس تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم.

گام اول: تندی گلوله در لحظه برخورد و ۲ ثانیه قبل از آن را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

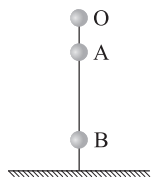


$$\begin{cases} v_B^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v_B^2 - 0 = 2(10)(80) \Rightarrow v_B = 40 \text{ m/s} \\ v_B = v_A + g(2) \Rightarrow 40 = v_A + 20 \Rightarrow v_A = 20 \text{ m/s} \end{cases}$$

گام دوم: با داشتن تندی‌های A و B به راحتی تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{20 + 40}{2} = 30 \text{ m/s}$$

در شکل زیر، گلوله‌ای از نقطه O رها می‌شود و در مدت $2/4$ s از نقطه A به نقطه B می‌رسد. اگر فاصله دو نقطه A و B برابر 60 m باشد، فاصله دو نقطه O و A برابر چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$ و مقاومت هوا ناچیز است).



۸ / ۴۵ (۱)

۱۳ (۲)

۱۶ / ۹ (۳)

۲۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

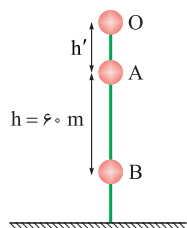
از روابط سقوط آزاد، تندی نقطه A را محاسبه کنید و سپس فاصله OA را به دست آورید.

Hint

درس Box

در حرکت سقوط آزاد، با مثبت فرض کردن جهت رو به پایین، علامت و اندازه جابه‌جایی و سرعت متوسط با مسافت طی شده و تندی متوسط برابر می‌شود:

$$|\Delta y| = \ell, \quad s_{av} = \frac{|\Delta y|}{\Delta t}$$



گام اول: تندی گلوله در نقطه A را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$v_B = v_A + g(2/4) \Rightarrow v_B = v_A + 24(1)$$

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t \Rightarrow h = \frac{v_A + v_B}{2} (2/4) \xrightarrow{(1)} 60 = \frac{2v_A + 24}{2} (2/4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A = 13 \text{ m/s} \\ v_B = 37 \text{ m/s} \end{cases}$$

گام دوم: فاصله O تا A را حساب می‌کنیم:

$$v_A^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow (13)^2 - (0)^2 = 2(10)h' \Rightarrow h' = \frac{(13)^2}{20} = 8/45 \text{ m}$$

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک نقطه از ارتفاع نسبتاً زیاد رها می‌شود. وقتی این گلوله مسافت 10 m را طی می‌کند، گلوله دیگری از همان نقطه رها می‌شود. بعد از رها شدن گلوله دوم تا رسیدن گلوله اول به زمین، فاصله بین دو گلوله چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 9.8\text{ m/s}^2$)

- (۱) در هر ثانیه 14 m متر افزایش می‌یابد.
- (۲) در هر ثانیه 7 m متر افزایش می‌یابد.
- (۳) در هر ثانیه 14 m متر کاهش می‌یابد.
- (۴) در هر ثانیه 7 m متر کاهش می‌یابد.

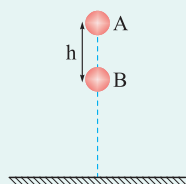
پاسخ: گزینه ۱

معادلات مکان - زمان دو گلوله را بنویسید و سپس معادله فاصله آن‌ها را نوشته و براساس آن به پاسخ برسید.

Hint

درس: Box

هنگامی که دو گلوله A و B حرکت سقوط آزاد داشته باشند، فاصله بین دو گلوله به صورت زیر خواهد بود:



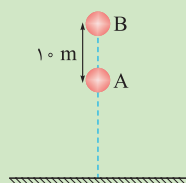
$$\begin{cases} y_A = \frac{1}{2}gt^2 + v_{A0}t + y_{A0} \\ y_B = \frac{1}{2}gt^2 + v_{B0}t + y_{B0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله دو گلوله A و B} = |y_A - y_B| = |v_{A0} - v_{B0}|t + (y_{A0} - y_{B0})$$

● رابطه فاصله بین دو گلوله با حرکت سقوط آزاد، رابطه‌ای خطی است و در نتیجه فاصله آن‌ها در هر ثانیه به اندازه $|v_{A0} - v_{B0}|$ تغییر می‌کند.

گام اول: لحظه رها شدن گلوله دوم (B) را مبدأ زمان فرض می‌کنیم و معادلات حرکت دو گلوله را می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$v_{A0}^2 - 0 = -2(9.8)(10) \Rightarrow v_{A0} = -14\text{ m/s}$$

$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 - 14t - 10$$

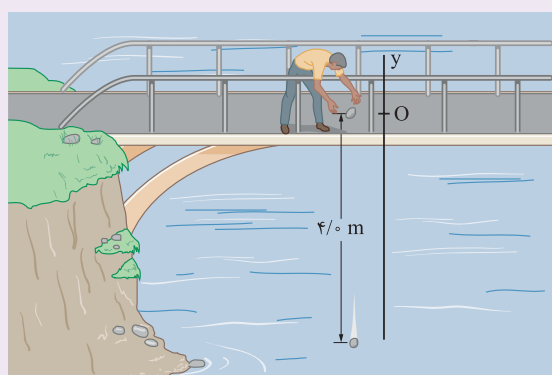
$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2$$

گام دوم: فاصله دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$|y_A - y_B| = 14t + 10$$

بنابراین در هر ثانیه فاصله دو متحرک 14 m متر بیشتر می‌شود.

شکل زیر شخصی را نشان می‌دهد که ابتدا سنگی را از بالای پلی به داخل رودخانه‌ای رها کرده است. وقتی سنگ مسافت 40 m را طی می‌کند، سنگ دیگری دوباره از همان ارتفاع توسط شخص رها می‌شود. توضیح دهید آیا با گذشت زمان و تا قبل از برخورد سنگ اول به سطح آب رودخانه، فاصله بین دو سنگ کاهش یا افزایش می‌یابد یا تغییری نمی‌کند.



کتاب
درسی

۶۴

جسمی به جرم 6 kg به اندازه 5 m در جهت محور y جابه‌جا می‌شود. کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F} = (6 \text{ N})\vec{i} - (8 \text{ N})\vec{j}$ که در طی این حرکت به جسم وارد می‌شود، چند ژول است؟

۳۰ (۲)

۳۰ (۱)

۴۰ (۴)

۴۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

درس‌Box

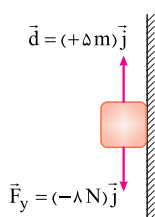
چون کار نیروی عمود بر جابه‌جایی، صفر است، فقط کار نیروی هم‌راستای جابه‌جایی را از رابطه $W = Fd \cos \theta$ به دست آورید.

اگر نیروی واردشده بر جسم $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ و جابه‌جایی جسم $\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j}$ باشد، کار نیروهای وارد بر جسم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = (F_x d_x + F_y d_y)$$

گام اول: جابه‌جایی فقط در راستای محور y است، پس $\vec{F}_x = (6 \text{ N})\vec{i}$ کاری انجام نمی‌دهد.

گام دوم: کار نیروی واردشده F_y را به دست می‌آوریم:



$$W_F = (+8)(5)(\cos 180^\circ) = -40 \text{ J}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به درس‌باکس کار انجام‌شده برابر است با:

$$W_F = (6)(0) + (-8)(5) = -40 \text{ J}$$

یه‌چور دیگه

۶۵

خودرویی به جرم 800 kg با تندی v در حال حرکت است. اگر تندی خودرو 18 km/h افزایش یابد، انرژی جنبشی آن 90 kJ تغییر می‌کند. v برابر با چند کیلومتر بر ساعت است؟

۹۰ (۴)

۷۲ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ ، انرژی جنبشی خودرو در هر ۲ حالت را محاسبه و با ترکیب آن‌ها v را به دست بیاورید.

Hint

درس Box

انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

تندی v (m/s)
جرم m (kg)
انرژی جنبشی K (J)

در این رابطه تندی برحسب m/s است:

$$\frac{\text{km}}{\text{h}} \xrightarrow[\times 3.6]{\div 3.6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گام اول: انرژی جنبشی خودرو در هر دو حالت را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow[m=800 \text{ kg}]{v_1=v} K_1 = \frac{1}{2}(800)v^2 = 400v^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \xrightarrow[\frac{18 \text{ km}}{\text{h}} = 5 \text{ m/s}]{v_2=v_1+18 \text{ km/h}} K_2 = \frac{1}{2}(800)(v+5)^2 = 400(v+5)^2$$

گام دوم: با توجه به این که K_2 ، 90 kJ بیشتر از K_1 است، داریم:

$$K_2 = K_1 + 90 \text{ kJ} \Rightarrow 400(v+5)^2 = 400v^2 + 90000 \xrightarrow{\div 400} (v+5)^2 = v^2 + 225$$

$$\Rightarrow v^2 + 10v + 25 = v^2 + 225 \Rightarrow v = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}$$

جسمی با تندی ثابت از نقطه A تا نقطه B جابه‌جا می‌شود. اگر در این جابه‌جایی انرژی پتانسیل گرانشی جسم از ۲۰۰ J به ۳۰۰ J برسد، کار انجام‌شده توسط نیروی وزن وارد بر جسم و کار کل انجام‌شده روی جسم به ترتیب از راست به

چپ چند ژول است؟

- (۱) ۱۰۰، ۱۰۰ (۲) ۱۰۰، صفر (۳) ۱۰۰، -۱۰۰ (۴) -۱۰۰، صفر

پاسخ: گزینه ۴

کار انجام‌شده توسط نیروی وزن را با توجه به تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی و کار کل را با توجه به تندی ثابت حرکت جسم، به دست آورید.

Hint

درس‌Box

انرژی پتانسیل گرانشی جسمی به جرم m در ارتفاع h از سطح زمین به شکل زیر است:

$$U = mgh$$

● مبدأ پتانسیل ($h = 0$) را زمین فرض کرده‌ایم:

$$\Delta U = U_f - U_i = mg\Delta h$$

● کار نیروی وزن از رابطه $W_{mg} = -mg\Delta h$ به دست می‌آید.

● بنابراین رابطه W_{mg} و ΔU به شکل زیر است:

$$\Delta U = -W_{mg}$$

● طبق قضیه کار و انرژی جنبشی:

تغییرات انرژی جنبشی

$$W_t = \Delta K$$

کار کل (J)

● اگر در طی یک جابه‌جایی، تندی جسم ثابت باشد:

$$\xrightarrow{v: \text{ثابت}} K_1 = K_f \Rightarrow \Delta K = 0 \Rightarrow W_t = 0$$

گام اول: با توجه به این که $W_{mg} = -\Delta U$ است، داریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$W_{mg} = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -(300 - 200) = -100 \text{ J}$$

گام دوم: چون تندی ثابت است، انرژی جنبشی جسم ثابت است:

$$\xrightarrow{K_1 = K_f} \Delta K = 0 \Rightarrow W_t = 0$$

۶۷ معادله مکان - زمان متحرکی به جرم 5 kg که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = \frac{3}{2}t^2 - 5t + 9$ است. کار کل انجام شده روی متحرک در ۲ ثانیه دوم، چند ژول است؟

۱۲۰ (۲)

۹۰ (۱)

۲۴۰ (۴)

۱۸۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

با محاسبه برابند نیروها ($F = ma$) و جابه جایی جسم، کار کل انجام شده را به دست آورید.

Hint

درس Box

وقتی معادله مکان - زمان ($x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$) را داشته باشیم، با به دست آوردن شتاب a داریم:

$$\begin{cases} F_{\text{برابند}} = ma \\ d = |\Delta x| \end{cases} \Rightarrow W_{\text{کل}} = F_{\text{برابند}} = ma |\Delta x|$$

هم چنین می توان معادله سرعت - زمان جسم را محاسبه و کار کل را به دست آورد:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 \Rightarrow v_1 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \\ t_2 \Rightarrow v_2 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{\text{کل}} = K_2 - K_1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جابه جایی در ۲ ثانیه دوم را به دست می آوریم:

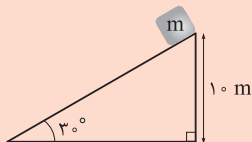
$$\text{۲ ثانیه دوم} \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}(2)^2 - 5(2) + 9 = 5 \text{ m} \\ t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(4)^2 - 5(4) + 9 = 13 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 13 - 5 = 8 \text{ m}$$

گام دوم: برابند نیروها و کار کل را به دست می آوریم:

$$\xrightarrow{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0} x = \frac{3}{2}t^2 - 5t + 9 \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F_{\text{برابند}} = ma = 5 \times 3 = 15 \text{ N}$$

$$W_{\text{کل}} = ma |\Delta x| = (15)(8) = 120 \text{ J}$$

مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $m = 2 \text{ kg}$ از بالای سطح شیب‌دار به پایین سطح می‌لغزد. اگر بزرگی نیروی اصطکاک در این مسیر $\frac{1}{4}$ بزرگی وزن جسم باشد، در این جابه‌جایی، انرژی جنبشی جسم چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) 100 ، افزایش می‌یابد.

(۲) 300 ، کاهش می‌یابد.

(۳) 100 ، کاهش می‌یابد.

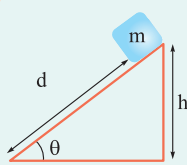
(۴) 300 ، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۱

کار کل که مجموع کار نیروی وزن و نیروی اصطکاک است را محاسبه و با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی، خواسته سؤال را به دست آورید.

Hint

درس Box



هنگام سقوط جسم از سطح شیب‌دار به نکات زیر توجه کنید:

کار نیروی وزن: $W_{mg} = mgh$

کار نیروی اصطکاک: $W_f = -f \cdot d \xrightarrow{d = \frac{h}{\sin \theta}} W_f = -\frac{f \cdot h}{\sin \theta}$

قضیه کار و انرژی جنبشی:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_f = \Delta K$$

گام اول: کار نیروی وزن و کار نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = mgh = (2)(10)(10) = 200 \text{ J}$$

$$W_f = -f \cdot d \xrightarrow{\begin{matrix} f = \frac{1}{4}mg \\ d = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 \text{ m} \end{matrix}} W_f = -\left(\frac{1}{4}\right)(2)(10)(20) = -100 \text{ J}$$

گام دوم: طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، تغییرات انرژی جنبشی، برابر کار کل است:

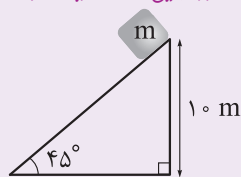
$$\Delta K = W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_f = (200) + (-100) = +100 \text{ J}$$

اگر علامت منفی کار نیروی اصطکاک را در نظر نگیریم، در دام گزینه (۴) میفتی.

گول نخوری

مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $m = 2 \text{ kg}$ از بالای سطح شیب‌دار به پایین سطح می‌لغزد. اگر بزرگی نیروی اصطکاک در این مسیر $\frac{1}{4}$ بزرگی وزن جسم باشد، کار نیروی وزن در این جابه‌جایی چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

(سؤال ۷۳ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت اول)



(۲) 200

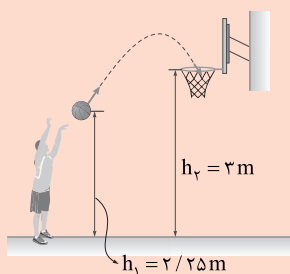
(۴) $200\sqrt{2}$

(۱) 150

(۳) $150\sqrt{2}$

کنکور

۶۹ در شکل زیر، ورزشکار توپ را با تندی چند متر بر ثانیه پرتاب کند، تا توپ با تندی 5 m/s وارد دهانه سبد شود؟
($g = 10 \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است).



(۱) $\sqrt{10}$

(۲) $2\sqrt{10}$

(۳) ۶

(۴) ۸

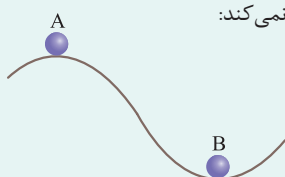
پاسخ: گزینه ۲

قانون پایستگی انرژی مکانیکی، بین لحظه پرتاب تا دهانه سبد را بنویسید تا به پاسخ سؤال برسید.

مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل یک جسم را، انرژی مکانیکی می‌گوییم:

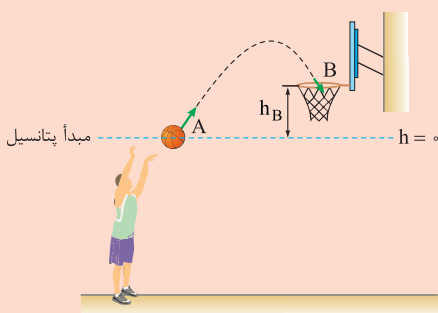
$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

اگر نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا نداشته باشیم، انرژی مکانیکی جسم تغییر نمی‌کند:



$$E_A = E_B \\ \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$$

قانون پایستگی انرژی مکانیکی را بین دو نقطه A و B می‌نویسیم:



$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \Rightarrow v_A = \sqrt{v_B^2 + 2gh_B} = \sqrt{(5)^2 + (2)(10)(\frac{2}{25})} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$

از قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

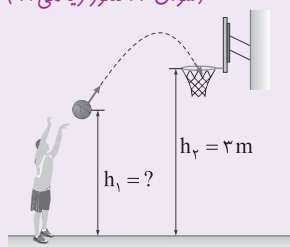
$$W_{\text{کل}} = \Delta K \Rightarrow -mg\Delta h = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow v_A^2 = v_B^2 + 2g\Delta h$$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{(25) + (10)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$

په‌جور دیگه

در شکل زیر، ورزشکار توپ را با تندی اولیه 6 m/s پرتاب می‌کند و اندازه سرعت توپ در لحظه ورود به سبد 5 m/s است. فاصله نقطه پرتاب توپ تا سطح زمین (h_1) چند متر است؟ (مقاومت هوا ناچیز و $g = 10 \text{ m/s}^2$ است).

(سؤال ۹۰ کنکور ریاضی ۹۹)



(۱) $2/45$

(۲) $2/46$

(۳) $2/55$

(۴) $2/64$

در شکل زیر، شخصی با وارد کردن نیروی ثابت 90 N ، جعبه‌ای ساکن به جرم $7/5\text{ kg}$ از سطح زمین در راستای قائم جابه‌جا می‌کند. تندی جعبه در ارتفاع $1/5\text{ m}$ از سطح زمین به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)



(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{6}$

(۳) ۳

(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، کار کل را که مجموع کار نیروی ثابت و کار نیروی وزن است، محاسبه کنید و در انتها، تندی جعبه را به دست آورید.

Hint

درس Box

هنگام محاسبه کار نیروی وزن، به علامت آن توجه کنید:

پایین آمدن
↑
 $W_{mg} = \pm mgh$
↓
بالا رفتن

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: کار نیروی وزن و نیروی ثابت را به دست می‌آوریم:

$$W_{mg} = -mgh = -(7/5)(10)(1/5) = -112/5\text{ J}$$

$$W_F = Fd \cos \theta = (90)(1/5)(1) = 18\text{ J}$$

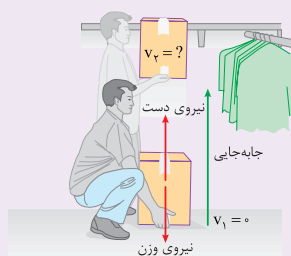
گام دوم: از قضیه کار و انرژی جنبشی، خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$W_{\text{کل}} = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_F = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow (-112/5 + 18) = \frac{1}{2}(7/5)v^2 \Rightarrow 22/5 = \frac{7/5}{2}v^2 \Rightarrow v^2 = 6 \Rightarrow v = \sqrt{6}\text{ m/s}$$

شکل زیر شخصی را نشان می‌دهد که با وارد کردن نیروی ثابت 150 N ، جعبه‌ای به جرم 10 kg را از حال سکون در امتداد قائم جابه‌جا می‌کند.

کتاب
درسی



الف) کار انجام‌شده توسط شخص و کار انجام‌شده توسط نیروی وزن را روی جعبه تا ارتفاع $1/5\text{ m}$ به طور جداگانه حساب کنید.
ب) کار کل انجام‌شده روی جعبه تا ارتفاع $1/5\text{ m}$ چه قدر است؟
پ) با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، تندی نهایی جعبه را در ارتفاع $1/5\text{ m}$ حساب کنید.

خودرویی به جرم 1500 kg در یک مسیر افقی، در مدت 8 s تندی خود را از 54 km/h به 90 km/h می‌رساند.

توان متوسط خودرو برای انجام این کار حداقل چند اسب بخار است؟ ($1 \text{ hp} = 745 \text{ W}$)

(۲) 50

(۱) $12/5$

(۴) 500

(۳) 125

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا از قضیه کار و انرژی جنبشی، کار کل را به دست بیاورید و سپس از رابطه $P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$ ، توان متوسط خودرو را حساب کنید.

Hint

درس Box

توان متوسط، برابر است با کار انجام شده تقسیم بر زمان صرف شده:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

W : کار انجام شده (برحسب ژول)

Δt : مدت زمان انجام کار (برحسب ثانیه)

P_{av} : توان متوسط (برحسب وات)

جهت محاسبه کار انجام شده:

اگر نیروی محرک (F) و مسافت طی شده (d) مشخص باشد:

$$W = F.d$$

در غیر این صورت، کار برابر تغییر انرژی مکانیکی است:

$$W = \Delta E = \Delta K + \Delta U \xrightarrow{\text{اگر تغییر ارتفاع نباشد.}} W = \Delta K \Rightarrow P_{av} = \frac{\Delta K}{\Delta t}$$

گام اول: از قضیه کار و انرژی جنبشی، کار کل را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$W_{\text{کل}} = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \xrightarrow[v_f = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}]{v_i = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}} W_{\text{کل}} = \frac{1}{2} (1500) (25^2 - 15^2) = 300 \text{ kJ}$$

گام دوم: توان متوسط خودرو را به دست می‌آوریم:

$$P_{av} = \frac{W_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{300 \text{ kJ}}{8} = 37.5 \text{ kW} = 37500 \text{ W} \xrightarrow{1 \text{ hp} = 745 \text{ W}} P_{av} = 37500 \text{ W} \times \frac{1 \text{ hp}}{745 \text{ W}} = 50 \text{ hp}$$

تلمبه‌ای با توان ورودی ۸ kW در هر دقیقه ۹۰۰ L از آب دریاچه‌ای به چگالی 1 g/cm^3 را به اندازه ۱۶ m در راستای قائم بالا آورده و آن را با تندی 4 m/s وارد یک مخزن می‌کند. بازده تلمبه چند درصد است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۳۳ (۴) ۳۱/۵ (۳) ۳۰ (۲) ۲۸/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا کار مفید را از رابطه $W = \Delta K + \Delta U$ به دست بیاورید. سپس با تقسیم آن بر زمان انجام کار، توان خروجی را محاسبه کنید و در آخر از رابطه $\frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100$ بازده، مسئله را حل کنید.

Hint

درس Box

در تلمبه‌ای که مایعی به چگالی ρ و حجم V را با تغییر تندی به ارتفاع مشخصی می‌برد، داریم:

$$W_{\text{کل}} = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) + mg\Delta h \xrightarrow{m=\rho V} W = (\rho V) \left[\frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + g\Delta h \right]$$

$$P_{\text{ورودی}} = \frac{W}{\Delta t}$$

بازده تلمبه نیز برابر است با:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: کار کل و توان خروجی را به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta K + \Delta U}{\Delta t} \xrightarrow{\substack{m=\rho V=900 \text{ kg} \\ \Delta t=60 \text{ s}}} \rightarrow$$

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{900 \left[\frac{1}{2} (16^2 - 0) + (10)(16) \right]}{60} = 2520 \text{ W} = 2.52 \text{ kW}$$

گام دوم: از رابطه درس باکس، بازده به دست می‌آید:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{2.52}{8} \times 100 = 31.5\%$$

شخصی به جرم 60 kg از ارتفاع $8/4$ متری سطح زمین و از حال سکون روی تشک بزرگی به ضخامت 2 m سقوط می‌کند. اگر در حین برخورد شخص به تشک حداقل ضخامت تشک به 1 m برسد، اندازه نیروی وارد بر شخص از طرف تشک، با فرض ثابت بودن، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)، مقاومت هوا ناچیز و حرکت شخص همواره در راستای قائم است.

۳۲۴۰ (۲)

۲۶۴۰ (۱)

۴۴۴۰ (۴)

۳۸۴۰ (۳)

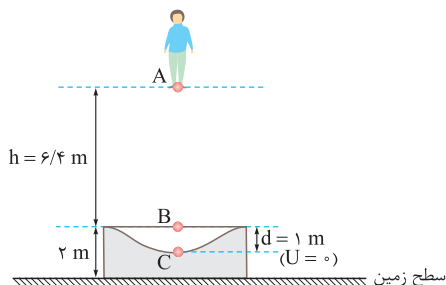
پاسخ: گزینه ۴



ابتدا از پایستگی انرژی مکانیکی، تندی برخورد شخص به تشک را به دست آورید. در انتها از قضیه کار و انرژی جنبشی، اندازه نیروی وارد بر شخص را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: قانون پایستگی انرژی مکانیکی، بین دو لحظه رهاشدن و برخورد به تشک را می‌نویسیم:



$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow 0 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

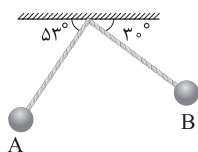
$$\Rightarrow v_B^2 = 2gh = 2 \times 10 \times 6/4 = 128 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

گام دوم: اگر نیروی وارد بر شخص از طرف تشک F باشد، از قضیه کار و انرژی داریم:

$$W_{\text{کل}} = \Delta K \Rightarrow W_F + W_{\text{mg}} = \frac{1}{2}m(0 - v_B^2) \Rightarrow -Fd + mgd = -\frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow Fd = mgd + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow F = mg + \frac{mv_B^2}{2d} \Rightarrow F = 60 \times 10 + \frac{60 \times 128}{2 \times 1} = 4440 \text{ N}$$

در شکل زیر، وزنه‌ای را به نخ‌ی بسته و از سقف آویزان کرده‌ایم. وزنه را روی دایره‌ای به شعاع نخ از حالت قائم آن قدر دور می‌کنیم که زاویه نخ با راستای قائم ۹۰° درجه شود و از این حالت وزنه را رها می‌کنیم. تندی وزنه در نقطه A چند برابر تندی آن در نقطه B است؟ ($\sin ۵۳^\circ = ۰/۸$ ، $g = ۱۰ \text{ N/kg}$ و مقاومت هوا و جرم نخ ناچیز است).



$$\frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \quad (۲)$$

$$\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{۵}}{۵} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

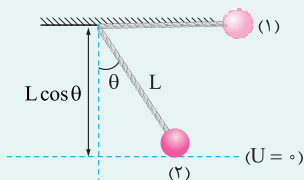
درس Box

اگر وزنه‌ای به جرم m را به نخ‌ی متصل و از حالت قائم رها کنیم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

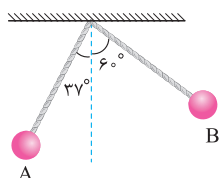
$$\Rightarrow ۰ + mgL \cos \theta = \frac{1}{2}mv_2^2 + ۰ \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gL \cos \theta}$$

θ زاویه نخ با محور قائم است.



با توجه به رابطه ذکر شده درس باکس می‌توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی



$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{2gL \cos \theta_A}}{\sqrt{2gL \cos \theta_B}} = \sqrt{\frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B}} = \sqrt{\frac{\cos ۳۷^\circ}{\cos ۶^\circ}} = \sqrt{\frac{۰/۸}{۰/۵}} = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}$$

جسمی از سطح زمین با تندی ۱۲ m/s در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر در برگشت، جسم با تندی ۶ m/s به سطح زمین برخورد کند، اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم، با فرض ثابت بودن در طی مسیر، چند برابر اندازه وزن جسم است؟

$$\frac{۶}{۵} (۴)$$

$$\frac{۴}{۵} (۳)$$

$$\frac{۳}{۵} (۲)$$

$$\frac{۲}{۵} (۱)$$

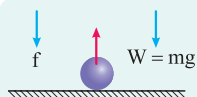
پاسخ: گزینه ۲

ابتدا شتاب رفت و برگشت را از رابطه مستقل از زمان به دست آورید. سپس با توجه به رابطه شتاب بر حسب نیروها، خواسته سؤال را حساب کنید.

Hint

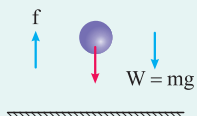
درس Box

شتاب جسم هنگام بالارفتن و سقوط را به ترتیب a_{up} و a_{down} در نظر می‌گیریم:



$$F_{\text{net}} = ma_{\text{up}} \Rightarrow -mg - f = ma_{\text{up}} \Rightarrow a_{\text{up}} = -g - \frac{f}{m} \Rightarrow |a_{\text{up}}| = g + \frac{f}{m}$$

در هنگام سقوط:



$$F_{\text{net}} = ma_{\text{down}} \Rightarrow f - mg = ma_{\text{down}} \Rightarrow |a_{\text{down}}| = |g - \frac{f}{m}|$$

گام اول: شتاب رفت و برگشت را از رابطه مستقل از زمان، به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

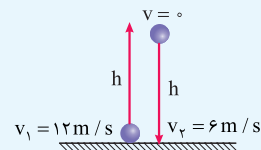
$$|a_{\text{up}}| = \frac{(۱۲)^2 - (۰)^2}{2h} = \frac{۷۲}{h}, \quad |a_{\text{down}}| = \frac{|۶^2 - ۰|}{2h} = \frac{۱۸}{h}$$

گام دوم: از روابط درس باکس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} |a_{\text{up}}| = g + \frac{f}{m} = \frac{۷۲}{h} \\ |a_{\text{down}}| = g - \frac{f}{m} = \frac{۱۸}{h} \end{cases} \Rightarrow |a_{\text{up}}| = ۴|a_{\text{down}}| \Rightarrow g + \frac{f}{m} = ۴(g - \frac{f}{m}) \Rightarrow g + \frac{f}{m} = ۴g - \frac{۴f}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{۵f}{m} = ۳g \Rightarrow f = \frac{۳}{۵}mg$$

قضیه کار و انرژی جنبشی را یک بار در مسیر رفت و بار دیگر در مسیر برگشت می‌نویسیم و روابط به دست آمده را برهم تقسیم می‌کنیم. مسیر رفت:



$$\Delta K = W_t \Rightarrow ۰ - K_1 = W_{\text{mg}} + W_{f_D} \quad \frac{K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2}{v_1 = 12 \text{ m/s}} \Rightarrow -\frac{1}{2}m(12)^2 = -mgh - f_D h \Rightarrow ۷۲m = mgh + f_D h \quad (I)$$

مسیر برگشت:

$$\Delta K = W_t \Rightarrow K_2 - ۰ = W_{\text{mg}} + W_{f_D} \quad \frac{K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2}{v_2 = ۶ \text{ m/s}} \Rightarrow \frac{1}{2}m(۶)^2 = mgh - f_D h \Rightarrow ۱۸m = mgh - f_D h \quad (II)$$

په جور دیگه

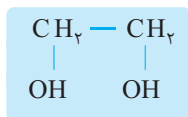


$$\epsilon = \frac{mgh + f_D h}{mgh - f_D h} \Rightarrow \epsilon mg - \epsilon f_D = mg + f_D \Rightarrow f_D = \frac{3}{5} mg$$

از تقسیم رابطه I بر II داریم:

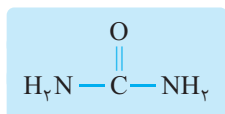
کدام مورد درست است؟

۷۶



(۱) در واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گاز هیدروژن تولید می‌شود و گرما از محیط به سامانه انتقال می‌یابد.

(۲) کاغذ pH در محلول‌های جوش شیرین و اتیلن گلیکول در آب، به رنگ آبی درمی‌آید.



(۳) اگر به جای گروه‌های NH_2 در اوره، گروه‌های CH_3 قرار گیرد، ماده‌ای به دست می‌آید که به هر نسبت در آب حل می‌شود.

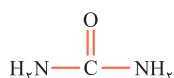
(۴) وازلین با فرمول مولکولی $\text{C}_{18}\text{H}_{38}$ ، ناقطبی بوده و در هگزان به خوبی حل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

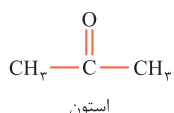
پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرمول مولکولی اوره، $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ یا $\text{CH}_4\text{N}_2\text{O}$ است و در ساختار آن، عامل آمیدی $-\text{C}(=\text{O})-\text{N}-$ وجود دارد.

ساختار این ماده به صورت مقابل است:



با جایگزین کردن گروه‌های NH_2 در ساختار اوره با گروه‌های CH_3 ، مولکول حاصل، استون خواهد بود. این ماده به هر نسبتی در آب حل می‌شود و نمی‌توان محلول سیرشده‌ای از آن در آب تهیه کرد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): نوعی پاک‌کننده خورنده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. معادله نوشتاری واکنش این مخلوط با آب به صورت زیر است:



با توجه به معادله بالا مشخص است که در این واکنش، گاز هیدروژن (H_2) آزاد می‌شود. هم‌چنین با توجه به $\Delta H < 0$ این واکنش و گرماده بودن آن، می‌توان گفت که بر اثر انجام این واکنش، گرما از سامانه به محیط انتقال می‌یابد.

گزینه (۲): با توجه به این که جوش شیرین یا سدیم هیدروژن کربنات (NaHCO_3) یک ضداکسید است، می‌توان گفت محلول این ماده خاصیت بازی داشته و رنگ کاغذ pH را آبی می‌کند، در حالی که اتیلن گلیکول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$) به عنوان یک دی‌الکل به صورت کاملاً مولکولی در آب حل شده و غلظت یون‌ها را تغییر نمی‌دهد؛ در نتیجه محلول آن در آب خنثی بوده و کاغذ pH را به رنگ آبی در نمی‌آورد.

گزینه (۴): وازلین یک هیدروکربن و ناقطبی بوده و در هگزان که یک حلال ناقطبی است، به خوبی حل می‌شود، اما دقت کنید که فرمول مولکولی میانگین وازلین به صورت $\text{C}_{25}\text{H}_{52}$ می‌باشد؛ نه $\text{C}_{18}\text{H}_{38}$!

فرمول تقریبی وازلین، $\text{C}_{25}\text{H}_{52}$ و فرمول تقریبی گریس، $\text{C}_{18}\text{H}_{38}$ است. یه وقت با هم قاطی نکنین!

گول نخوری ✗

با توجه به شکل‌های زیر که الگویی برای نمایش یک مولکول اسید چرب و یک استر سنگین است، کدام مورد

نادرست است؟



(۱) هر دو ترکیب، از اجزای سازندهٔ چربی‌ها بوده و بخش‌های A و A' در آن‌ها، به ترتیب دارای گروه‌های عاملی استری و کربوکسیل هستند.

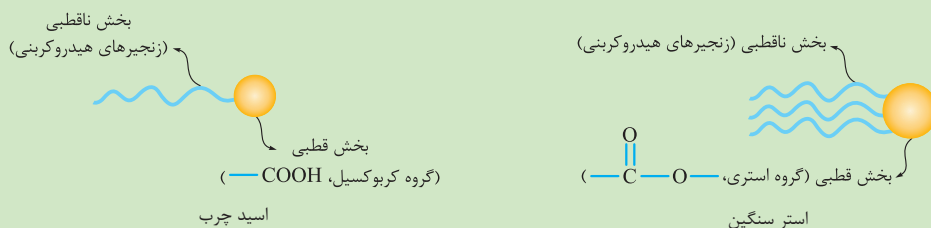
(۲) هر دو ترکیب، دارای بخش‌های قطبی و ناقطبی بوده و نیروی بین مولکولی غالب در هر دو آن‌ها از نوع وان‌دروالسی است.

(۳) در ساختار هر مولکول از ترکیب (۱)، ۶ پیوند C—O وجود دارد.

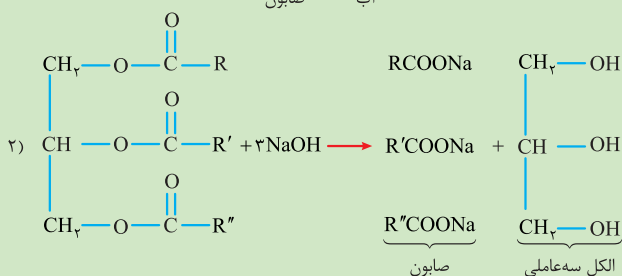
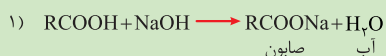
(۴) هر دو ترکیب، توانایی واکنش با محلول سود را دارند و فرآوردهٔ این واکنش‌ها، آب و نمک اسید چرب است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

اسیدهای چرب و استرهای سنگین را می‌توان با الگوهای زیر نشان داد:



بنابراین شکل‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان‌دهندهٔ استر سه‌عاملی و اسید چرب هستند.



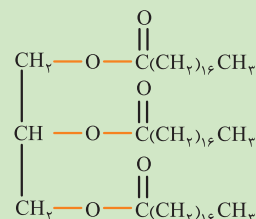
طبق معادله‌های مقابل، از واکنش اسیدهای چرب با سدیم هیدروکسید، صابون (نمک اسید چرب) و آب به دست می‌آید، اما از واکنش استرهای سنگین با سدیم هیدروکسید، صابون و الکل سه‌عاملی به دست می‌آید.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): A و A' بخش‌های قطبی مولکول‌های نشان داده شده هستند و A دارای گروه عاملی استری (—C(=O)—O—) و A' دارای گروه عاملی کربوکسیل (—COOH) است.

گزینهٔ (۲): نیروی بین مولکولی غالب در هر دو این مولکول‌ها از نوع وان‌دروالسی است. از آن‌جا که در این مولکول‌ها، بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد، در آب حل نمی‌شوند.

گزینهٔ (۳): در ساختار هر مولکول از ترکیب (۱)، در مجموع ۶ پیوند اشتراکی C—O دیده می‌شود:



تصاویر زیر الگوهای ساختاری صابون، اسید چرب و استر سنگین را نمایش می‌دهند. با توجه به آن‌ها به پرسش‌ها پاسخ دهید:

(سوال ۳ - امتحان نهایی فرداد ۹۹)



الف) چربی‌ها، مخلوطی از کدام دو ترکیب هستند؟

ب) کدام ساختار مربوط به اسید چرب است؟

پ) نیروی بین مولکولی غالب در ترکیب (۲) از چه نوعی است؟ چرا؟

ت) کدام ترکیب در آب حل می‌شود؟

با توجه به شکل زیر که مربوط به مقایسه رفتار نور در کلوئیدها و محلول‌ها است، درستی یا نادرستی کدام گزینه با بقیه گزینه‌ها تفاوت دارد؟



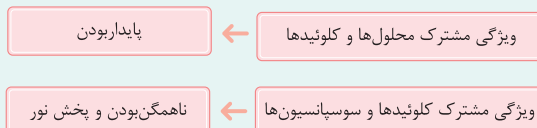
- (۱) هر دو مخلوط، پایدار هستند و با گذشت زمان، ذرات سازنده آن‌ها ته‌نشین نمی‌شود.
- (۲) مخلوط (۱) همانند سوسپانسیون‌ها، ناهمگن به شمار می‌آید.
- (۳) مخلوط اتانول و آب از نوع (۲) و شیر از نوع (۱) است.
- (۴) ذرات حل‌شده در مخلوط (۱)، توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت هستند.

پاسخ: گزینه (۴)

درس Box

ویژگی	نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کنند.	نور را پخش می‌کنند.	نور را پخش می‌کنند.	نور را عبور می‌دهند (پخش نمی‌کنند).
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن (به ظاهر همگن)	همگن	همگن
پایداری	ناپایدار است/ته‌نشین می‌شود.	پایدار است/ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است/ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است/ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌ها	سديم کلرید (نمک) در آب، آب دریا، هوا، آب‌قند، ید در هگزان
نمونه‌های مهم	شربت معده، دوغ، شربت خاکشیر و آب گل‌آلود	رنگ‌های پوششی، چسب‌ها، شیر، ژله، سس مایونز، مخلوط آب، صابون و چربی		

از آن‌جا که کلوئیدها در برخی رفتارها شبیه محلول‌ها و در برخی دیگر شبیه سوسپانسیون‌ها هستند، می‌توان رفتار کلوئیدها را رفتاری بین محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها، نادرست است. محلول‌ها (مانند محلول مس (II) سولفات در آب) نور را از خود عبور می‌دهند؛ بنابراین مسیر عبور نور از میان محلول‌ها قابل مشاهده نیست. اما ذره‌های موجود در کلوئید، درشت‌تر از محلول‌اند؛ به همین دلیل، کلوئیدها برخلاف محلول‌ها نور را پخش می‌کنند، در نتیجه مسیر عبور نور از میان کلوئیدها قابل دیدن است؛ بنابراین مخلوط (۱)، نشان‌دهنده رفتار کلوئیدها و مخلوط (۲)، نشان‌دهنده رفتار محلول‌ها در برابر نور است. حالا بیایید دونه‌دونه! گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینه (۱): کلوئیدها همانند محلول‌ها پایدار هستند و ذرات سازنده هر دو آن‌ها با گذشت زمان ته‌نشین نمی‌شوند.
 گزینه (۲): کلوئیدها همانند سوسپانسیون‌ها و برخلاف محلول‌ها، جزء مخلوط‌های ناهمگن هستند.
 گزینه (۳): اتانول در آب به هر نسبتی حل شده و مخلوط این دو ماده، محلول محسوب می‌شود، هم‌چنین شیر نیز نوعی کلوئید است.
 گزینه (۴): مخلوط (۱)، کلوئید است. دقت کنید که در کلوئیدها، ماده‌ای در ماده دیگر حل نمی‌شود؛ در نتیجه استفاده از واژه‌هایی مانند حل‌شدن، حلال و حل‌شونده و ... برای کلوئیدها ممنوع و غیرمجاز!

- (۱) صابون مراغه به دلیل خاصیت بازی و افزودنی‌های مناسب مانند گوگرد و کلر، خاصیت لکه‌بری و پاک‌کنندگی خوبی دارد.
- (۲) برای از بین بردن رسوب تشکیل شده در دیگ‌های بخار و لوله‌ها، باید از پاک‌کننده‌های غیرصابونی استفاده کرد.
- (۳) از واکنش هر مول اسید C_7H_7COOH با مقدار کافی پتاسیم هیدروکسید، یک مول صابون مایع با قدرت پاک‌کنندگی بالا تولید می‌شود.
- (۴) پیش از توصیف علمی اسیدها و بازها توسط آرنیوس، شیمی‌دان‌ها با برخی از واکنش‌های میان این مواد آشنا بودند.

پاسخ: گزینه ۴

شواهد بسیاری در تاریخ علم وجود دارد که نشان می‌دهند پیش از آن‌که ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند. سوانت آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

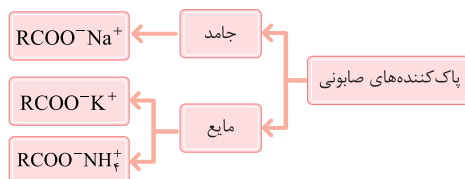
بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): دقت کنید که صابون مراغه، افزودنی شیمیایی ندارد و به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می‌شود.



گزینه (۲): رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آبراه‌ها و دیگ‌های بخار آن‌چنان به این سطح‌ها می‌چسبند که با صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی زدوده نمی‌شوند. برای زدودن این رسوب‌ها به پاک‌کننده‌های خورنده نیاز است که بتوانند با آن‌ها واکنش شیمیایی بدهند و آن‌ها را به فرآورده‌هایی تبدیل کنند که با آب شسته شوند.

گزینه (۳): به نمک اسیدهای چرب، صابون می‌گویند. صابون‌های جامد، نمک سدیم اسید چرب و صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسید چرب هستند:



اما دقت کنید که C_7H_7COOH به دلیل زنجیر هیدروکربنی کوتاهی که دارد، اسید چرب نبوده و نمک حاصل از واکنش آن با پتاسیم هیدروکسید ($C_7H_7COO^-K^+$) نیز، پاک‌کننده محسوب نمی‌شود.

اگر یک پاک‌کننده صابونی مایع در زنجیر آلکیل خود (R)، دارای ۱۳ پیوند کربن - کربن باشد و ۱۰۳/۶ گرم از آن با مقدار کافی منیزیم کلرید واکنش دهد، جرم رسوب تشکیل شده چند گرم خواهد بود و اختلاف شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول شیمیایی این پاک‌کننده کدام است؟ (در ساختار پاک‌کننده، یون فلزی وجود ندارد.)

کاتیون صابون مایع، آمونیوم است.

$$(H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Mg = 24 : g.mol^{-1})$$

$$18 - 101/2 (2)$$

$$18 - 96/4 (1)$$

$$14 - 101/2 (4)$$

$$14 - 96/4 (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

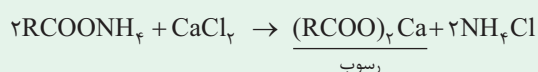
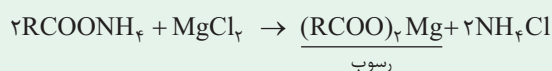
گام اول: ساختار پاک‌کننده صابونی مورد نظر را پیدا می‌کنیم:

در زنجیره آلکیل به دلیل داشتن ۱۳ پیوند $C-C$ ، ۱۴ اتم کربن وجود دارد و چون در ساختار این پاک‌کننده، یون فلزی وجود ندارد، جزء کاتیونی آن را یون آمونیوم (NH_4^+) تشکیل می‌دهد؛ بنابراین داریم:

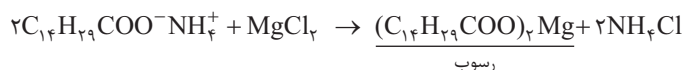


مشخص است که در فرمول شیمیایی این صابون، شمار اتم‌های C و H به ترتیب برابر با ۱۵ و ۳۳ و تفاوت شمار اتم‌های C و H، برابر با $33 - 15 = 18$ است ← گزینه‌های (۳) و (۴) پر!

معادله واکنش صابون آمونیوم‌دار با محلول‌های منیزیم کلرید و کلسیم کلرید به صورت زیر است:



گام دوم: با توجه به نکته بالا، می‌توانیم معادله واکنش صابون $C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+$ با محلول منیزیم کلرید ($MgCl_2$) را می‌نویسیم:

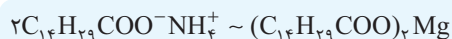


گام سوم: جرم رسوب حاصل از واکنش ۱۰۳/۶ گرم از صابون مورد نظر با مقدار کافی محلول $MgCl_2$ را حساب می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$103/6 \text{ g } C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+ \times \frac{1 \text{ mol } C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+}{259 \text{ g } C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+} \times \frac{1 \text{ mol } (C_{14}H_{29}COO)_2Mg}{2 \text{ mol } C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+} \times$$

$$\frac{506 \text{ g } (C_{14}H_{29}COO)_2Mg}{1 \text{ mol } (C_{14}H_{29}COO)_2Mg} = 101/2 \text{ g } (C_{14}H_{29}COO)_2Mg$$



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{103/6}{2 \times 259} = \frac{x}{1 \times 506}$$

$2C_{14}H_{29}COO^-NH_4^+ \quad (C_{14}H_{29}COO)_2Mg$

$$\Rightarrow x = \frac{103/6 \times 506}{2 \times 259} = 101/2 \text{ g } (C_{14}H_{29}COO)_2Mg$$

یه جور دیگه

یک مول از هر کدام از ترکیب‌های Li_2O ، N_2O_5 و BaO ، در ظرف‌هایی جداگانه به ۱۰ لیتر آب افزوده می‌شود. کدام مورد درست است؟ (از تغییر حجم آب صرف نظر کنید).

- (۱) رسانایی الکتریکی محلول دی‌نیتروژن پنتاکسید از محلول لیتیم اکسید، بیشتر است.
- (۲) مدل آرنیوس می‌تواند تفاوت رنگ کاغذ pH در محلول‌های دی‌نیتروژن پنتاکسید و باریم اکسید را توجیه کند.
- (۳) با یونش لیتیم اکسید در آب، $10^{-13} \times 24$ یون در محلول ایجاد می‌شود.
- (۴) مدل فضاپرکن آنیون نیتروژن‌دار موجود در محلول دی‌نیتروژن پنتاکسید، مشابه یون سولفات است.

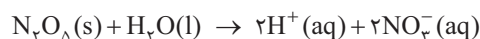
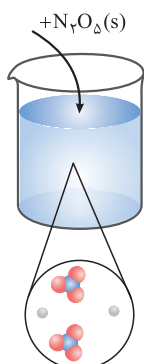


پاسخ: گزینه ۲

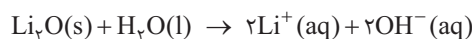
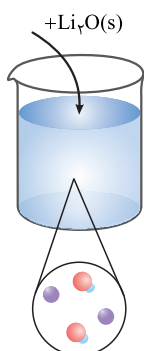
پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا محلول‌های حاصل در هر ظرف را مشخص می‌کنیم:

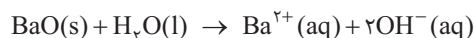
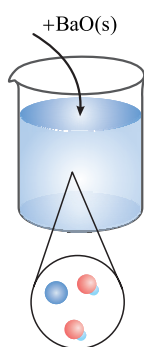
- با حل شدن هر مول N_2O_5 در آب (شکل روبه‌رو)، ۲ مول H^+ و ۲ مول NO_3^- (در مجموع ۴ مول یون) تولید می‌شود.



- با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی در آب، ۲ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول هیدروکسید (در مجموع ۴ مول یون) تولید می‌شود.



- با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی خاکی در آب، ۱ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید (در مجموع ۳ مول یون) تولید می‌شود.



مدل آرنیوس	آیا می‌تواند غلظت یون هیدرونیوم را در محلول دو اسید با هم مقایسه کند؟	خیر
	آیا می‌تواند غلظت یون هیدروکسید را در محلول دو باز با هم مقایسه کند؟	خیر
	آیا می‌تواند غلظت یون هیدرونیوم و یا هیدروکسید را در محلول یک اسید و یک باز با هم مقایسه کند؟	بله

طبق مدل آرنیوس، N_2O_5 ، اسید و Li_2O ، باز است؛ بنابراین می‌توان گفت که $[\text{H}^+]$ در محلول N_2O_5 بیشتر از محلول Li_2O است (با $[\text{OH}^-]$ در محلول Li_2O بیشتر از محلول N_2O_5 است).

بررسی سایر گزینه‌ها:

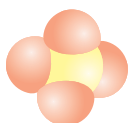
گزینه (۱): رسانایی الکتریکی محلول‌ها به مجموع غلظت یون‌ها در آن‌ها بستگی دارد. همان‌طور که گفتیم، در محلول حاصل از انحلال یک مول از هر دو ترکیب N_2O_5 و Li_2O ، ۴ مول یون حاصل شده و با توجه به حجم یکسان محلول‌ها، می‌توان گفت که مجموع غلظت یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی آن‌ها یکسان می‌باشد.

گزینه (۳): شمار یون‌ها در محلول حاصل از انحلال یک مول Li_2O برابر است با:

$$1 \text{ mol Li}_2\text{O} \times \frac{4 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol Li}_2\text{O}} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ یون}}{1 \text{ mol یون}} = 2.412 \times 10^{24} \text{ یون}$$

اما دقت کنید که **یونش**، فرایندی است که در آن یک ترکیب مولکولی به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود و با توجه به این که Li_2O یک ترکیب یونی است، استفاده از واژه «یونش» برای آن غلط اندر غلطه! بلکه باید از واژه «تفکیک» برای آن استفاده کرد.

گزینه (۴): آنیون موجود در محلول حاوی N_2O_5 ، یون نیترات (NO_3^-) است. با توجه به شکل‌های زیر مشخص است که مدل فضاپرکن یون‌های نیترات (NO_3^-) و سولفات (SO_4^{2-}) متفاوت‌اند:



سولفات (SO_4^{2-})



نیترات (NO_3^-)

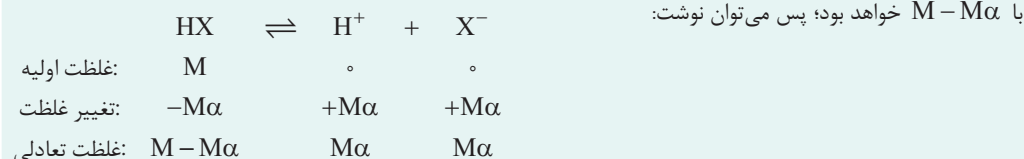
اگر ثابت یونش نوعی اسید ضعیف HA در دمای اتاق برابر 8×10^{-5} باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۲/۳ گرم بر لیتر آن، به تقریب کدام است و چنانچه غلظت اولیه محلول را با افزودن اسید به ۰/۲ مولار برسانیم، درجه یونش اسید به تقریب چند درصد تغییر می کند؟ ($K_a = 46 \text{ g.mol}^{-1}$)

- (۱) ۰/۰۰۲ - ۵۰٪ کاهش
(۲) ۰/۰۰۲ - ۵۰٪ افزایش
(۳) ۰/۰۴ - ۵۰٪ کاهش
(۴) ۰/۰۴ - ۵۰٪ افزایش

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

اگر درجه یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیه اسید برابر M باشد، به اندازه $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ پس می توان نوشت:



$$K_a = \frac{[H^+][X^-]}{[HX]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} = \frac{M^2\alpha^2}{M(1-\alpha)} = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}, K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]}$$

حالا اگر بخواهیم $[H^+]$ را بر حسب K_a و α به دست آوریم، این پوری می شه:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\alpha = \frac{[H^+]}{M}} K_a = \frac{M \times \frac{[H^+]^2}{M^2}}{1-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{[H^+]^2}{M(1-\alpha)} \Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a \cdot M(1-\alpha)}$$

گام اول: غلظت مولی اولیه اسید را (بر حسب mol.L^{-1}) حساب می کنیم:

$$2/3 \text{ g/L} \times \frac{1 \text{ mol HA}}{46 \text{ g HA}} = \frac{1}{23} = 0.043 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: با توجه به K_a و غلظت اولیه اسید، $[H^+]$ را در آن به دست می آوریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \Rightarrow 8 \times 10^{-5} = \frac{[H^+]^2}{0.043 - [H^+]}$$

$$\text{می توانیم از } [H^+] \text{ در مقابل } M \text{ صرف نظر کنیم.} \Rightarrow [H^+]^2 = 8 \times 10^{-5} \times 0.043 = 3.44 \times 10^{-6} \Rightarrow [H^+] = 1.85 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: درجه یونش محلول را در حالت اولیه و همچنین پس از افزودن اسید، محاسبه می کنیم:

$$K_a = M\alpha^2 \Rightarrow 8 \times 10^{-5} = \frac{1}{23} \times \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = 1.84 \times 10^{-4} \Rightarrow \alpha = 4.29 \times 10^{-3}$$

ثابت یونش (K_a) فقط تابع دما است؛ بنابراین در دمای معین، K_a ثابت بوده و می توان گفت:

$$K_a = M\alpha^2 \Rightarrow 8 \times 10^{-5} = 0.02 \times \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \times 10^{-4} \Rightarrow \alpha = 2 \times 10^{-2}$$

بنابراین درجه یونش اسید نسبت به حالت اولیه، نصف می شود.

در دمای معین، K_a ثابت بوده و می توان گفت در اسیدهای ضعیف، هر چه غلظت مولی (M) افزایش یابد، درجه یونش (α) کاهش می یابد تا حاصل ضرب آن ها (K_a) ثابت بماند؛ بنابراین برای اسیدهای ضعیف با K_a خیلی کوچک داریم:

$$K_a = \frac{M}{\alpha^2} \uparrow, \alpha^2 \downarrow \text{ در دمای ثابت } \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{0.043}{0.02}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه با توجه به نصف شدن درجه یونش نسبت به حالت اولیه، می توان نتیجه گرفت که درجه یونش، ۵۰٪ کاهش می یابد.

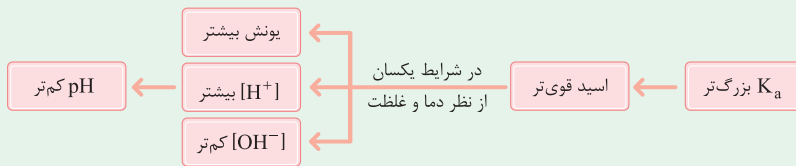
تیزپاوی

در دمای 25°C ، pH محلول 0.1 مولار کدام اسید در آب بیشتر است؟

- (۱) هیدرویدیک اسید
(۲) نیترواسید
(۳) هیدروفلوئوریک اسید
(۴) نیتریک اسید

پاسخ: گزینه ۲

نکته

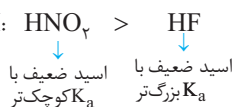


پاسخ خیلی تشریحی ✓

هر چه اسید ضعیف تر (و K_a آن کوچک تر) باشد، در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، در محلول حاصل از آن غلظت یون H^+ کم تر و pH آن بزرگ تر است.

هیدرویدیک اسید (HI) و نیتریک اسید (HNO_3)، هر دو جزء اسیدهای قوی تک پروتون دار هستند و تقریباً به طور کامل در آب یونیده می شود؛ پس در غلظت های یکسان، $[\text{H}^+]$ در محلول این دو اسید، بیشتر از محلول اسیدهای ضعیف نیترو اسید (HNO_2) و هیدروفلوئوریک اسید (HF) است؛ در نتیجه pH محلول این دو اسید قوی، کوچک تر است.

قدرت اسیدی (K_a) HF از HNO_2 بیشتر و HF اسید قوی تری است؛ پس در غلظت یکسان، pH محلول HNO_2 بزرگ تر خواهد بود:



نکته

با توجه به صفحه های ۲۲ تا ۲۴ کتاب درسی، مقایسه K_a و در نتیجه قدرت اسیدی چند اسید ضعیف به صورت زیر است:

مقایسه K_a و قدرت اسیدی: $\text{HF} > \text{HNO}_2 > \text{HCOOH} > \text{CH}_3\text{COOH} > \text{H}_2\text{CO}_3 > \text{HCN}$
هیدروفلوئوریک اسید نیترو اسید فورمیک اسید استیک اسید کربنیک اسید هیدروسیانیک اسید

اگر محلولی یک‌لیتری از دو اسید هیدروسیانیک اسید (I) و فورمیک اسید (II) با غلظت یک مولار در دمای یکسان داشته باشیم، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)

الف) رسانایی محلول (I) از (II) کم‌تر و تفاوت جرم آنیون حاصل از آن‌ها برابر ۱۹ گرم است.

ب) ثابت یونش محلول هر دو اسید از ثابت یونش استیک اسید، بیشتر است.

پ) سرعت واکنش فلز سدیم در ظرف (II) از ظرف (I) بیشتر اما حجم گاز تولیدی در دو ظرف در پایان واکنش برابر است.

ت) اگر در دمای $25^{\circ}C$ ، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول (II)، $2/5$ برابر محلول (I) باشد، pH محلول (II)، $4/0$ واحد کم‌تر از محلول (I) است.

(۱) الف - پ

(۲) الف - پ

(۳) الف - پ

(۴) الف - پ

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هیدروسیانیک اسید (HCN) و فورمیک اسید (HCOOH)، هر دو اسیدهایی ضعیف هستند، به طوری که K_a و قدرت اسیدی HCOOH از HCN بیشتر است؛ در نتیجه در غلظت اولیه یکسان از این دو اسید، غلظت یون‌ها در محلول HCOOH و در نتیجه رسانایی الکتریکی این محلول بیشتر است. حال با فرض قوی‌بودن ($\alpha = 1$) دو اسید، داریم:

$$HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$$

$$\Rightarrow [H^+] = [HCOO^-] = M \cdot \alpha = 1 \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow[\text{حجم}]{\text{مول غلظت مولی}} n_{HCOO^-} = 1 \text{ mol} \times \frac{45 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 45 \text{ g HCOO}^-$$

محلول هیدروسیانیک اسید: $HCN(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CN^-(aq)$

$$\Rightarrow [H^+] = [CN^-] = M \cdot \alpha = 1 \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow[\text{حجم}]{\text{مول غلظت مولی}} c_{CN^-} = 1 \text{ mol} \times \frac{26 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 26 \text{ g CN}^-$$

$$45 - 26 = 19 \text{ g}$$

اما دقت کنید که هر دو اسید، ضعیف بوده و درجه یونش آن‌ها بین 0 تا 1 ($0 < \alpha < 1$) است؛ بنابراین تفاوت جرم آنیون‌های حاصل در دو محلول کم‌تر از ۱۹ گرم می‌باشد.

ب) ترتیب ثابت یونش هیدروسیانیک اسید (HCN)، فورمیک اسید (HCOOH) و استیک اسید (CH_3COOH) به صورت زیر است:

$$K_a : HCOOH > CH_3COOH > HCN$$

بنابراین ثابت یونش محلول HCN کم‌تر از CH_3COOH می‌باشد.

در کربوکسیلیک اسیدها، با افزایش تعداد کربن‌ها، قدرت اسیدی کاهش می‌یابد:

$$K_a : HCOOH > CH_3COOH > CH_3CH_2COOH > \dots$$

متانوئیک (فورمیک) اسید اتانوئیک (استیک) اسید پروپانوئیک اسید

پ) سرعت واکنش فلز سدیم با محلول این دو اسید، به غلظت یون هیدرونیوم (H^+) موجود در محلول بستگی دارد، به طوری که هر چه غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید بیشتر باشد، سرعت واکنش آن محلول با فلز بیشتر خواهد بود؛ بنابراین می‌توان گفت که در دما و غلظت یکسان، هر چه اسیدی قوی‌تر باشد (ثابت یونش آن بزرگ‌تر باشد)، با سرعت و شدت بیشتری با فلزهایی مانند سدیم واکنش می‌دهد؛ بنابراین با توجه به قوی‌تر بودن فورمیک اسید نسبت به هیدروسیانیک اسید می‌توان گفت که سرعت واکنش فلز سدیم با محلول (II) بیشتر است.

مشاوره مقایسه ویژگی‌های مختلف در دو محلول، به ویژه مقایسه دو اسید قوی و ضعیف، پای ثابت سوالات کنکور سراسری در هر دوره محسوب می‌شود که در قالب هر دو نوع سؤال مفهومی و محاسباتی طرح می‌شود. *فلاصه با توجه به اهمیت بسیار بالای آن مبحث، بر شما واجب که سعی کنید تست‌های متنوعی از آن حل کنید.*

پاسخ خیلی تشریحی



معادله واکنش فلز سدیم با محلول اسیدهای تک پروتون دار را می توان به صورت $2\text{Na} + 2\text{HA} \rightarrow 2\text{NaA} + \text{H}_2$ نشان داد. اگر جرم نوار سدیم و غلظت محلول های اسیدی یکسان باشد، با توجه به دانش استوکیومتری مون! می شه فهمید که در نهایت (در پایان واکنش)، جرم یا حجم گاز هیدروژن آزاد شده در واکنش ها یکسان خواهد بود. (در هر دو حالت به ازای مصرف ۲ مول سدیم یا ۲ مول اسید، ۱ مول گاز هیدروژن تولید می شود.)

ت)

$$[\text{H}^+]_{(\text{II})} = 2 / 5 [\text{H}^+]_{(\text{I})} \xrightarrow{\text{از دو طرف، لگاریتم منفی می گیریم.}} -\log [\text{H}^+]_{(\text{II})} = -\log 2 / 5 [\text{H}^+]_{(\text{I})}$$

$$\Rightarrow -\log [\text{H}^+]_{(\text{II})} = -\log 2 / 5 - \log [\text{H}^+]_{(\text{I})}$$

$$\Rightarrow \text{pH}_{(\text{II})} = -\log \frac{2}{5} + \text{pH}_{(\text{I})} \Rightarrow \text{pH}_{(\text{II})} = \underbrace{-(\log 5)}_{\circ/7} - \underbrace{(\log 2)}_{\circ/3} + \text{pH}_{(\text{I})} \Rightarrow \text{pH}_{(\text{II})} = \text{pH}_{(\text{I})} - \circ/4$$

اگر ثابت یونش اسید HA، نصف ثابت یونش اسید HB و درصد یونش محلول ۱ مولار HB، ۲۰٪ باشد، درصد یونش محلول ۰/۱۵ مولار HA کدام است؟

۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

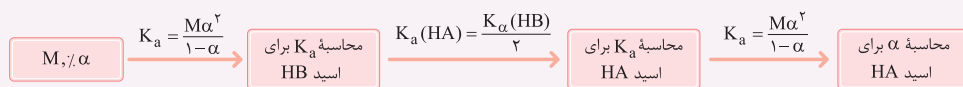
۳۳ (۲)

۶۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مسیر حل اینطور ریاست:

Hint



با توجه به درصد یونش و غلظت محلول اسید HB، ثابت یونش این اسید را حساب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{HB اسید: } K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow[\alpha = \frac{\% \alpha}{100} = \frac{20}{100} = 0.2]{M=1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}} K_a = \frac{1 \times (0.2)^2}{1 - 0.2} = \frac{0.04}{0.8} = 5 \times 10^{-2}$$

از آن جا که ثابت یونش اسید HA، نصف ثابت یونش اسید HB است، داریم:

$$\text{HA اسید: } K_a = \frac{5 \times 10^{-2}}{2} = 2.5 \times 10^{-2}$$

در نهایت باید درجه یونش محلول ۰/۱۵ مولار اسید HA را به دست بیاوریم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{2.5 \times 10^{-2}}{1-\alpha} = \frac{0.15 \times \alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 6\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

توجه: برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

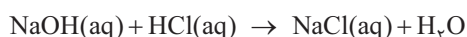
$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(6)(-1)}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-5}{12} = -0.5 \\ x_2 = \frac{-1+5}{12} = \frac{4}{12} = 0.33 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0.33 \Rightarrow \% \alpha = \alpha \times 100 = 33$$

- (۱) از واکنش ۱ لیتر محلول مولار سود با ۱ لیتر محلول مولار جوهرنمک، محلول آب‌نمک با غلظت ۱ مولار تولید می‌شود.
 (۲) محلولی از نیتریک اسید با $\text{pH} = 0$ ، همانند یک نمونه آب خالص، دارای یون هیدروکسید است.
 (۳) اگر برای محلول ۳ مولار یک اسید، pH در گستره صفر تا ۷ قرار گیرد، آن اسید از هیدروبرمیک اسید، ضعیف‌تر است.
 (۴) در مقداری آب گوجه‌فرنگی همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

واکنش بین محلول سود (محلول سدیم هیدروکسید در آب) و محلول هیدروکلریک اسید (محلول جوهرنمک) به صورت زیر است:



در این واکنش، ۱ لیتر محلول یک مولار سود (محلولی که حاوی ۱ مول سدیم هیدروکسید است) و ۱ لیتر محلول یک مولار هیدروکلریک اسید (محلولی که حاوی ۱ مول هیدروکلریک اسید است) مصرف شده است؛ پس می‌توان گفت مقدار سدیم کلرید تولیدشده برابر با ۱ مول می‌شود. توجه داریم که در این فرایند، دو محلول ۱ لیتری با هم مخلوط شده‌اند، پس حجم محلول نهایی برابر با ۲ لیتر می‌شود. بر این اساس، غلظت مولی محلول سدیم کلرید (نمک خوراکی) تولیدشده را محاسبه می‌کنیم:

$$[\text{NaCl}] = \frac{1 \text{ mol NaCl}}{2 \text{ L محلول}} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

بنابراین از واکنش ۱ لیتر محلول مولار سود با ۱ لیتر محلول مولار جوهرنمک، محلول آب‌نمک با غلظت نیم‌مولار حاصل می‌شود.

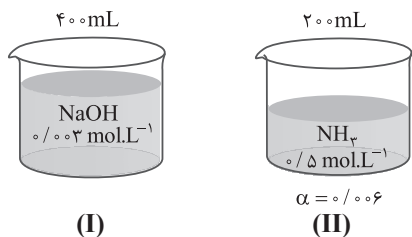
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲): آب و همه محلول‌های آبی، محتوی یون‌های هیدرونیوم (H^+) و هیدروکسید (OH^-) هستند. به عنوان مثال، در محلولی از نیتریک اسید با $\text{pH} = 0$ ، غلظت یون هیدروژن برابر با ۱ مول بر لیتر بوده و بر این اساس، غلظت مولی یون هیدروکسید برابر با 10^{-14} مول بر لیتر می‌شود. هر چند که غلظت یون هیدروکسید در این محلول خیلی خیلی کم است، اما باز هم یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در این محلول در کنار هم قرار گرفته‌اند. در یک نمونه از آب خالص نیز یون‌های هیدروکسید و هیدروژن با غلظت برابر، در کنار هم قرار دارند.

گزینه (۳): هیدروبرمیک اسید یک اسید قوی است. اگر اسید مورد نظر قوی‌تر از HBr بود، pH محلول ۳ مولار آن منفی می‌شد ($-\log 3 = -0.5$)، حالا که pH آن در گستره صفر تا ۷ قرار گرفته، نتیجه می‌گیریم که غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن کم‌تر از ۳ مولار بوده و یک اسید ضعیف بوده است.

گزینه (۴): چون آب گوجه‌فرنگی و یک نمونه از شیر ترش‌شده، خاصیت اسیدی داشته و pH آن‌ها کم‌تر از ۷ قرار گرفته، پس می‌توان گفت در مقداری از آب گوجه‌فرنگی، همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است.

شکل زیر دو محلول با مشخصات مختلف (شامل حجم و غلظت اولیه) را در دمای یکسان نشان می‌دهد. کدام گزینه درباره آن‌ها درست است؟



- (۱) pH محلول (I) از pH محلول (II) بیشتر است.
- (۲) رسانایی الکتریکی محلول (II) از محلول (I) کم‌تر است.
- (۳) شمار یون‌های آمونیوم در محلول (II) با شمار یون‌های سدیم در محلول (I) برابر است.
- (۴) ثابت یونش باز ضعیف به تقریب برابر $۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$ است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

محلول (I)، حاوی سدیم هیدروکسید (NaOH) به عنوان یک باز قوی و محلول (II)، حاوی آمونیاک (NH₄⁺) به عنوان یک باز ضعیف است.

ثابت یونش NH₄⁺ با توجه به اطلاعات داده‌شده برابر است با:

$$K_b(\text{NH}_4^+) = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\alpha < 0.05} K_b(\text{NH}_4^+) = M\alpha^2 = 0.5 \times (6 \times 10^{-3})^2 = 0.5 \times 36 \times 10^{-6} = 1/8 \times 10^{-5}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): ابتدا غلظت یون هیدروکسید [OH⁻] در دو محلول را محاسبه کرده، سپس با توجه به آن‌ها، pH دو محلول را مقایسه می‌کنیم:

(I) محلول: [OH⁻] = [NaOH] = $3 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

(II) محلول: [OH⁻] = $M \cdot \alpha \cdot n = 0.5 \times (6 \times 10^{-3}) \times 1 = 3 \times 10^{-3}$

با توجه به یکسان‌بودن [OH⁻] در دو محلول، می‌توان نتیجه گرفت که [H⁺] نیز در آن‌ها برابر بوده و pH دو محلول با هم برابر است.

گزینه (۲): رسانایی الکتریکی محلول‌ها، به مجموع غلظت یون‌ها در آن‌ها بستگی دارد. با توجه به تک‌ظرفیتی‌بودن هر دو باز، در هر دوی آن‌ها غلظت کاتیون (Na⁺ در محلول (I) و NH₄⁺ در محلول (II)) برابر با غلظت OH⁻ می‌باشد؛ بنابراین می‌توان گفت که غلظت کاتیون‌ها و در نتیجه، مجموع کل غلظت یون‌ها در دو محلول یکسان و رسانایی الکتریکی آن‌ها نیز با هم برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I) محلول: } [\text{Na}^+] = [\text{OH}^-] \\ \text{(II) محلول: } [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] \end{array} \right\} \xrightarrow{[\text{OH}^-]_{\text{(I)}} = [\text{OH}^-]_{\text{(II)}}} [\text{Na}^+]_{\text{(I)}} = [\text{NH}_4^+]_{\text{(II)}}$$

⇒ مجموع غلظت یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی دو محلول یکسان است.

گزینه (۳): غلظت یون‌های آمونیوم (NH₄⁺) در محلول (II)، برابر با غلظت یون‌های سدیم (Na⁺) در محلول (I) می‌باشد، اما هواسنون باشد که با توجه به این که حجم محلول (I)، دو برابر حجم محلول (II) است؛ در نتیجه شمار یون‌های Na⁺ در محلول (I) نیز دو برابر شمار یون‌های NH₄⁺ در محلول (II) می‌باشد.



درون ظرفی، ۲۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۲۵ مولار باریم هیدروکسید وجود دارد. اگر ۵۰ میلی لیتر از این محلول را برداشته و به ظرف دیگری منتقل کنیم، pH محلول باقی مانده در ظرف، کدام خواهد بود؟

۱۰/۳ (۲)

۱۰/۰ (۱)

۱۳/۷ (۴)

۱۳/۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با برداشتن ۵۰ میلی لیتر محلول باریم هیدروکسید (Ba(OH)_2) از محلول اولیه، غلظت مولی محلول تغییری نمی کند:

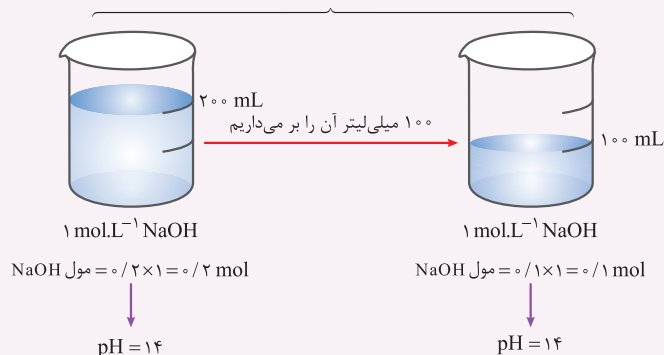
$$[\text{OH}^-] = 2[\text{Ba(OH)}_2] = 2 \times 0.25 = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\xrightarrow{[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}} [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{0.5}$$

$$= 2 \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 2 \times 10^{-14} = 14 - \log 2 = 13.7$$

غلظت یک محلول مشخص به مقدار محلول بستگی ندارد؛ در نتیجه pH آن نیز به مقدار محلول وابسته نیست.

در هر دو محلول، نسبت شمار مول حل شونده به حجم محلول یکسان است.



مثلاً اگر ۲۰۰ میلی لیتر محلول با غلظت ۱ مولار NaOH تهیه کنیم و سپس ۱۰۰ میلی لیتر از آن را برداریم، باز هم غلظت محلول، ۱ مولار خواهد بود؛ در نتیجه pH هر دوی آن ها برابر با ۱۴ می باشد.

کول نخوری ✗

کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) هر چه نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول یک باز بیشتر باشد، آن باز به یقین قوی تر است.

ب) در محلول شیشه پاک کن، کاتیونی چنداتیمی وجود دارد که در ساختار برخی از صابون های مایع نیز وجود دارد.

حاوی آمونیاک

پ) با افزودن یک باز به آب، غلظت یون هیدروکسید افزایش یافته و به دلیل کاهش غلظت یون هیدرونیوم، رسانایی الکتریکی محلول تغییر قابل توجهی نمی کند.

ت) از محلول آبی سدیم هیدروکسید، برای باز کردن لوله ها استفاده می شود.

(۲) الف - پ

(۱) الف - ب

(۴) پ - ت

(۳) ب - ت

پاسخ: گزینه ۳

عبارت های «ب» و «ت» درست اند.

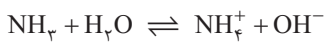
پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت ها:

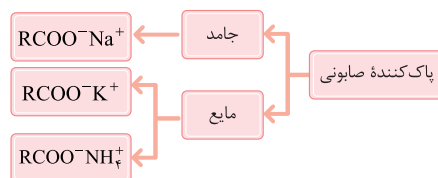
الف) بیشتر بودن $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در یک محلول، نشان دهنده خاصیت بازی بیشتر آن محلول است. برای مقایسه قدرت دو باز، به غلظت

اولیه محلول ها و یا ثابت یونش بازها نیز نیاز داریم.

ب) معادله یونش آمونیاک (که در شیشه پاک کن وجود دارد) در آب، به صورت زیر است:

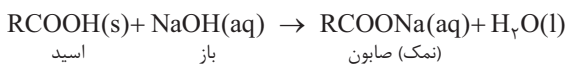


کاتیون چنداتیمی حاصل از یونش، NH_4^+ (یون آمونیوم) است. این یون در ساختار برخی صابون های مایع یافت می شود.



پ) اگرچه با افزودن باز به آب، غلظت یون های H^+ کاهش و غلظت یون های OH^- افزایش می یابد، اما با توجه به افزایش غلظت یون های موجود در محلول، رسانایی الکتریکی بیشتر می شود. همچنین با افزودن باز به آب، غلظت کاتیون ها نیز در محلول افزایش می یابد.

ت) سود سوزآور (NaOH) از جمله بازهای قوی است و جزء مواد خورنده به شمار می رود. برای باز کردن لوله هایی که با اسیدهای چرب مسدود شده اند، می توان محلول سدیم هیدروکسید را در لوله ریخت تا با اسید چرب واکنش دهد. فرآورده این واکنش یک نوع پاک کننده (صابون) است و علاوه بر این که در آب حل می شود، چربی ها را در آب پخش می کند.



اگر به دو لیتر محلول نیتریک اسید ۰/۰۵ مولار، در هر ۴۸ ثانیه، ۶۰۰ میلی لیتر آب خالص افزوده شود، پس از گذشت چند دقیقه pH محلول به ۲/۳ می رسد و غلظت مولار یون هیدروکسید در این محلول، چند برابر می شود؟

$$۱۰ - ۲۴ (۲)$$

$$۰/۱ - ۲۴ (۱)$$

$$۱۰ - ۸ (۴)$$

$$۰/۱ - ۸ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: حجم آب افزوده شده که pH محلول ۰/۰۵ مولار نیتریک اسید را به ۲/۳ می رساند را به دست می آوریم:
با رقیق کردن یک محلول (اضافه کردن آب به آن)، تعداد مول ماده حل شونده تغییر نمی کند؛ بنابراین به هنگام رقیق کردن محلول های غلیظ، می توان از رابطه روبه رو استفاده کرد:

$$M_{\text{رقیق}} V_{\text{رقیق}} = M_{\text{غلظ}} V_{\text{غلظ}}$$

با توجه به این که نیتریک اسید (HNO_3)، یک اسید قوی تک پروتون دار است؛ به طور کامل یونیده شده و در محلول آن، غلظت یون هیدرونیوم (H^+)، برابر با غلظت اولیه اسید است. غلظت نیتریک اسید در محلول نهایی (پس از رقیق شدن) برابر است با:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/3} = 10^{-0.67} \approx 0.21 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [\text{HNO}_3] = [\text{H}^+] = 0.21 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

از آن جا که محلول نهایی نیتریک اسید، حاصل افزودن آب به محلول غلیظ اولیه است؛ در نتیجه تعداد مول ماده حل شونده در این دو محلول برابر است و می توان گفت که:

$$M_{\text{رقیق}} V_{\text{رقیق}} = M_{\text{غلظ}} V_{\text{غلظ}} \Rightarrow 0.005 \times 2 = 0.005 \times V_{\text{رقیق}} \Rightarrow V_{\text{رقیق}} = 20 \text{ L}$$

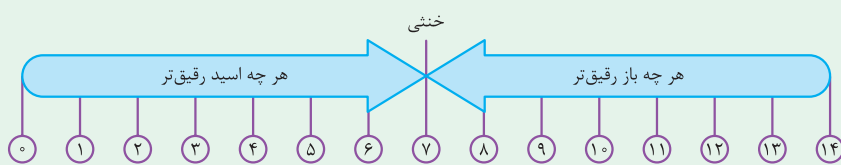
بنابراین حجم آب افزوده شده برابر است با:

$$V_{\text{رقیق}} = V_{\text{غلظ}} + V_{\text{آب}} \Rightarrow V_{\text{آب}} = 20 - 2 = 18 \text{ L}$$

هرگاه محلول یک اسید را با اضافه کردن آب رقیق کنیم، خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون H^+ در آن کاهش یافته و pH محلول افزایش می یابد. به همین ترتیب هر چه محلول یک باز را رقیق کنیم، خاصیت بازی محلول و غلظت یون OH^- در آن کاهش یافته و pH محلول کم تر می شود.

با توجه به این که pH، یک مقیاس لگاریتمی است، برای محلول اسیدها و بازهای قوی می توان نوشت: (V_1 حجم اولیه و V_2 حجم نهایی محلول است.)
 $\log \frac{V_2}{V_1} = \log (\text{چند مرتبه رقیق شدن}) = |\Delta \text{pH}|$: اسیدها و بازهای قوی

پس در این سری از مسائل به کمک رابطه بالا، میزان تغییر pH محلول اسیدها و بازهای قوی را به دست می آوریم و با توجه به مفهوم محلول اسیدی و بازی، کم یا زیاد شدن pH محلول را اعلام می کنیم.



گام دوم: محاسبه می کنیم که چند دقیقه طول می کشد تا ۱۸ L آب به محلول غلیظ اولیه افزوده شود:

$$18 \text{ L آب} \times \frac{1000 \text{ mL آب}}{1 \text{ L آب}} \times \frac{48 \text{ s}}{600 \text{ mL آب}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 24 \text{ min}$$

گام سوم: حساب می کنیم که در این فرایند، غلظت یون هیدروکسید (OH^-) چند برابر می شود:

اگر حجم محلول اسید قوی را n برابر کنیم، غلظت اسید و غلظت H^+ ، $\frac{1}{n}$ برابر و غلظت OH^- ، n برابر می شود و pH به اندازه n افزایش می یابد.

با توجه به نکته بالا می توان گفت که با افزایش pH نیتریک اسید به اندازه ۱ واحد، غلظت اسید و غلظت H^+ ، $\frac{1}{10}$ برابر و غلظت OH^- ، ۱۰ برابر خواهد شد.

نکته

نکته

pH محلول غلیظ اولیه HNO_3 برابر است با:

$$[\text{H}^+] = [\text{HNO}_3] = 0.05 \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 0.05 = 2 - \log 5 = 1.3$$

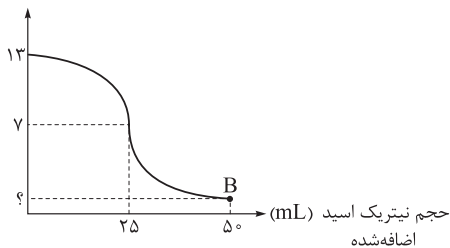
بنابراین با افزودن آب و رقیق کردن محلول نیتریک اسید، pH محلول یک واحد افزایش یافته و با توجه به این که HNO_3 یک اسید قوی است، می توان گفت که:

$$|\Delta \text{pH}| = \log (\text{چند مرتبه رقیق شدن}) \Rightarrow \log \frac{V_2}{V_1} = 1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 10 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 10 \Rightarrow V_2 = 20 \text{ L}$$

حجم آب افزوده شده برابر است با:

$$V_{\text{آب}} = V_2 - V_1 = \Delta V = 18 \text{ L}$$

با توجه به نمودار زیر که تغییرات pH را برای ۵۰ میلی لیتر محلول پتاس بر اثر افزودن تدریجی محلول نیتریک اسید نشان می‌دهد، در نقطه B چه قدر است؟



۰ / ۸ (۲)

۳ / ۸ (۱)

۱ / ۳ (۴)

۴ / ۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا با توجه به pH محلول پتاس (KOH) در حالت اول، غلظت باز در این محلول را محاسبه کن، سپس با توجه به این که محلول پتاس با افزودن ۲۵ mL محلول نیتریک اسید (HNO_3) به طور کامل خنثی شده، غلظت محلول HNO_3 را به دست بیاور. در نهایت با توجه به این که ۲۵ mL محلول HNO_3 دیگر پس از خنثی شدن به محلول اضافه شده، شمار مول‌های H^+ ، کل حجم محلول و در نتیجه $[\text{H}^+]$ را در نقطه B حساب کن. حالا خیلی راحت می‌تونی pH محلول رو تو این نقطه بمسابی!

گام اول: با توجه به pH اولیه محلول پتاس (KOH)، غلظت KOH در محلول اولیه آن را حساب می‌کنیم:

$$\text{KOH اولیه: } [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-13} \xrightarrow{[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}} [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-13}} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{KOH}] = [\text{OH}^-] = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: غلظت مولار محلول نیتریک اسید (HNO_3) را به دست می‌آوریم:

محلول ۰/۱ مولار KOH، بر اثر افزودن ۲۵ میلی لیتر محلول HNO_3 ، به طور کامل خنثی شده و به $\text{pH} = 7$ رسیده است؛ بنابراین داریم:

$$n_a M_a V_a = n_b M_b V_b \Rightarrow 1 \times M_a \times 25 = 1 \times 0.1 \times 50 \Rightarrow M_a = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: غلظت یون H^+ را پس از افزودن ۲۵ میلی لیتر محلول HNO_3 دیگر پس از خنثی شدن (نقطه B) حساب می‌کنیم:

$$\text{mol}_{\text{H}^+} = \text{mol}_{\text{HNO}_3} = M_a V_a = 0.2 \times 25 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{\text{mol}_{\text{H}^+}}{V_{\text{کل}}} = \frac{5 \times 10^{-3}}{(50 + 50) \times 10^{-3}} = \frac{5}{100} = 5 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام چهارم: pH محلول حاصل در نقطه B را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 5 \times 10^{-2} = 2 - \log 5 = 2 - 0.7 = 1.3$$

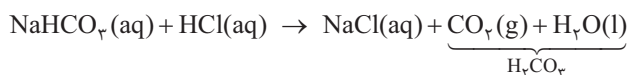
پاسخ خیلی تشریحی ✓

- (۱) الکترولیت‌ها، موادی محلول در آب و غیرالکترولیت‌ها، موادی نامحلول در آب هستند.
- (۲) فراوردهٔ یونی واکنش جوش شیرین با محلول هیدروکلریک اسید، نمک خوراکی است.
- (۳) دستگاه گوارش انسان، یک سامانهٔ اسیدی به شمار می‌آید.
- (۴) مطابق مدل آرنیوس، اسیدها جزء ترکیب‌های مولکولی و بازها، جزء ترکیب‌های یونی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مادهٔ NaHCO_3 ، سدیم هیدروژن کربنات یا همون جوش شیرین است. واکنش این ماده با اسید معده این‌طور است:



همان‌طور که می‌بینید یک مول جوش شیرین، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند. هم‌چنین در این واکنش، ترکیب یونی NaCl (همون نمک فوراکی!) تولید می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): الکترولیت یا غیرالکترولیت بودن یک ماده، ربطی به میزان انحلال آن در آب ندارد، مثلاً متانول به هر نسبتی در آب حل می‌شود، ولی چون یون تولید نمی‌کند، غیرالکترولیت است. نوع انحلال (یونی یا مولکولی) مهم است. هم‌چنین ترکیب‌های یونی نامحلول در آب مانند AgCl و BaSO_4 ، اگرچه به مقدار بسیار کمی در آب حل می‌شوند (کم‌تر از 10^{-4} گرم در 100 گرم آب)، اما همان مقدار ناچیز حل شده هم تقریباً به طول کامل به یون تفکیک می‌شود؛ بنابراین الکترولیت قوی به شمار می‌آیند. گزینهٔ (۳): دستگاه گوارش، سامانه‌ای با pH های مختلف است که این pH ها در قسمت‌های مختلف، متفاوت‌اند:

محیط معده	آب بزاق دهان	رودهٔ کوچک	
۱/۸ تا ۱/۶	۷/۱ تا ۵/۲	۸/۵	مقدار pH
اسیدی	اسیدی ضعیف (نزدیک به خنثی و اندکی بازی)	بازی	سامانهٔ اسیدی یا بازی

با توجه به جدول بالا مشخص است که همهٔ قسمت‌های مختلف دستگاه گوارش، لزوماً اسیدی نیستند!

گزینهٔ (۴): نه والا! به عنوان مثال آمونیاک (NH_3) که با انحلال در آب، غلظت یون OH^- را افزایش داده و در واقع باز آرنیوس می‌باشد، یک ترکیب مولکولی است؛ نه یونی!

در یک نمونه قرص ضداسید به جرم ۴ گرم، درصد جرمی آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید به ترتیب برابر با ۷/۸ و ۱۷/۴ درصد است. چه تعداد از این قرص برای خنثی کردن ۲/۷ لیتر شیره معده با $\text{pH} = 1/4$ لازم است؟ (سایر اجزای قرص با اسید معده واکنش نمی دهند؛ $\text{H} = 1, \text{O} = 16, \text{Mg} = 24, \text{Al} = 27; \text{g.mol}^{-1}$)

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

مشاوره مسائل خنثی شدن اسید و باز، همیشه و همیشه! پای ثابت همه امتحانات نهایی و همه کنکورهای سراسری است. مراحل حل این سؤال را گام به گام دنبال کنید تا این مبحث، پراتون فوب یا بیفته!

پاسخ: گزینه ۲

Hint

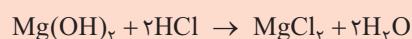
ابتدا جرم Mg(OH)_2 و Al(OH)_3 موجود در هر قرص ضداسید را حساب کن، سپس با نوشتن معادله واکنش این مواد با HCl ، تعداد مول HCl خنثی شده توسط هر کدام را حساب و با هم جمع کن. در نهایت با محاسبه تعداد مول HCl موجود در ۲/۷ لیتر شیره معده با $\text{pH} = 1/4$ ، تعداد قرص ضداسید مورد نیاز برای خنثی کردن کامل شیره معده را به دست بیاور.

گام اول: جرم منیزیم هیدروکسید (Mg(OH)_2) و آلومینیم هیدروکسید (Al(OH)_3) موجود در هر قرص ضداسید را با توجه به درصد جرمی آن‌ها، محاسبه می کنیم:

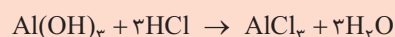
$$\text{جرم } \text{Mg(OH)}_2 \text{ در قرص} = \frac{17/4 \text{ g Mg(OH)}_2}{100 \text{ g قرص}} \times 4 \text{ g قرص} = 69/6 \times 10^{-2} \text{ g Mg(OH)}_2$$

$$\text{جرم } \text{Al(OH)}_3 \text{ در قرص} = \frac{7/8 \text{ g Al(OH)}_3}{100 \text{ g قرص}} \times 4 \text{ g قرص} = 31/2 \times 10^{-2} \text{ g Al(OH)}_3$$

گام دوم: با نوشتن معادله واکنش Al(OH)_3 و Mg(OH)_2 با شیره معده (HCl)، تعداد مول HCl خنثی شده توسط هر یک از مواد موجود در هر قرص ضداسید را حساب می کنیم:



$$69/6 \times 10^{-2} \text{ g Mg(OH)}_2 \times \frac{1 \text{ mol Mg(OH)}_2}{58 \text{ g Mg(OH)}_2} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Mg(OH)}_2} = 24 \times 10^{-3} \text{ mol HCl}$$



$$31/2 \times 10^{-2} \text{ g Al(OH)}_3 \times \frac{1 \text{ mol Mg(OH)}_2}{78 \text{ g Al(OH)}_3} \times \frac{3 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Al(OH)}_3} = 12 \times 10^{-3} \text{ mol HCl}$$

بنابراین هر قرص ضداسید مورد نظر در مجموع $36 \times 10^{-3} = (24 + 12) \times 10^{-3}$ مول اسید معده را می تواند خنثی کند.

گام سوم: شمار مول های HCl موجود در ۲/۷ لیتر شیره معده با $\text{pH} = 1/4$ را حساب می کنیم:

$$[\text{HCl}] = [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1/4} = 10^{-2} \times 10^{3/4} = 4 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

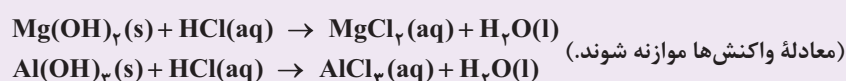
$$\Rightarrow \text{HCl مول} = 4 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 2/7 \text{ L} = 10/8 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

گام چهارم: تعداد قرص های ضداسید مورد نیاز برای خنثی کردن شیره معده را به دست می آوریم:

$$10/8 \times 10^{-2} \text{ mol HCl} \times \frac{1 \text{ قرص}}{36 \times 10^{-3} \text{ mol HCl}} = 3 \text{ قرص}$$

۵۰ میلی لیتر از یک شربت ضداسید، دارای ۱/۱۶ میلی گرم منیزیم هیدروکسید و ۳/۹۰ میلی گرم آلومینیم هیدروکسید است. این ضداسید، چند میلی لیتر شیره معده با $\text{pH} = 1/7$ را خنثی می کند؟ (سؤال ۲۳۷ کنکور تهری ۱۴۰۱)

($\text{Al} = 27, \text{Mg} = 24, \text{O} = 16, \text{H} = 1; \text{g.mol}^{-1}$)



$$9/5 (2)$$

$$7 (1)$$

$$17/5 (4)$$

$$14 (3)$$

- (۱) منظور از ترکیب‌های یونی دوتایی، ترکیب‌هایی به فرم AB است که A ، فلز و B ، نافلز است.
- (۲) مجموع بار الکتریکی کاتیون‌ها و آنیون‌های سازنده هر ترکیب یونی برابر صفر است و همه ترکیبات یونی خنثی هستند.
- (۳) به فرمول شیمیایی ترکیب‌های یونی که افزون بر نوع عنصرهای سازنده، شمار اتم‌های هر عنصر را نشان می‌دهد، فرمول مولکولی می‌گویند.
- (۴) جاذبه یونی، جاذبه‌ای بسیار قوی است که میان اتم‌های فلزی و نافلزی در ساختار مواد یونی برقرار می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

هر ترکیب یونی از لحاظ بار الکتریکی خنثی است؛ یعنی در یک ترکیب یونی، مجموع بار الکتریکی کاتیون‌ها با مجموع بار الکتریکی آنیون‌ها برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

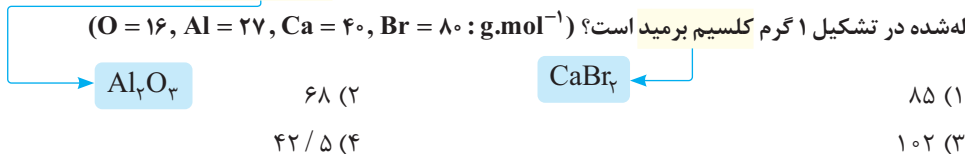
گزینه (۱): به ترکیب‌های یونی که فقط از دو عنصر (دو نوع اتم) ساخته شده‌اند، ترکیب یونی دوتایی می‌گویند. مثلاً $NaCl$ و Al_2O_3 جزء ترکیب‌های یونی دوتایی به حساب می‌آیند.

اما دقت کنید که تعداد یون‌های سازنده یک ترکیب یونی دوتایی می‌تواند بیشتر از ۲ تا باشد! نمونه‌اش همین Al_2O_3 که یک ترکیب یونی دوتایی است، ولی هر واحد فرمولی آن از ۵ یون تشکیل شده است (۲ تا یون Al^{3+} و ۳ تا یون O^{2-})!

گزینه (۳): نه والا! فقط در مواد مولکولی، مولکول‌های مجزا وجود دارد و به کار بردن واژه‌هایی مانند فرمول مولکولی و نیروهای بین مولکولی فقط برای این مواد می‌آید! در نتیجه استفاده از واژه فرمول مولکولی برای ترکیب‌های یونی از بیخ غلطه!

گزینه (۴): میان یون‌های مثبت و منفی (نه اتم‌های فلزی و نافلزی!) در ساختار ترکیب‌های یونی، به دلیل وجود بارهای الکتریکی ناهمنام، نیروی جاذبه بسیار قوی برقرار می‌شود که به آن پیوند یونی و به ترکیب حاصل، ترکیب یونی گفته می‌شود.

شمار الکترون‌های مبادله‌شده میان عنصرهای سازنده در تشکیل چند میلی گرم آلومینیم اکسید نصف شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل ۱ گرم کلسیم برمید است؟ ($O = ۱۶, Al = ۲۷, Ca = ۴۰, Br = ۸۰ : g.mol^{-1}$)



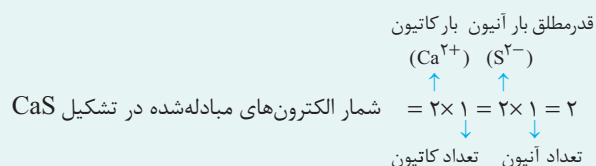
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

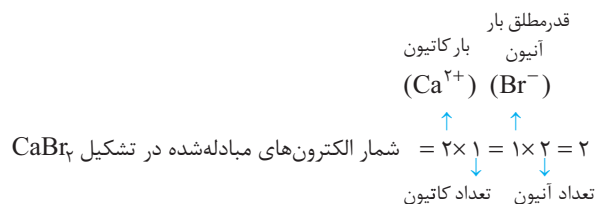
برای تشکیل ترکیب‌های یونی دوتایی، بین فلز و نافلز الکترون مبادله می‌شود. برای محاسبه شمار الکترون‌های مبادله‌شده در یک ترکیب یونی، می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

تعداد (زیروند) آنیون $\times$ قدرمطلق بار آنیون = تعداد (زیروند) کاتیون $\times$ بار کاتیون = شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل هر واحد فرمولی از ترکیب‌های یونی

مثال برای تشکیل هر واحد فرمولی از CaS ، ۲ الکترون بین عنصرهای سازنده‌اش، مبادله می‌شود یا می‌توان گفت در تشکیل ۱ مول CaS از عنصرهای سازنده‌اش، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود:



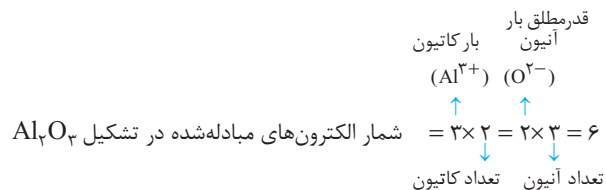
گام اول: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل ۱ گرم کلسیم برمید ($CaBr_2$) را محاسبه می‌کنیم؛ برای تشکیل هر واحد فرمولی از $CaBr_2$ ، ۲ الکترون مبادله می‌شود یا می‌توان گفت در تشکیل ۱ مول $CaBr_2$ از عنصرهای سازنده‌اش، ۲ مول الکترون بین آن‌ها مبادله می‌شود.



بنابراین داریم:

$$1 \text{ g } CaBr_2 \times \frac{1 \text{ mol } CaBr_2}{200 \text{ g } CaBr_2} \times \frac{2 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol } CaBr_2} = 0.01 \text{ mol } e^-$$

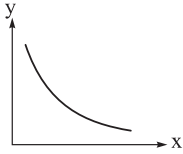
گام دوم: محاسبه می‌کنیم که در تشکیل چند گرم آلومینیم اکسید (Al_2O_3)، $0.01 \text{ mol } e^- = 5 \times 10^{-3} \text{ mol } e^-$ / ۵ $\times 10^{-3}$ مول الکترون مبادله می‌شود: برای تشکیل هر واحد فرمولی از Al_2O_3 ، ۶ الکترون مبادله می‌شود یا می‌توان گفت در تشکیل ۱ مول Al_2O_3 از عنصرهای سازنده‌اش، ۶ مول الکترون بین آن‌ها مبادله می‌شود.



$$5 \times 10^{-3} \text{ mole}^- = x \text{ g } Al_2O_3 \times \frac{1 \text{ mol } Al_2O_3}{102 \text{ g } Al_2O_3} \times \frac{6 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol } Al_2O_3} \Rightarrow x = \frac{5 \times 10^{-3} \times 102 \times 6}{6} = 0.51 \text{ g } Al_2O_3$$

کدام مورد عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«در نمودار مقابل، x و y به ترتیب می‌تواند و باشد.»



(۱) میزان CO_2 در هواکره - میانگین جهانی دمای کره زمین

(۲) ارتفاع هواکره - فشار اکسیژن

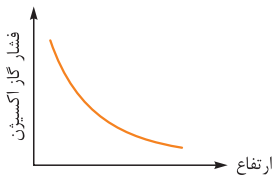
(۳) میزان CO_2 در هواکره - میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد

(۴) ارتفاع هواکره - دمای هوا در لایه استراتوسفر

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

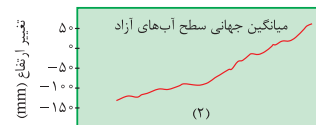
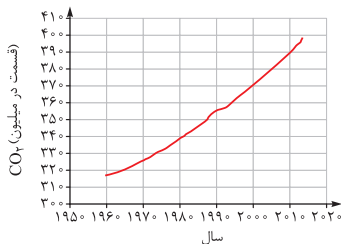
هر چه از سطح زمین بالاتر می‌رویم، هواکره رقیق‌تر شده و تعداد کل ذرات موجود در هر لیتر از هوا کاهش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ارتفاع، غلظت و فشار همه گازهای موجود در هواکره از جمله اکسیژن کم می‌شود؛ بنابراین نمودار فشار گاز اکسیژن نسبت به ارتفاع از سطح زمین، به صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۳): افزایش مقدار CO_2 در هواکره، باعث افزایش دمای کره زمین شده است، همچنین به دنبال افزایش دمای زمین، یخ‌های قطبی ذوب شده و سطح آب اقیانوس‌ها و دریاها بالا آمده است.

میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد $\uparrow$ و میانگین جهانی دمای سطح زمین $\uparrow \Rightarrow$ مقدار CO_2 در هواکره $\uparrow$ بنابراین نمودار میانگین جهانی دمای سطح زمین و میانگین جهانی سطح آب‌های آزاد، برحسب مقدار CO_2 در هواکره، به صورت صعودی می‌باشد؛ نه نزولی!



گزینه (۴): در استراتوسفر (لایه دوم هواکره)، با افزایش ارتفاع، دمای هوا افزایش می‌یابد؛ بنابراین نمودار دمای هوا در لایه استراتوسفر برحسب ارتفاع، باید به صورت صعودی باشد.

روند تغییر دما در هواکره را می‌توان دلیلی بر لایه‌ای بودن آن دانست. به طور کلی در لایه‌های اول و سوم، با افزایش ارتفاع، دما کاهش می‌یابد، اما در لایه دوم، با افزایش ارتفاع، دما افزایش می‌یابد.

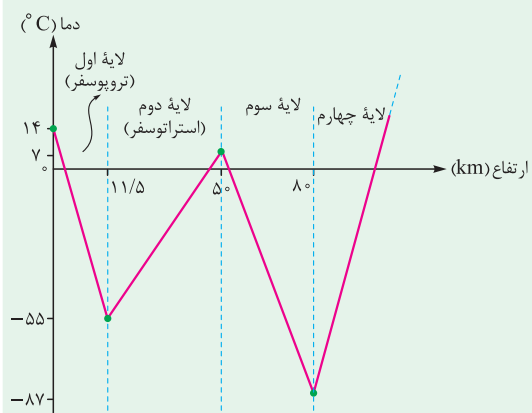
لایه اول: از حدود $14^{\circ}C$ (دمای سطح زمین) به $-55^{\circ}C$

۵۰۰ km	$> 400^{\circ}C$	لایه چهارم (افزایش دما)
۸۰ km	$-87^{\circ}C$	لایه سوم (کاهش دما)
۵۰ km	$+7^{\circ}C$	لایه دوم (افزایش دما)
۱۱/۵ km	$-55^{\circ}C$	لایه اول (افزایش دما)
ارتفاع	۱۴ °C	زمین دما



لایه دوم: از 7°C به -55°C

لایه سوم: از 7°C به -87°C



کدام مورد در ارتباط با گازهای تشکیل دهنده هواکره، نادرست است؟

(۱) گازی که برای پرکردن تایر خودرو استفاده می شود، در نگهداری نمونه های بیولوژیکی نیز کاربرد دارد.

نیتروژن

(۲) فراوان ترین گاز نجیب هواکره، در جوشکاری، برش فلزها و همچنین در ساخت لامپ های رشته ای به کار می رود.

آرگون

(۳) حدود ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را گازی تشکیل می دهد که همراه با سایر فراورده های سوختن گاز طبیعی، به صورت ترکیب اکسیژن دار، وارد هواکره می شود.

هلیوم

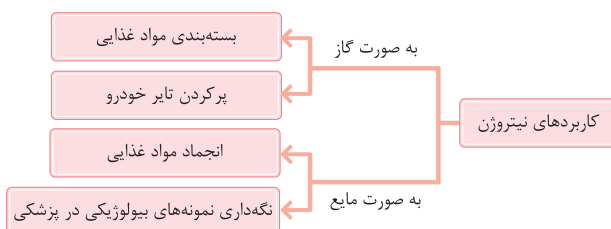
(۴) در لایه های بالایی هواکره، می توان گونه ای یافت که فقط یک ذره زیراتمی داشته باشد.

H^+

پاسخ: گزینه ۳

حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را هلیوم تشکیل می دهد. دقت کنید که هلیوم موجود در گاز طبیعی به همراه سایر فراورده های سوختن گاز طبیعی (H_2O ، CO_2 و ...) بدون مصرف، وارد هواکره می شود؛ یعنی هلیوم نمی سوزد و در واکنشی شرکت نمی کند! بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱):



گزینه (۲): در هوای پاک و خشک، آرگون فراوان ترین گاز نجیب هواکره (از لحاظ درصد حجمی) است و در میان همه گازها، پس از نیتروژن و اکسیژن، رتبه سوم را از آن خود کرده است! آرگون به عنوان محیط بی اثر در جوشکاری، برش فلزها و همچنین در ساخت لامپ های رشته ای به کار می رود.

گزینه (۴):

در لایه چهارم هواکره علاوه بر گازهای O_2 ، N_2 و ... ما با اتم اکسیژن (O) و یه سری یون های مثبت مانند He^+ ، O^+ ، O_2^+ ، N_2^+ و H^+ نیز سروکار داریم.

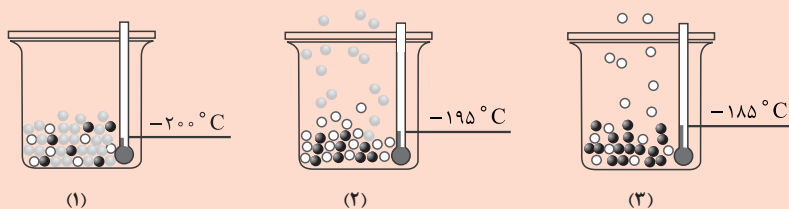
حالا چرا؟

پرتوهای پرن انرژی خورشید، مولکول ها و اتم های موجود در این لایه را بمباران کرده! و باعث تبدیل این ذره ها به یون های مثبت (و البته الکترون ها) می شوند. به همین دلیل در این لایه، یون های مثبت حاصل از آن ها یعنی O_2^+ ، N_2^+ ، O^+ ، He^+ و H^+ نیز به مقدار کم تر وجود دارد. *هواستون باشه! آله بگن یون های منفی یا آنیون ها در این لایه وجود دارن، غلطه ها!*

در لایه چهارم هواکره، می توان یون H^+ را یافت که تنها دارای یک پروتون و فاقد الکترون و نوترون است.



شکل‌های زیر تقطیر جزء به جزء نیتروژن، اکسیژن و آرگون را نشان می‌دهند. کدام مورد، نادرست است؟



(۱) مایع بودن هر سه ماده در حالت (۱)، نشان می‌دهد که نقطه جوش آن‌ها بالاتر از ۷۳ K است.

(۲) گاز جدا شده در حالت (۲)، در همه لایه‌های هواکره وجود دارد.

(۳) مایع باقی‌مانده در حالت (۲)، حاوی دو ماده با نقطه جوش نزدیک به هم است که در پتروشیمی شیراز یکی از آن‌ها را با خلوص بالا تهیه می‌کنند.

(۴) گاز جدا شده در حالت (۳)، گازی بی‌رنگ، بی‌بو و سمی است.

پاسخ: گزینه ۴

مراحل جداسازی اجزای هوا به روش تقطیر جزء به جزء این‌طور است:

(۱) اول از همه! هوا را از صافی‌هایی عبور می‌دهند تا گردوغبار آن گرفته شود.

(۲) با استفاده از فشار، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند. ابتدا با کاهش دما تا 0°C ، رطوبت (H_2O) هوا به صورت یخ جدا می‌شود، سپس در دمای -78°C ، گاز کربن دی‌اکسید به حالت جامد درآمده و از مخلوط گازی جدا می‌گردد.

(۳) مخلوط را تا دمای -200°C سرد می‌کنند. به این ترتیب، مخلوط بسیار سردی از چند مایع پدید می‌آید که به آن هوای مایع می‌گویند.

توجه هنگام مایع کردن چند گاز با کاهش دما، ابتدا گازی مایع می‌شود که نقطه جوش بالاتری دارد.

(۴) با عبور هوای مایع از یک ستون تقطیر و افزایش دما، هر یک از مایعات موجود در این مخلوط، در نقطه جوش خود تبخیر شده و می‌توان بخارهای آن‌ها را به طور جداگانه جمع‌آوری کرد.

توجه هر چه نقطه جوش ماده‌ای پایین‌تر باشد، زودتر به جوش آمده و زودتر از این مخلوط مایع جدا می‌شود.

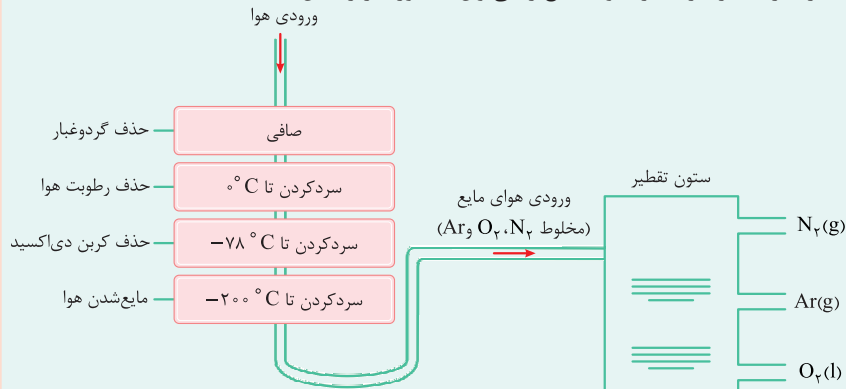
ترتیب نقطه جوش چهار گاز مهم هواکره که شما باید به‌یاد بگیرید به صورت زیر است:

مقایسه نقطه جوش: $\text{He} < \text{N}_2 < \text{Ar} < \text{O}_2$
 $-269^\circ\text{C} \quad -196^\circ\text{C} \quad -186^\circ\text{C} \quad -183^\circ\text{C}$

اگر نمونه‌ای از هوای مایع با دمای -200°C را وارد برج تقطیر کنیم، ترتیب جدا شدن گازها این‌طور است:

ترتیب جدا شدن گازها: $\text{N}_2 \rightarrow \text{Ar} \rightarrow \text{O}_2$
 (۱) (۲) (۳)

جمع‌بندی: مراحل تهیه گازها از تقطیر جزء به جزء هوای مایع را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



نکته Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به شکل‌های داده‌شده، می‌توان گفت:



در حالت (۳)، دما (-185°C) بالاتر از نقطه جوش آرگون (Ar) بوده و این گاز در حال تبخیر و جداسازی است. این گاز، بی‌رنگ، بی‌بو و غیرسمی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): در حالت (۱)، یعنی دمای -200°C هر سه گاز در حالت مایع‌اند (ماده‌ای در حال تبخیر شدن نیست)؛ یعنی نقطه جوش هر سه گاز بالاتر از -200°C یا $73\text{ K} = -200^{\circ}\text{C} + 273 = 73\text{ K}$ می‌باشد.

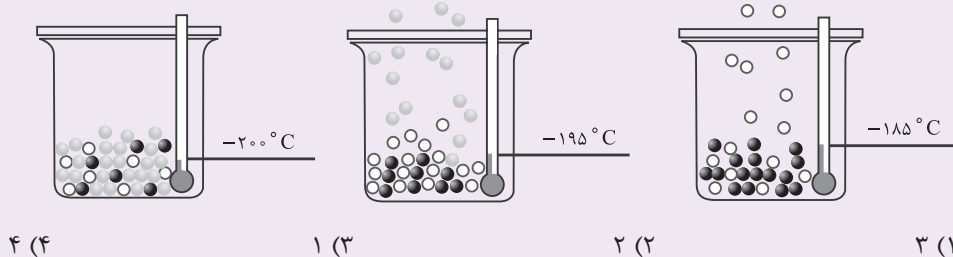
گزینه (۲): در حالت (۲)، دما (-195°C) بالاتر از نقطه جوش نیتروژن (N_2) بوده و این گاز در حال تبخیر و جداسازی است. این گاز در همه لایه‌های هواکره یافت می‌شود.

گزینه (۳): در حالت (۳)، مایع باقی‌مانده حاوی آرگون (Ar) و اکسیژن (O_2) است. نقطه جوش اکسیژن (-183°C) به نقطه جوش آرگون (-186°C) بسیار نزدیک است. در حاشیه صفحه ۵۲ کتاب درسی می‌خوانیم که در پتروشیمی شیراز، آرگون از تقطیر جزء به جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می‌شود.

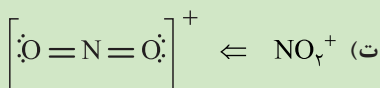
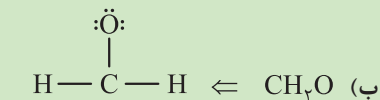
با توجه به شکل، چند مورد از موارد زیر، درست است؟ (در حالت (۱)، اکسیژن، نیتروژن و آرگون درون ظرف جای دارند).

(سؤال ۱۰۸ کنکور تهرانی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

- گلوله‌های سیاه‌رنگ، نماینده اکسیژن‌اند.
- مواد درون ظرف در حالت (۱)، حالت فیزیکی مایع دارند.
- گلوله‌های سفیدرنگ نماینده نیتروژن‌اند.
- مواد درون ظرف در حالت (۲)، دو حالت فیزیکی متفاوت دارند.

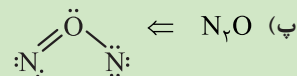
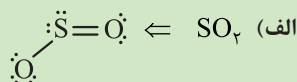


ساختار لوویس چند گونه به درستی رسم نشده است؟



۳ (۴)

۱ (۳)



۲ (۲)

۴ (۱)

مشاوره رسم ساختار لوویس مولکول‌ها، از مهم‌ترین مطالبی است که باید در آن به تسلط بالایی برسید، چرا که بارها و بارها مورد توجه طراحان کنکور قرار گرفته و سرعت عمل شما در این سؤال‌ها مهم است؛ زیرا می‌توانید با حل آن‌ها زمان ذخیره کنید.

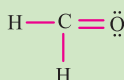
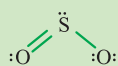
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

همه ساختارهای داده‌شده، به جز مورد «ت»، نادرست‌اند.

بررسی ساختارهای نادرست:

الف) اتم گوگرد، ۱۰ تایی شده است. ساختار درست این هیدروکسید،



ب) اتم کربن، ۸ تایی نشده است. ساختار لوویس مولکول CH_2O به صورت مقابل است:

پ) در مولکول N_2O ، اتم مرکزی، نیتروژن است و نه اکسیژن. در ضمن در ساختار لوویس مولکول‌ها، مجموع الکترون‌های به کاررفته در ساختار لوویس، باید برابر با مجموع شمار الکترون‌های ظرفیت اتم‌های سازنده باشد. حال اگر تعداد کل الکترون‌های لایه ظرفیت اتم‌های سازنده را در مولکول N_2O محاسبه کنیم، داریم:

$$16 = 2(5) + 6$$

در حالی که در ساختار لوویس داده‌شده، در مجموع ۱۸ الکترون وجود دارد. ساختار لوویس مولکول N_2O به صورت زیر است:



(شیمی (۱) - با هم بیندیشیم - صفحه ۵۸ کتاب درسی)

ساختار لوویس هر یک از مولکول‌های زیر را رسم کنید.

الف) SO_2

ب) CO

پ) PCl_3

ت) HCN

ث) CH_2O

ج) CS_2

کتاب
درسی

در مخلوطی به جرم ۲۰ گرم شامل اکسید منیزیم و یکی از اکسیدهای آهن، درصد جرمی یون‌های منیزیم و آهن به ترتیب برابر ۳۰ و ۳۵ می‌باشد. کدام یون آهن در این اکسید وجود دارد و جرم اکسید آهن در مخلوط چند گرم است؟
($\text{Fe} = ۵۶, \text{Mg} = ۲۴, \text{O} = ۱۶ : \text{g.mol}^{-1}$)



پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا با توجه به درصد جرمی یون‌های Mg^{2+} و Fe^{n+} در مخلوط، جرم آن‌ها را محاسبه کن. پس با توجه به جرم Mg^{2+} به دست آمده، جرم MgO موجود در مخلوط را به دست آورده و با کم کردن آن از کل جرم مخلوط؛ جرم اکسید آهن در آن را حساب کن. در نهایت با استفاده از جرم اکسید آهن و جرم یون Fe^{n+} موجود در آن، این یون را شناسایی کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: جرم یون‌های Mg^{2+} و Fe^{n+} در مخلوط را با توجه به درصد جرمی آن‌ها محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مخلوط } ۲۰ \text{ g} \begin{cases} \text{Mg}^{2+}: \text{درصد جرمی: } ۳۰\% \Rightarrow ۲۰ \text{ g مخلوط} \times \frac{۳۰ \text{ g Mg}^{2+}}{۱۰۰ \text{ g مخلوط}} = ۶ \text{ g Mg}^{2+} \\ \text{Fe}^{n+}: \text{درصد جرمی: } ۳۵\% \Rightarrow ۲۰ \text{ g مخلوط} \times \frac{۳۵ \text{ g Fe}^{n+}}{۱۰۰ \text{ g مخلوط}} = ۷ \text{ g Fe}^{n+} \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به جرم Mg^{2+} در مخلوط، جرم MgO موجود در آن را می‌محاسبیم:

$$۶ \text{ g Mg}^{2+} \times \frac{۱ \text{ mol Mg}^{2+}}{۲۴ \text{ g Mg}^{2+}} \times \frac{۱ \text{ mol MgO}}{۱ \text{ mol Mg}^{2+}} \times \frac{۴۰ \text{ g MgO}}{۱ \text{ mol MgO}} = ۱۰ \text{ g MgO}$$

گام سوم: از آن‌جا که مجموع جرم منیزیم اکسید و اکسید آهن موجود در مخلوط برابر با ۲۰ گرم است، داریم:

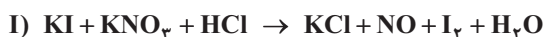
$$۱۰ \text{ g} = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰ \text{ g} \Rightarrow \text{جرم اکسید آهن در مخلوط} = ۱۰ \text{ g} = \text{جرم منیزیم اکسید در مخلوط} + \text{جرم اکسید آهن در مخلوط}$$

گام چهارم: حال با توجه به این‌که اکسید آهن موجود در مخلوط، ۱۰ گرم جرم داشته و حاوی ۷ گرم یون Fe^{n+} است، نوع یون آهن موجود در آن را شناسایی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{Fe}^{2+} \rightarrow \text{اکسید (II) آهن: FeO} \Rightarrow ۱۰ \text{ g FeO} \times \frac{۱ \text{ mol FeO}}{۷۲ \text{ g FeO}} \times \frac{۱ \text{ mol Fe}^{2+}}{۱ \text{ mol FeO}} \times \frac{۵۶ \text{ g Fe}^{2+}}{۱ \text{ mol Fe}^{2+}} \approx ۷.۷۷ \text{ g Fe}^{2+} \\ \text{Fe}^{3+} \rightarrow \text{اکسید (III) آهن: Fe}_2\text{O}_3 \Rightarrow ۱۰ \text{ g Fe}_2\text{O}_3 \times \frac{۱ \text{ mol Fe}_2\text{O}_3}{۱۶۰ \text{ g Fe}_2\text{O}_3} \times \frac{۲ \text{ mol Fe}^{3+}}{۱ \text{ mol Fe}_2\text{O}_3} \times \frac{۵۶ \text{ g Fe}^{3+}}{۱ \text{ mol Fe}^{3+}} = ۷ \text{ g Fe}^{3+} \end{cases}$$

در نتیجه این مخلوط حاوی یون Fe^{3+} می‌باشد.

ضرایب استوکیومتری H_2O و HCl در واکنش (I) پس از موازنه، به ترتیب چند برابر ضرایب این ترکیبها در واکنش (II) پس از موازنه است؟



(۲) $2 - 1/5$

(۴) $1/5 - 1/5$

(۱) $1/5 - 2$

(۳) $2 - 2$

مشاوره موازنه کردن معادله واکنشهای شیمیایی، علاوه بر این که گام اول در حل همه مسائل استوکیومتری است، فیللی وقتاً سؤال مختص خودش را در کنکور سراسری دارد؛ پس حتماً سعی کنید تسلط و سرعت عملتان را در موازنه کردن واکنشها تا حد امکان بالا ببرید.

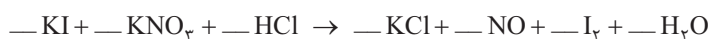
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی

معادله واکنشهای داده شده را گام به گام به روش وارسی موازنه می کنیم:

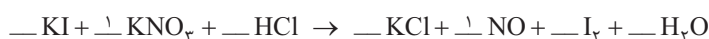
ابتدا واکنش (I):

گام اول: نوشتن معادله موازنه نشده واکنش و گذاشتن خط تیره پشت هر ماده!

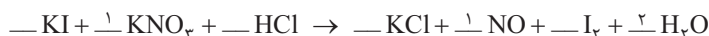


گام دوم: شناسایی عنصر شروع کننده موازنه: پیچیده ترین ترکیب در این واکنش، KNO_3 است. عنصرهای K و O نمی توانند شروع کننده باشند، زیرا K در سمت چپ و O در سمت راست، در ساختار دو ماده وجود دارد؛ پس N را به عنوان عنصر آغازگر انتخاب می کنیم.

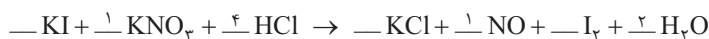
گام سوم: موازنه کردن عنصر شروع کننده موازنه در دو سمت معادله: برای موازنه اتم نیتروژن، به KNO_3 و NO ضریب ۱ می دهیم:



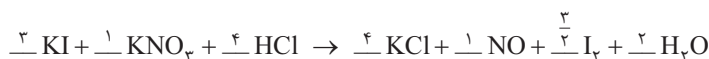
گام چهارم: موازنه کردن بقیه عنصرها: موازنه را با اتم اکسیژن که فقط ضریب یک ماده دارای آن مجهول است، ادامه می دهیم. ضریب H_2O را برابر ۲ در نظر می گیریم تا تعداد اتم اکسیژن در دو سمت معادله برابر ۳ شود:



موازنه را فقط با اتم هیدروژن می توانیم ادامه دهیم. با توجه به این که در سمت راست واکنش، ۴ اتم هیدروژن داریم، ضریب HCl را برابر ۴ قرار می دهیم:



حالا موازنه را به ترتیب با عنصرهای Cl، K و I ادامه می دهیم!



اگر برای از بین بردن ضریب کسری، همه اعداد را در ۲ ضرب کنیم، به موازنه شیک و مجلسی زیر می رسیم:



و حالا نوبت می رسد به واکنش (II):

گام اول: نوشتن معادله موازنه نشده واکنش و گذاشتن خط تیره پشت هر ماده!



گام دوم: شناسایی عنصر شروع کننده موازنه: پیچیده ترین ترکیب در این واکنش، Na_2SO_4 است. عنصر O نمی تواند عنصر شروع کننده باشد، زیرا در سمت راست در ساختار سه ماده وجود دارد؛ پس عنصرهای Na و S می توانند شروع کننده باشند که از بین آنها، Na را با توجه به ضریب بزرگ آن انتخاب می کنیم.

گام سوم: موازنه کردن عنصر شروع کننده موازنه در دو سمت معادله: برای موازنه اتم Na، به Na_2SO_4 ، ضریب ۱ و به NaCl،

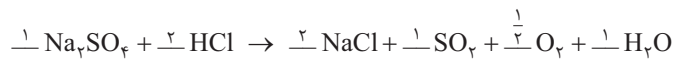
ضریب ۲ می دهیم:



گام چهارم: موازنه کردن بقیه عناصرها: موازنه را با اتم گوگرد که فقط ضریب یک ماده دارای آن مجهول است، ادامه می‌دهیم. ضریب SO_4 را برابر ۱ در نظر می‌گیریم تا تعداد اتم گوگرد در دو سمت معادله برابر شود:



حال موازنه را به ترتیب با عنصرهای Cl ، H و O ادامه می‌دهیم:



در نهایت برای از بین بردن ضریب کسری، همه اعداد را در ۲ ضرب می‌کنیم:



با توجه به واکنش‌های موازنه‌نشده (I) و (II)، می‌توان دریافت که ضرایب استوکیومتری هر ۲ ماده H_2O و HCl در معادله واکنش (I)، ۲ برابر ضرایب این مواد در معادله واکنش (II) است.

- (۱) در شیمی سبز دانشمندان با استفاده از منابع طبیعی، به دنبال افزایش کیفیت زندگی انسان و محافظت از طبیعت هستند.
- (۲) برای کاهش مقدار کربن دی اکسید تولیدشده از نیروگاه‌ها، آن‌ها را با اکسیدهای بازی واکنش داده و به موادی معدنی تبدیل می‌کنند.
- (۳) سوخت سبز همانند پلاستیک سبز، در ساختار خود اتم اکسیژن دارد و برخلاف سوخت‌های فسیلی، گازهای گلخانه‌ای تولید نمی‌کند.
- (۴) دفن کردن کربن دی اکسید نسبت به سایر روش‌های شیمی سبز برای کاهش ردپای CO_2 ، دستکاری کم‌تری در طبیعت دارد.

MgO و CaO

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

سوخت‌های سبز مانند اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$)، در ساختار خود دارای اکسیژن نیز هستند. *هواستون* باشد که در ساختار این سوخت‌ها، عنصرهای کربن و هیدروژن نیز وجود دارد و از سوختن آن‌ها گازهای گلخانه‌ای CO_2 و H_2O نیز تولید می‌شود، اما به میزان کم‌تر!

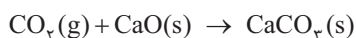


سوختی است که در ساختار خود علاوه بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد.
سوخت سبز از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آید.
زیست تخریب پذیرند؛ از این رو به وسیله جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شوند.
اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) و روغن‌های گیاهی، نمونه‌هایی از این نوع سوخت‌ها هستند.

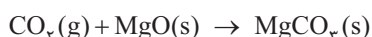
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): شیمی سبز شاخه‌ای از شیمی است که در آن شیمی‌دان‌ها در جست‌وجوی فرایندها و فرآورده‌هایی هستند که به کمک آن‌ها بتوان کیفیت زندگی را با بهره‌گیری از منابع طبیعی افزایش داد و هم‌زمان از طبیعت محافظت کرد. به همین منظور باید تولید و مصرف مواد شیمیایی را که ردپاهای سنگینی روی کره زمین بر جای می‌گذارند، کاهش داد یا متوقف کرد.

گزینه (۲): برای تبدیل CO_2 به مواد معدنی، CO_2 تولیدشده در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی را با منیزیم اکسید (MgO) یا کلسیم اکسید (CaO) واکنش می‌دهند. طی این واکنش‌ها، منیزیم کربنات (MgCO_3) و کلسیم کربنات (CaCO_3) جامد تولید شده و از انتشار گاز CO_2 در هوا کره جلوگیری می‌شود.



ماده معدنی



ماده معدنی

می‌دانید که CaO و MgO با توجه به این که اکسید فلزی هستند، در واکنش با آب، باز تولید کرده و به همین دلیل اکسیدهای بازی محسوب می‌شوند.

گزینه (۴): چون برای دفن کردن کربن دی اکسید از فضاهای از پیش آماده (میدان‌های قدیمی نفت و گاز و ...) استفاده می‌شود، این روش کم‌ترین دستکاری در طبیعت را دارد.

در میان منابع مختلف تولید برق، کدام منابع به ترتیب کم‌ترین و بیشترین سهم را در تولید کربن دی‌اکسید دارند؟

(۲) انرژی خورشید - زغال سنگ

(۱) باد - نفت خام

(۴) انرژی خورشید - نفت خام

(۳) باد - زغال سنگ

پاسخ: گزینه ۳

مقایسه ردپای CO_2 ایجادشده از منابع گوناگون تولید برق به صورت زیر است:

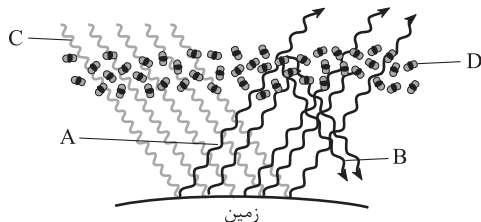
باد > گرمای زمین > انرژی خورشید > گاز طبیعی > نفت خام > زغال سنگ: مقایسه ردپای CO_2

بنابراین استفاده از **زغال سنگ** برای تولید برق، کربن دی‌اکسید بیشتری نسبت به سایر منابع ایجاد می‌کند؛ پس ردپای ایجادشده توسط آن سنگین‌تر است.

همچنین **باد** نیز در تولید برق نسبت به سایر منابع، کربن دی‌اکسید کم‌تری تولید می‌کند؛ پس کم‌ترین سهم و ردپا را در تولید کربن دی‌اکسید دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به شکل زیر، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) با افزایش مقدار مولکولهای D در هواکره، حجم آب اقیانوسها بالاتر می‌رود.



ب) بخش قابل توجهی از پرتوهای A و C به ترتیب به وسیله مولکولهای D و زمین جذب می‌شود.
پ) اگر هواکره وجود نداشت، دمای کره زمین با توجه به رسیدن مستقیم پرتوهای خورشیدی افزایش می‌یافت.
ت) پرتوهای C می‌توانند گستره‌ای از امواج الکترومغناطیس، مانند نور مرئی و فرابنفش باشند.

۲) ب - پ

۱) الف - پ

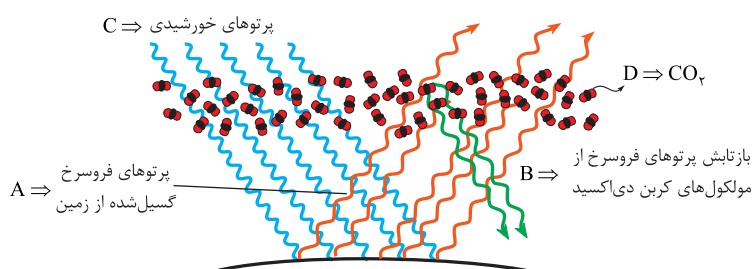
۴) ب - ت

۳) الف - ت

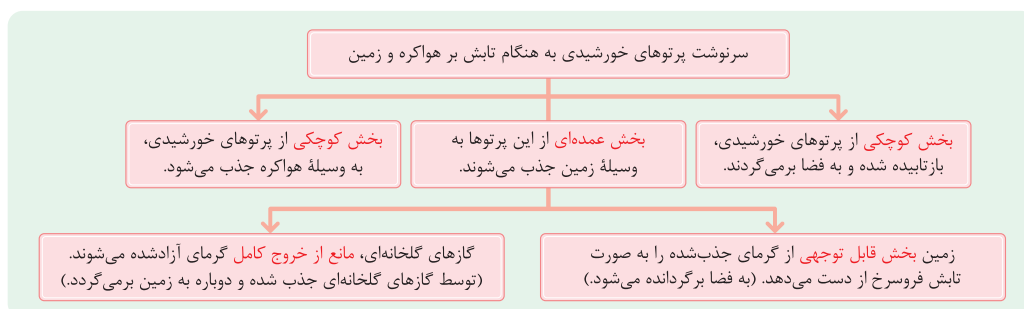
پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های «الف» و «ت» درست هستند.

با توجه به شکل زیر، به سراغ بررسی عبارت‌ها می‌رویم:



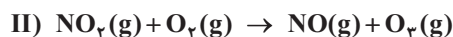
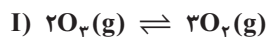
الف) با افزایش مقدار گازهای گلخانه‌ای مانند CO_2 در هواکره، روند گرم شدن زمین با افزایش به دام افتادن پرتوهای فروسرخ گسیل شده، تسهیل می‌شود. با گرم شدن زمین، یخ‌های قطبی ذوب شده و سطح آب اقیانوسها بالا می‌آید.
ب و ت) پرتوهای C، همان پرتوهای خورشیدی هستند که می‌توانند گستره‌ای از امواج الکترومغناطیس شامل نور مرئی، فرابنفش و ... باشند.



بخش عمده پرتوهای خورشیدی (پرتوهای C) به وسیله زمین جذب می‌شود، اما حواستان باشد که بخش قابل توجهی از پرتوهای فروسرخ منتشر شده از زمین (پرتوهای A)، وارد فضا شده و بخش کوچکی از آنها توسط گازهای گلخانه‌ای مانند مولکولهای D جذب و بازتاب می‌شود.

پ) لایه هوای اطراف زمین یا هواکره با ممانعت از خروج پرتوهای فروسرخ، باعث افزایش دمای سطح زمین می‌شود. درواقع، اگر این لایه در اطراف زمین نبود، میانگین دمای کره زمین کاهش یافته و به -18°C می‌رسید.

با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟



(۱) احتمال انجام واکنش (II) در یک روز ابری بیشتر از یک روز آفتابی است.

(۲) واکنش (I) در لایه‌ای از هواکره انجام می‌شود که روند تغییر دما و فشار در آن عکس یکدیگرند.

(۳) قهوه‌ای‌رنگ‌بودن هوای آلوده کلان‌شهرها مربوط به فراورده نیتروژن‌دار واکنش (II) است.

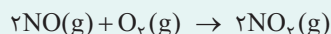
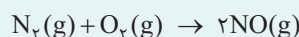
(۴) با انجام واکنش (I) در هواکره، درصد حجمی اوزون در لایه اوزون کاهش می‌یابد، اما از ورود بخش عمده‌ای از تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین ممانعت می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

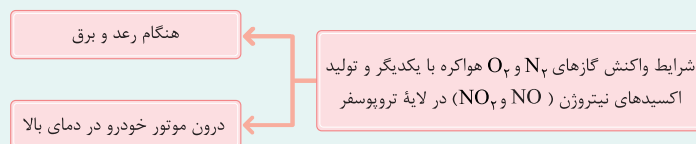
درس‌Box

مراحل تشکیل اوزون تروپوسفری به صورت زیر است:

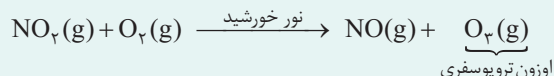
مرحله اول: گاز نیتروژن (N_2) به عنوان اصلی‌ترین جزء سازنده هواکره، واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد و به طور معمول با اکسیژن هوا (O_2) واکنش نمی‌دهد، اما هنگام رعد و برق و بالا رفتن دما، این دو گاز در هواکره با یکدیگر ترکیب شده و به اکسیدهای نیتروژن تبدیل می‌شوند:



در هوای آلوده شهرهای صنعتی و بزرگ، به مقدار قابل توجهی اکسیدهای نیتروژن وجود دارد. این گازها از واکنش گازهای نیتروژن و اکسیژن درون موتور خودرو و در دمای بالا به وجود می‌آیند.



گاز نیتروژن دی‌اکسید (NO_2) به رنگ قهوه‌ای است، به همین دلیل هوای آلوده کلان‌شهرها اغلب به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود. **مرحله دوم:** در هوای آلوده حاوی گاز نیتروژن دی‌اکسید و در حضور نور خورشید، واکنش زیر رخ می‌دهد و مقداری گاز اوزون تولید می‌شود:



واکنش برگشت‌پذیر $2O_3(g) \rightleftharpoons 3O_2(g)$ در لایه استراتوسفر انجام می‌شود. در این لایه با افزایش ارتفاع، فشار هوا کاهش و دمای آن افزایش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): واکنش (II) در حضور نور خورشید انجام می‌شود؛ بنابراین احتمال حضور آن در یک روز آفتابی بیشتر از یک روز بارانی است.

گزینه (۳): فراورده نیتروژن‌دار واکنش (II)، گاز NO بوده که گازی بی‌رنگ است. علت قهوه‌ای‌بودن هوای کلان‌شهرها به دلیل واکنش‌دهنده نیتروژن‌دار واکنش (II) یعنی NO_2 است.

گزینه (۴): با توجه به این‌که

واکنش برگشت‌پذیر است، مقدار O_3 مصرف‌شده دوباره تولید می‌شود و مقدار O_2 تولیدشده دوباره مصرف می‌شود. بر این اساس درصد حجمی این گازها تغییر نمی‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی